CIP法の有限要素法化*
(3次元移流方程式の検証)榎原孝文*¹, 棚橋隆彦*², 松本昌昭*¹Finite-Element Method for CIP Method
(Verification of Three-D Advection Equation)

Takafumi MAKIHARA, Takahiko TANAHASHI and Masaaki MATUMOTO

The conventional shape function for the finite-element method (FEM) is a linear one, which is inadequate for analyzing numerically complex flows at high Reynolds numbers. In the present study, we aim to formulate a finite element method for the cubic interpolated pseudo-particle (CIP) method which was developed in the field of finite difference method. The CIP method is used to analyze advection equations with high accuracy. We modify this CIP method and discretize it with FEM. We propose third order shape functions which require continuity of the value of the function and its first space derivative in whole space. The shape function is written as a product of the conventional linear shape function and new second order shape function. Using this new shape function, we analyze some rotating problems in 3D which are a good example of the use of advection equation.

Key Words: CIP Method, Third Order Shape Function, Finite-Element Method, Advection Equation, Rotating Problems

1 緒言

計算機が大型化されるにつれて、数値解析がこれまで以上に重視されるようになってきている。この結果、それに適応した高度な数値解析手法が開発されている。これまでは開発された計算手法の検討のため、基本的な形状まわりの流れで数値解析が行われてきた。しかし、近年は実用問題に適用することが多くなっている。

工学上問題となる流れは、一般に複雑形状流路内の大規模な剥離をともなった乱流や自由表面を伴う流れが多い。これらの流れを解析する手法として、重要視されている数値解法の1つが有限要素法(Finite-Element Method)である。しかし、従来の有限要素法では写像関数と補間関数に線形の形状関数を用いている。乱流は高Reynolds数の流れであり、支配的な移流項を高精度に解くには、この線形形状関数を用いる従来の有限

要素法では不十分である。また、自由表面流れの解析で、最近注目を集めているVOF法では、界面を記述するVOF関数の移流方程式を高精度に解析しなければならないが、やはり線形形状関数では十分な解析精度を得ることができない。経済的な欠点(計算容量、計算時間)が克服されつつある有限要素法にとって、他の解析手法に比べて欠点となっているのはこの点である。というのも有限要素法では、差分法や有限体積法に比べ、上流化が困難だからである。近年、有限要素法の上流化に対して多くの研究がなされている。その主な方法としてPetrov-Galerkin法⁽¹⁾、人工拡散法⁽²⁾、SUPG(Stream Upwind/Petrov-Galerkin)法⁽³⁾や定常移流拡散方程式の局所厳密解を用いたChenによるFAM(Finite Analytic Method)⁽⁴⁾を有限要素法に拡張したHybrid形上流化有限要素法⁽⁵⁾などがあるが、いずれも十分な精度があるとはいえない。そこで本論文では移流方程式に対して高精度で安定であるCIP(Cubic Interpolated Pseudo-particle)法に着目する。

矢部らによって差分法で開発されたCIP法⁽⁶⁾の特徴は、空間の関数値の分布を連続関数と想定し、その連続関数を節点での関数値とその1階微分を用いて3次

* 原稿受付 1996年8月21日。

^{*1} 慶應義塾大学大学院(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員、慶應義塾大学理工学部。

関数で表し、その3次関数の形状を崩さずに移流することにある。このCIP法を改良し、FEMで定式化し、GSMAC-FEMの中に取り入れることを考える⁽⁷⁾。そのために補間関数には従来の線形形状関数と任意の2次関数の積をとる3次関数を用いる⁽⁸⁾。この補間関数を誘導し、これを用いて3次元移流方程式の検証として、Rotating-Sphereモデルでの解析を行う。

2 3次補間の形状関数

有限要素法では一般に写像関数と補間関数に1次関数の形状関数を用いる。しかし、移流項を高精度に解くにはこの補間方法(線形補間)では不十分である。ここでは、差分法で発達したCIP法を改良し、FEMで定式化し、GSMAC-FEMの中に取り入れることにする(GSMAC-CIP法)。そのために、写像関数には従来通りのアフィン変換を用いるが、補間関数には3次関数を用い、全領域で関数値と微係数の連続性を要求し、形状関数を決定する。その一般形は

$$\text{写像関数} \quad \mathbf{x} = \sum_a N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{補間関数} \quad T(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_a N_a(\boldsymbol{\xi}) F_a(\boldsymbol{\xi}) \\ F_a(\boldsymbol{\xi}) &= G_a(\boldsymbol{\xi}) + N_a(\boldsymbol{\xi}) T_a \end{aligned} \quad (2)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} N_a(\boldsymbol{\xi}) &: \text{従来の形状関数で1次関数} \\ G_a(\boldsymbol{\xi}) &: T_a \text{ と } \partial_\xi T_a \text{ を含む2次関数} \end{aligned}$$

である。 N_a と F_a の積で $T(\boldsymbol{\xi})$ は3次関数となる。また、 $T_a = T(\boldsymbol{\xi}_a)$ 、 $\partial_\xi T_a = \partial_\xi T(\boldsymbol{\xi}_a)$ である。

2.1 1次元の形状関数

3次元の形状関数を誘導するのは繁雑であり、また、1次元の場合と同様にして容易に拡張することができることから、ここでは1次元の場合について述べる。

物理空間の節点 x_a で関数値 T_a とその微分値 $\partial_x T_a$ の連続性を要求する。これは計算空間の点 ξ_a で T_a と $\partial_\xi T_a$ の連続性を要求することと同じである。ここで、関数値と微係数の間に対応関係式

$$T(x_a) = T(\xi_a) \quad (3)$$

$$\partial_\xi T(\xi_a) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial_x T(x_a) \quad (4)$$

が成立する。いま、3次の補間関数を用いて

$$T(\xi) = \sum_a N_a(\xi) F_a(\xi) \quad (5)$$

と表す。ここで、 $N_a(\xi)$ は1次関数であるから、 $F_a(\xi)$ は2次関数となる。この2次関数を

$$F_a(\xi) = G_a(\xi) + N_a(\xi) T_a \quad (6)$$

の形に仮定する⁽⁹⁾。ここで、 $G_a(\xi)$ は2次関数であり、 $N_a T_a$ は a について和をとらないものとする。関数 $F_a(\xi)$ の決定方法には任意性があるが、節点座標 ξ_a に対して

$$F_a(\xi_a) = T_a \quad a = b \text{ のとき} \quad (7)$$

$$F_a(\xi_b) = 0 \quad a \neq b \text{ のとき} \quad (8)$$

を満足するように仮定しておくことと計算上便利である。このためには、形状関数 $G_a(\xi)$ に次の条件

$$G_a(\xi_a) = 0, \quad N_a(\xi_a) = 1 \quad a = b \text{ のとき} \quad (9)$$

$$G_a(\xi_b) = 0, \quad N_a(\xi_b) = 0 \quad a \neq b \text{ のとき} \quad (10)$$

を付加する。節点で補間関数が満足すべき条件は、関数値と微係数の連続の条件

$$T(\xi_a) = T_a, \quad \partial_\xi T(\xi_a) = \partial_\xi T_a \quad (11)$$

である。関数値の連続の条件は容易に確かめることができる。次に、 $G_a(\xi_a) = 0$ 、 $G_a(\xi_b) = 0$ と微係数の連続の条件を用いて形状関数 $G_a(\xi)$ を決定する。微係数の連続の条件は

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \sum_a \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} F_a + N_a \frac{\partial F_a}{\partial \xi} \right) \quad (12)$$

であるから、 $\xi = \xi_a$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_a) &= \frac{\partial N_a}{\partial \xi}(\xi_a) T_a + \frac{\partial F_a}{\partial \xi}(\xi_a) \\ &= \partial_\xi T_a \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、局所節点 ξ_a に対して $F_a(\xi_a) = T_a$ 、 $N_a(\xi_a) = 1$ を用いた。さらに、関数 $F_a(\xi)$ の微分に対して

$$\frac{\partial F_a}{\partial \xi}(\xi_a) = \frac{\partial G_a}{\partial \xi}(\xi_a) + \frac{\partial N_a}{\partial \xi}(\xi_a) T_a \quad (14)$$

であるから、微係数の連続性の条件は形状関数 G_a を用いて

$$2 \frac{\partial N_a}{\partial \xi}(\xi_a) T_a + \frac{\partial G_a}{\partial \xi}(\xi_a) = \partial_\xi T_a \quad (15)$$

と表すことができる。ここで

$$\frac{\partial N_a}{\partial \xi}(\xi_a) = \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} \right)_a \quad (16)$$

$$\frac{\partial G_a}{\partial \xi}(\xi_a) = \left(\frac{\partial G_a}{\partial \xi} \right)_a \quad (17)$$

と書くことにすると、微係数の連続性の条件は最終的に

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \xi} \right)_a = \partial_\xi T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} \right)_a T_a \quad (18)$$

と書ける。ここで、与えられた要素に対して $\left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi}\right)_a$ を求める必要がある。この条件式を用いて形状関数 $G_a(\xi)$ を決定する。1次元の場合、1次補間の形状関数は

$$N_a = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad (19)$$

であるから

$$\left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi}\right)_a = \frac{\xi_a}{2} \quad (20)$$

となる。よって、微係数の連続性の条件は線要素に対して

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \xi}\right)_a = \partial_\xi T_a - \xi_a T_a \quad (21)$$

と書ける。この条件と $G_a(\xi_a) = 0$, $G_a(\xi_b) = 0$ を満足する形状関数として

$$G_a(\xi) = (\partial_\xi T_a - \xi_a T_a) \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1) \quad (22)$$

が求まる。ここで $a = 1, 2$ とに対して $\xi_a^2 = 1$ である。Table 1 に結果をまとめる。

2.2 2次元の形状関数

2次元の場合も計算は1次元の場合と同様に進めることができる。2次元の場合の関数値と微係数の対応関係式は

$$T(x_a, y_a) = T(\xi_a, \eta_a) = T_a \quad (23)$$

$$\partial_\xi T_a = \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial_x T_a + \frac{\partial y}{\partial \xi} \partial_y T_a \quad (24)$$

$$\partial_\eta T_a = \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x T_a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \partial_y T_a \quad (25)$$

と書ける。よって、微分関係式として

$$\begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

が成立する。ここで

$$[J_{ij}] = \left[\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right] \quad (27)$$

はJacobi行列である。ただし、 $i, j = 1, 2$ である。さらに、微係数の連続性の条件は $G_a(\xi, \eta)$ の ξ と η の微分に関してそれぞれ

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \xi}\right)_a = \partial_\xi T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi}\right)_a T_a \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \eta}\right)_a = \partial_\eta T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta}\right)_a T_a \quad (29)$$

となる。この結果を用いて4角形要素の形状関数 $G_a(\xi, \eta)$ を求めると Table 2 の結果を得る。

2.3 3次元の形状関数

3次元の場合は添字を用いて表し

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi, \eta, \zeta) \quad (30)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \quad (31)$$

とする。このとき、微係数の対応関係式はchain ruleを用いて

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (32)$$

となる。ここで、 $i, j = 1, 2, 3$ である。また、節点で微係数が連続となるための条件は形状関数 G_a を用いて

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \xi}\right)_a = \partial_\xi T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi}\right)_a T_a \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \eta}\right)_a = \partial_\eta T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta}\right)_a T_a \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial G_a}{\partial \zeta}\right)_a = \partial_\zeta T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \zeta}\right)_a T_a \quad (35)$$

のように求まる。以上より、形状関数 G_a の一般形は

$$G_a(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \partial_\xi T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi}\right)_a T_a \\ \partial_\eta T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta}\right)_a T_a \\ \partial_\zeta T_a - 2 \left(\frac{\partial N_a}{\partial \zeta}\right)_a T_a \end{bmatrix} (\cdots) + \quad (36)$$

と表せる。ここで、 $(\cdots)$ は ξ, η, ζ の2次関数で式(33), (34), (35)の条件と局所節点番号に対する条件 $G_a(\xi_a, \eta_a, \zeta_a) = 0$, $G_a(\xi_b, \eta_b, \zeta_b) = 0$ を満足するように決定される。3次元6面体要素の形状関数を Table 3 に示す。

2.4 一様性の条件

関数 $F_a(\xi)$ の決定方法には任意性があることを前に述べた。ここではこの任意性について述べる。形状関数を新たに

$$F_a(\xi) = G_a(\xi) + E_a(\xi) T_a \quad (37)$$

と書く。ここで、形状関数 $E_a(\xi)$ に次の性質を持たせる。形状関数 $N_a(\xi)$ と対比して書くと、次のようになる。

$$(a) \quad E_a(\xi_a) = 1, \quad N_a(\xi_a) = 1 \quad (38)$$

$$(b) \quad \frac{\partial E_a}{\partial \xi} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \quad (39)$$

$$(c) \quad E_a(\xi_b) = \text{任意}, \quad N_a(\xi_b) = 0 \quad (40)$$

Table 2 Shape Function G_a (Quadrangle Element)

a	$G_a = [\partial_\xi T_a - \xi_a T_a] \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_a - \eta_a T_a] \frac{\eta_a}{2} (\eta^2 - 1)$
1	$G_1 = [\partial_\xi T_1 + T_1] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_1 + T_1] \frac{1}{2} (1 - \eta^2)$
2	$G_2 = [\partial_\xi T_2 - T_2] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_2 + T_2] \frac{1}{2} (1 - \eta^2)$
3	$G_3 = [\partial_\xi T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1)$
4	$G_4 = [\partial_\xi T_4 + T_4] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_4 - T_4] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1)$

Table 1 Shape Function G_a (Line Element)

a	$G_a = [\partial_\xi T_a - \xi_a T_a] \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1)$
1	$G_1 = [\partial_\xi T_1 + T_1] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1)$
2	$G_2 = [\partial_\xi T_2 - T_2] \frac{1}{2} (1 - \xi^2)$

Table 3 Shape Function G_a (Hexahedron Element)

a	$G_a = [\partial_\xi T_a - \xi_a T_a] \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_a - \eta_a T_a] \frac{\eta_a}{2} (\eta^2 - 1) + [\partial_\zeta T_a - \zeta_a T_a] \frac{\zeta_a}{2} (\zeta^2 - 1)$
1	$G_1 = [\partial_\xi T_1 + T_1] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_1 + T_1] \frac{1}{2} (1 - \eta^2) + [\partial_\zeta T_1 + T_1] \frac{1}{2} (1 - \zeta^2)$
2	$G_2 = [\partial_\xi T_2 - T_2] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_2 + T_2] \frac{1}{2} (1 - \eta^2) + [\partial_\zeta T_2 + T_2] \frac{1}{2} (1 - \zeta^2)$
3	$G_3 = [\partial_\xi T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) + [\partial_\zeta T_3 + T_3] \frac{1}{2} (1 - \zeta^2)$
4	$G_4 = [\partial_\xi T_4 + T_4] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_4 - T_4] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) + [\partial_\zeta T_4 + T_4] \frac{1}{2} (1 - \zeta^2)$
5	$G_5 = [\partial_\xi T_5 + T_5] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_5 + T_5] \frac{1}{2} (1 - \eta^2) + [\partial_\zeta T_5 - T_5] \frac{1}{2} (\zeta^2 - 1)$
6	$G_6 = [\partial_\xi T_6 - T_6] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_6 + T_6] \frac{1}{2} (1 - \eta^2) + [\partial_\zeta T_6 - T_6] \frac{1}{2} (\zeta^2 - 1)$
7	$G_7 = [\partial_\xi T_7 - T_7] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_7 - T_7] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) + [\partial_\zeta T_7 + T_7] \frac{1}{2} (\zeta^2 - 1)$
8	$G_8 = [\partial_\xi T_8 + T_8] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_8 - T_8] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) + [\partial_\zeta T_8 - T_8] \frac{1}{2} (\zeta^2 - 1)$

ここで、(a) の条件は $F_a(\xi_a) = T_a$ で関数値が連続になることを、(b) の条件は関数値の連続性の条件が形状関数 $N_a(\xi)$ を用いたときと等しくなることを表している。(c) の条件は形状関数 $E_a(\xi)$ に条件を与えないことを意味している。

(c) で $E_a(\xi_b)$ が任意の値でよいから、新しい条件として一様性の条件を付加する。関数が全空間で一様であるとき、各節点の値はすべて等しく、その関数値の微分は零である。いま、この一定値を k とすれば、すべての a に対して

$$T_a = k, \quad \partial_\xi T_a = 0 \quad (41)$$

となる。また、関数が一様するとき、重心の値も周囲の値に等しく $T(\xi_g) = k$ となる。ここで、 ξ_g は要素の重心の座標である。重心における形状関数の値はすべて等しいから、この一様性の条件は形状関数 $F_a(\xi)$ を用いて書くと

$$F_a(\xi_g) = k \quad (42)$$

となる。すなわち、最終的に一様性の条件は

$$G_a(\xi_g) + E_a(\xi_g)k = k \quad (43)$$

と書ける。ここで、 $G_a(\xi_g)$ の値は既知であるから、 $E_a(\xi_g)$ が求まる。対称要素に対してこの条件は次のようになる。

(a) 1次元の場合:

$$G_a(\xi_g) = \frac{k}{2} \quad \therefore \quad E_a(\xi_g) = \frac{1}{2} \quad (44)$$

これは

$$E_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad (45)$$

を意味する。よって、 $E_a(\xi) = N_a(\xi)$ となる。

(b) 2次元4角形要素の場合:

$$G_a(\xi_g) = k \quad \therefore \quad E_a(\xi_g) = 0 \quad (46)$$

よって,

$$E_a(\xi) = \frac{1}{2}(\xi_a \xi + \eta_a \eta) \quad (47)$$

を得る。この場合 $E_a(\xi) \neq N_a(\xi)$ である。

(c) 3次元6面体要素の場合:

$$G_a(\xi_g) = \frac{3}{2}k \quad \therefore \quad E_a(\xi_g) = -\frac{1}{2} \quad (48)$$

よって

$$E_a(\xi) = \frac{1}{2}(\xi_a \xi + \eta_a \eta + \zeta_a \zeta - 1) \quad (49)$$

この場合, $E_a(\xi) \neq N_a(\xi)$ である。

求めた形状関数 $E_a(\xi_g)$ を Table 4 にまとめる。この結果は池田が求めた形状関数に一致する⁽¹⁰⁾。 $F_a(\xi) = G_a(\xi) + N_a(\xi)T_a$ のとき, 1次元の場合は一様性の条件を満足するが, 2次元, 3次元の場合は一様性の条件を満足しない。すなわち, 3次補間の形状関数は関数値と微係数の連続性に加えて, 一様性の条件を満足する必要がある。

Table 4 Shape Function E_a

	$G_a(\xi_g)$	$E_a(\xi_g)$	E_a
1D	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}$	$E_a = N_a = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi)$
2D	k	0	$E_a = \frac{1}{2}(\xi_a \xi + \eta_a \eta)$
3D	$\frac{3}{2}k$	$-\frac{1}{2}$	$E_a = \frac{1}{2}(\xi_a \xi + \eta_a \eta + \zeta_a \zeta - 1)$

3 物理空間と計算空間の対応

CIP法は移流方程式を高精度に解く方法で, 厳密解の概念を用いる。つまり, 移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (50)$$

に対して, 解は局所的に

$$\phi(\mathbf{x}_i, t) \sim \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{v} \Delta t, t - \Delta t) \quad (51)$$

を満足する。 $\mathbf{x}_i$ は接点を表し, f は接点上で与えられる。ゆえに, CIP法では出発点 $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i - \mathbf{v} \Delta t$ を求める必要がある。有限要素法の計算格子は任意形状であるので, 実際の計算は規格化された計算空間で計算を行う。このため計算空間での出発点 ξ_p を求めなければならない。これがCIP法を有限要素法に適用するとき最も重要になる。以下に ξ_p の導出方法を示す。

物理空間の出発点 $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$ と計算空間の出発点 $\xi_p = (\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ の対応関係は

$$\mathbf{x}_p = \sum N_a(\xi_p) \mathbf{x}_a \quad (52)$$

である。1, 2次元の場合は対応関係から容易に求めることができる。しかし, 3次元の場合は ξ_p に対して10次方程式となる。これを解くためには漸近法を用いることになるが, ここではそれに代わる Newton-Raphson 法を用いる方法を提案する。

$$\mathbf{f}(\xi) = \mathbf{x} - N_a(\xi) \mathbf{x}_a = 0 \quad (53)$$

として, この式の解を求める。この場合

$$\mathbf{f}(\xi_{n+1}) - \mathbf{f}(\xi_n) = (\xi_{n+1} - \xi_n) \cdot (\nabla \mathbf{f})_n \quad (54)$$

である。 $\mathbf{f}(\xi_{n+1}) = 0$ として循環公式

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \mathbf{f}(\xi_n) \cdot (\nabla \mathbf{f})_n^{-1} \quad (55)$$

が導ける。これから物理空間の出発点 $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$ に対応する計算空間の出発点 $\xi_p = (\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ を求める。本論文では反復の収束判定を 10^{-6} としている。

4 解析モデル

これまでに誘導した3次形状関数を用いて, 3次元移流方程式の検証を Rotating Model で行う。計算条件は以下の3つを用いる。

- (1) **解析モデル1** 計算条件は角速度 $\omega = 2\pi$, 時間ステップ $\Delta t = 0.001$ で1000ステップで Potential Sphere が一周するように回転させる。 z 軸と回転平面とのなす角 θ を $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ とする。Potential Sphere のもつ関数値 ϕ は球の中心 $(0, -0.5, 0)$ から半径 r により

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\cos(\pi r/0.3) + 1}{2} & (0 \leq r < 0.3) \\ \phi &= 0 & (r \geq 0.3) \end{aligned} \quad (56)$$

とし, 河本ら⁽¹¹⁾の解析と同様に $30 \times 30 \times 30$ のメッシュで解析する。さらに $50 \times 50 \times 50$ のメッシュでも解析する。Fig.1 に解析モデル図を示す。

- (2) **解析モデル2** 計算条件は(1)と同様であるが Potential の分布を

$$\begin{aligned} \phi &= 1 & (0 \leq r < 0.3) \\ \phi &= 0 & (r \geq 0.3) \end{aligned} \quad (57)$$

とする。 $50 \times 50 \times 50$ のメッシュを用いる。

Fig.1 Analytical Model

- (3) **解析モデル3** 自由表面問題でのVOF法など界面を記述する際は移流方程式であり、VOF関数などは変数 ϕ が0から1までの一定の値に収める必要がありこれらに適用できるように $h = \tan\{\pi(\phi - 1/2)\}$ の変換を行う解析をする。このときPotentialの分布は

$$\begin{aligned} \phi &= 1 & (-0.3 \leq x, z \leq 0.3, \\ & & -0.8 \leq y \leq -0.2) \\ \phi &= 0 & (\text{other}) \end{aligned} \quad (58)$$

である。計算には $50 \times 50 \times 50$ のメッシュを用いる。

5 結果と検討

5.1 解析モデル(1)

滑らかな関数でPotentialを与えた場合は河本らによって差分法による各種の高精度解析が同じ条件で計算されている。一回転後のPotentialの最大値の河本らとの比較をTable 5に示す。河本らの解析は $30 \times 30 \times 30$ メッシュである。3次補関をすることは3次精度を表す。3次精度の他の計算結果に比べて本解析結果は精度よく移流させていることがわかる。また、 $50 \times 50 \times 50$ での本解析結果もTable 5に示すが、メッシュを細かくすれば、ほぼ初期状態のまま移流させることがわかる。

Fig.2に $\theta = 0^\circ$ のときの一回転後の球の断面図($y = 0.46$ 面)を、Fig.3にその面でのPotentialの分布を示す。これからわかるようにほとんど形状、Potentialの分布を崩さずに移流させていることがわかる。以上の知見は他の角度の結果も同様の結果を得た。

Table.5 Maximum value of ϕ after one rotation⁽¹¹⁾

	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 15^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$
present (30^3 mesh)	0.828	0.751	0.732	0.726
present (50^3 mesh)	0.964	0.943	0.937	0.935
QUICK	0.664	0.613	0.577	0.577
3rd-order upwind	0.631	0.572	0.540	0.532
QUICKEST	0.628	0.565	0.535	0.532
4th-order centered	0.928	0.932	0.923	0.929
5th-order upwind	0.895	0.889	0.879	0.876

5.2 解析モデル(2)

$\theta = 0^\circ$ の一回転後の球の断面図($y = 0.48$ 面)をFig.4に、その面でのPotentialの分布をFig.5に示す。他の角度での解析結果も同様であった。Fig.4より一回転後の球の形状は初期状態から崩れたが、これはFig.5のように球の内部ではPotentialの値が1値より大きく、外部で0より小さい値をとったためである。最大値と最小値はそれぞれ $\phi_{max} = 1.17$ 、 $\phi_{min} = -0.06$ であった。この傾向は矢部らの計算結果にも見られる⁽¹²⁾。最大値、最小値の値はメッシュを細かくすることによって小さくなると思われるが、値を0と1に収めるためには全空間で関数値の一階微分を連続とするのではなく、不連続面では矢部ら⁽⁶⁾のように微分の方角を考慮する必要があると考えられる。

5.3 解析モデル(3)

$\theta = 0^\circ$ の一回転後の球の断面図($y = 0.48$ 面)をFig.6に、その面でのPotentialの分布をFig.7に示す。他の角度での解析結果も同様であった。この結果からわかるように正接関数変換をすることによって、Potentialを初期条件のように0と1にすることができる。また形状に関しては1メッシュ分小さくなっていたが、Potentialの分布は0と1であった。形状が小さくなったのは、全ての方向の微分値が連続であることを要求するのに対し、それを満足しないためであると考えられる。これは立方体の各辺において面取りされたようになっていたことから考えられる。矢部ら⁽¹²⁾のこの方法による一次元での解析結果が形状を崩していないのは、メッシュが4倍程度細かいことによるものと考えられる。本解析では $50 \times 50 \times 50$ のメッシュを用いたが厳しい条件に対してこのメッシュでは不十分であ

Fig.2 Shape of sphere of Model 1 after one rotation ($\phi = 0.1$, $y = 0.46$)

Fig.3 Potential Distribution of Model 1 ($y = 0.46$)

Fig.4 Spape of sphere of Model 2 after one rotation ($\phi = 1.0$, $y = 0.48$)

Fig.5 Potential Distribution of Model 2 ($y = 0.48$)

Fig.6 Spape of cubic of Model 3 after one rotation ($\phi = 1.0$, $y = 0.48$)

Fig.7 Potential Distribution of Model 3 ($y = 0.48$)

Fig.8 Conservativity

るといえる。さらに細かくすることによって初期状態の形状のまま移流させることができると思われる。

5.4 保存性

CIP法では保存性について議論されることが多い。本論文では移流方程式のみを解析しているが、非移流項を含む方程式に対するこの議論が矢部ら⁽¹²⁾によってなされている。ここでは解析モデル(1)に対する保存性について述べる。

Fig.8に以下の関係式のグラフを示す。

$$(\text{保存性}) = \frac{(n \text{ ステップの Potential の総和})}{(\text{初期の Potential の総和})} \quad (59)$$

保存性はPotentialを節点に配置した場合、計算格子の体積を乗じ、平均をとるべきであるが、本解析では立方体格子を用いているため、上式で保存性を考慮する。図から保存性は滑らかに減少しているが、1000ステップ後においても、 $30 \times 30 \times 30$ のメッシュで80%以上を、 $50 \times 50 \times 50$ のメッシュで90%近く保存していることから、保存性は非常によいと言える。

6 結言

本論文では差分法で発達してきたCIP法を有限要素法に取り入れるために、従来の線形形状関数にかわる3次形状関数を誘導した。さらに、誘導した形状関数を用いて3次元移流方程式の検証をRotating Modelで行い、以下の結論を得た。

- (1) 節点で関数値とその微分値が連続な3次補関の形状関数を誘導した。この形状関数は節点での流速の方向によって正負の符号が変わる矢部らの補間関数に対し、節点での流速の方向によらず同じ関数で流れ場が解析できる。

- (2) 誘導した形状関数を用いて3次元移流方程式の検証をRotating Sphere Modelで行った。その結果、Potential球の形状を崩さずに移流させることができた。さらに、河本らの解析結果と比較して、一回転後のPotentialの最大値は3次上流差分など同程度の精度の他の手法に比べ、その値を損なうことなく移流させることができた。

- (3) Potentialを正接関数変換して移流させることにより、球より厳しい条件である立方体を形状を崩さずに移流させることができた。さらに、Potentialの値は初期条件のまま0と1にすることができた。

- (4) CIP法でよく議論される保存性について検討した結果、1000ステップ後の保存性は $30 \times 30 \times 30$ のメッシュで80%以上であり、保存性は良いことがわかった。

参考文献

- (1) Christie, I. et al, Int. J. Numer. Methods Engrg., 10, (1976), 1389
- (2) Kelly, D. W. et al, Int. J. Numer. Methods Engrg., 15, (1980), 1705
- (3) Brooks, A. and Hughes, T. J. R., Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 32, (1982), 199
- (4) Chen, C. J., Handbook of Numerical Heat Transfer Chap.17, (1987), John-Wiley.
- (5) Tanahashi, T. and Oki, Y., JSME Int. Jour., Series B, 39-1, (1996), 28.
- (6) Yabe, T. et al, Comput. Phys. Commun., 66, (1991), 233.
- (7) 山本, 慶應義塾大学修士論文, (1995).
- (8) 松本, 棚橋, 第16回計算電気・電子工学シンポジウム, (1995), 171.
- (9) 棚橋, 計算流体力学, 第6章, (1994), IPC.
- (10) 門田, 池田, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1992), 411
- (11) Kawamoto, S., Iwase, H. and Tanahashi, T., JSME Int. Jour., Series B, 35-4, (1992), 536.
- (12) 矢部, 青木, 計算工学, 1-1, (1996), 19