CIP-有限要素法による非定常非圧縮粘性流れ問題の近似解析*

井出 康之^{*1}, 登坂 宣好^{*2}Approximation Analysis of Unsteady Incompressible
Viscous Flow Problem by CIP-FEM

Yasuyuki IDE and Nobuyoshi TOSAKA

In this study, the applicability of CIP-FEM to numerical simulation of two-dimensional unsteady incompressible viscous fluid flow is discussed. In this procedure, the basic differential equations of the flow are separated into advection and non-advection phases. Analysis of the advection phase is based on an approximate solution given by a cubic polynomial interpolation and the one of the non-advection phase is performed by FEM. The formulation in order to solve the basic equation of viscous fluid by using this procedure is discussed and also described. Numerical simulation of the problem of viscous flow is carried out. The applicability and effectiveness of the proposed method is discussed with the obtained numerical results.

Key Words: Cubic Interpolated Propagation (CIP) Method, CIP-FEM, Finite Element Method, Incompressible Viscous Flow, Fractional Step Method, Square Cavity Flow

1. はじめに

コンピュータの発達に伴い様々な流れ問題に対して数値シミュレーションが有効な手段として差分法や有限要素法等を用いて一般的に行われるようになってきた。流れ問題の中でも非圧縮粘性流れ問題は実用問題に多く応用されることから、代表的な問題となっている。

この非圧縮粘性流れ問題は移流卓越性を特徴とした高レイノルズ数域に達する流れ場を対象とする場合が多く、このような流れ問題の数値計算を行うには流れ場の移流卓越性に対して優れた特性を示す計算手法の導入が必要となる。このため、これまでに上流化手法等の各種の数値計算手法が差分法や有限要素法等を対象として提案されてきた^{1,2)}。

本論の対象となる有限要素法の分野では、有限要素法

の特徴である非構造格子への対応や有限要素方程式の構成等による制約から、上流化手法の構成は差分法に比べ、一般に複雑さを伴う。そのため、新しい計算手法の導入等による上流化手法の確立に対して様々な試みが行われている^{2,3)}。

このような数値計算手法の中で、差分法と有限要素法のいずれにも属さないCIP(Cubic Interpolated Propagation)法が矢部らによって提案され、数値解の高精度性と安定性から上流化手法としての優れた特性が示された^{4,5)}。現在では、CIP法は圧縮性流体と非圧縮性流体の統一解法として、また、気体、液体、固体の統一解法として発展し続けている^{6~8)}。

CIP法の基本的な特徴は流れの基礎方程式を移流方程式より構成される移流フェイズとそれ以外の方程式から構成される非移流フェイズの2つのフェイズへの分離を行い、移流フェイズの計算に際しては移流方程式の解を3次スプライン関数より与えることで、得られる数値解の高精度性と安定性が確保されたことにある。

他方、これまでのCIP法は構造格子による解析を前提とし、CIP法の非構造格子への適用が1つの課題になっていた

* 原稿受付 1996年9月5日。

^{*1} 正員、日本大学大学院 (〒275 習志野市泉町1-2-1), [現: 日本総合研究所CAEグループ]。

^{*2} 正員、日本大学生産工学部。

た. 最近では, CIP法を拡張し, 非構造格子に対応する新たな計算手法が提案されている⁹⁾. 著者らはCIP法の有限要素法への導入によって, CIP法による非構造格子への適用を試みを行い, CIP法と有限要素法を組み合わせた計算手法をCIP-有限要素法(CIP-FEM)¹⁰⁾として提案してきた. また, CIP-有限要素法の移流拡散問題への適用から, 同手法の精度と安定性, 非構造格子に対する適用性等について検討してきた.

本論では, 移流卓越流れ問題に対する新しい計算手法として提案したCIP-有限要素法を移流拡散問題での成果をもとに, 非圧縮粘性流れ問題に適用し, 同手法の上流化手法として有効性について検討する.

本論文の構成は, まず, CIP-有限要素法を非圧縮粘性流れ問題への適用に必要な定式化について示す. ここで, 基礎方程式の時間進行法としてFractional Step法^{11~13)}を採用し, 数値計算スキームを構成する. さらに, 同解法に対してCIP-有限要素法等の導入を行い, 諸量の時間進行に必要な計算手順について明らかにする. 次に, 上記の解法を検証するために数値計算例を示す. 例題として正方キャビティ流れ問題を取り上げ, 時間的に変化する解析領域内の流れ場の様子を計算結果として示す. また, 本手法の計算結果と既往の結果との比較から計算の精度等の確認を行い, 本手法の非圧縮粘性流れ問題への適用性と有効性を議論する.

2. 基礎方程式

本論文では, 2次元非圧縮粘性流体場の解析領域を Ω とし, その境界を Γ とする. この Ω に対する基礎方程式として次の運動方程式と連続の式を考える.

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad (1)$$

$$u_{j,j} = 0 \quad (2)$$

ここで, u_i , p , Re はそれぞれ流速ベクトル成分, 圧力, Reynolds数を表す.

境界 Γ はDirichlet条件が与えられる境界 Γ_u とNeuman条件が与えられる Γ_t で構成され, 各境界には次の境界条件が与えられる.

境界条件

・Dirichlet条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

・Neuman条件

$$t_i = \left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad (4)$$

ここで, t_i は表面力ベクトル成分, n_i は Γ 上における外向き法線ベクトル成分, δ_{ij} はKroneckerのdeltaを表す. また, $\hat{u}_i$, $\hat{t}_i$ は各境界上の規定値を表す. なお, 添字に関しては総和規約にしたがうものとする.

3. 定式化

3.1 Fractional Step 法 本論では, 基礎方程式の時間進行法について, 多用されているFractional Step法^{11~13)}を採用し, 得られる解析スキームを以下のように示す.

まず, 運動方程式(1)にFractional step分解を行い, 次の2式を導く.

$$\dot{u}_i^* + u_j^* u_{i,j}^* = \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \quad (5)$$

$$\dot{u}_i^{**} = -p_{,i}^{n+1} \quad (6)$$

なお, $\dot{u}_i^*$, $\dot{u}_i^{**}$ を次のように与える.

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^*(\tilde{u}_i, u_i^n) + \dot{u}_i^{**}(u_i^{n+1}, \tilde{u}_i) \quad (7)$$

ここで, $\tilde{u}_i$ は修正速度ベクトルである. さらに, $\dot{u}_i^{**}$ に陽的なEulerの時間積分を適用し, 式(6)を次のように表す.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - p^{n+1}/\Delta t \quad (8)$$

ここで, ϕ は修正速度ポテンシャルとし, 次のように与える.

$$\phi = -p^{n+1}/\Delta t \quad (9)$$

さらに, 式(8)を ϕ を用いて次のように表す.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + \phi_{,i} \quad (10)$$

ここで, 式(10)の発散を取り, 非圧縮の条件($u_i^{n+1} = 0$)を考慮することで, 次の ϕ に関するPoisson方程式が導かれる.

$$\phi_{,ii} = -\tilde{u}_{i,i} \quad (11)$$

実際の数値計算で対象となる式(5), (10), (11)のうち, 移流項を伴う式(5)に関してはCIP-FEMを適用し, 式(10), (11)についてはGalerkin型の有限要素法を適用して, 各未知量の計算を行う. これらの手順を繰り返すことにより, 諸量の時間進行が行われる.

なお, ここで示した定式化は修正ポテンシャル ϕ を用いない場合, すなわち, 圧力に関するPoisson方程式を導いた場合, C-CUP法^{6,7)}で得られる非圧縮性流体に対する定式化と結果的に等価になる.

3.2 CIP-有限要素法 CIP-FEMについての基本的な計算手順は, CIP法の手順と同様となる. そのため, 式(6)

を解く際に、時間進行する未知量 u_i^* と同時刻を進行する $u_{i,k}^*$ の値が必要となる。ここで、式(1)に対し x_k による微分を行い、 $u_{i,k}^*$ を未知量とする次の微分方程式を導く。

$$\dot{u}_{i,k}^* + u_j^*(u_{i,k}^*)_j + u_{j,k}^* u_{i,j}^* = \frac{1}{Re} (u_{i,jj}^*)_k \quad (12)$$

この方程式より $u_{i,k}^*$ の値を決定する。なお、本論では式(12)に関して境界 Γ の規定値 $\hat{u}_{i,k}$ を与える。

ここで、式(5)と式(12)は次の移流フェイズと非移流フェイズの2つのフェイズに分離される。

・移流フェイズ

$$\dot{u}_i' + u_j' u_{i,j}' = 0 \quad (13)$$

$$\dot{u}_{i,k}' + u_j' (u_{i,k}')_j = 0 \quad (14)$$

・非移流フェイズ

$$\dot{u}_i'' = \frac{1}{Re} u_{i,jj}'' \quad (15)$$

$$\dot{u}_{i,k}'' = -u_{j,k}'' u_{i,j}'' + \frac{1}{Re} (u_{i,jj}'')_k \quad (16)$$

なお、 $\dot{u}_i'$ 、 $\dot{u}_i''$ を次のように与える。

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i'(\bar{u}_i, u_i^n) + \dot{u}_i''(\bar{u}_i, \bar{u}_i) \quad (17)$$

ここで、求める $u_i, u_{i,k}$ は各フェイズそれぞれで計算され、移流フェイズ、非移流フェイズの順で計算が行われる。

各フェイズの計算方法について以下の節に記す。

3.3 移流フェイズの計算 CIP法では、移流フェイズの計算において、未知量を求めようとする節点の上流側の要素内の物理量より移流方程式の近似解を3次スプライン関数で構成し、これを移流フェイズの解とする計算が行われる。

本手法の場合は、非構造格子への対応から、未知量を求めようとする節点の上流側の要素内の各種物理量を x_i 座標系から正規直交系 ($0 \leq \eta_i \leq 1$) へ座標変換し、正規直交系上で与えられた物理量より移流方程式の近似解を3次スプライン関数で構成し、これを移流フェイズの求める解、すなわち、式(13)、(14)の解とする。

座標変換については対象としている要素の節点の座標 $x_i^a (\alpha = 1 \sim 4)$ で与えられた次の関係式¹⁰⁾を用いて座標変換を行う。

$$x_i = x_i(\eta_j, x_j^a) \quad (18)$$

$$\eta_i = \eta_i(x_j, x_j^a) \quad (19)$$

なお、座標 x_i^a は要素内で最も下流にある節点の座標 x_i^1 を起点とし、反時計周りに $\alpha = 1 \sim 4$ とした座標とする。また、後述の u_i^a も同様とする。移流フェイズで求める $\bar{u}_i(x_j^1)$ 、 $\bar{u}_{i,k}(x_j^1)$ の計算について以下に示す。

まず、移流フェイズにおいて対象とする要素上の既知量 $u_i^n(x_j^a)$ 、 $u_{i,k}^n(x_j^a)$ は式(19)を用いて正規直交系へ座標変換し、次式より $u_i^n(\eta_j^a)$ 、 $u_{i,k}^n(\eta_j^a)$ を得る。

$$u_i^n(\eta_j^a) = u_i^n(x_j^a) \quad (20)$$

$$u_{i,k}^n(\eta_j^a) = \frac{\partial u_i^n(x_j^a)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \quad (21)$$

ここで、正規直交系上で得た $u_i^n(\eta_j^a)$ 、 $u_{i,k}^n(\eta_j^a)$ を $u_i^{n\alpha}$ 、 $u_{i,k}^{n\alpha}$ とすると、 $u_i^{n\alpha}$ 、 $u_{i,k}^{n\alpha}$ から求める移流方程式の近似解 $\bar{u}_i(\eta_j^1)$ 、 $\bar{u}_{i,k}(\eta_j^1)$ が次の3次スプライン関数より構成される。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\eta_j^1) = & \{(A_1 \xi_1 + C_1 \xi_2 + E_1) \xi_1 + G_1 \xi_2 \\ & + u_{i,1}^{n1}\} \xi_1 + \{(B_1 \xi_2 + D_1 \xi_1 + F_1) \xi_2 \\ & + u_{i,2}^{n1}\} \xi_2 + u_i^{n1} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,1}(\eta_j^1) = & (3A_1 \xi_1 + 2C_1 \xi_2 + 2E_1) \xi_1 \\ & + D_1 \xi_2^2 + G_1 \xi_2 + u_{i,1}^{n1} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,2}(\eta_j^1) = & (3B_1 \xi_2 + 2D_1 \xi_1 + 2F_1) \xi_2 \\ & + C_1 \xi_1^2 + G_1 \xi_1 + u_{i,2}^{n1} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 ξ_i は $\xi_i = -\Delta t u_i(\eta_j^1)$ である。なお、 $u_i(\eta_j^1)$ は η_i の時間変化として式(19)より求める。また、上記の $A_1 \sim G_1$ は、節点間の連続性、すなわち η_i^1 と他の η_i^a 間における u_i 、 $u_{i,k}$ の連続性を条件として定められた $u_i^{n\alpha}$ 、 $u_{i,k}^{n\alpha}$ に依存する係数であり、それぞれ、以下のように求められる。

$$A_1 = 2(u_i^{n1} - u_i^{n2}) + (u_{i,1}^{n2} + u_{i,1}^{n1}) \quad (25)$$

$$E_1 = 3(u_i^{n2} - u_i^{n1}) - (u_{i,1}^{n2} + 2u_{i,1}^{n1}) \quad (26)$$

$$B_1 = 2(u_i^{n1} - u_i^{n4}) + (u_{i,2}^{n4} + u_{i,2}^{n1}) \quad (27)$$

$$F_1 = 3(u_i^{n4} - u_i^{n1}) - (u_{i,2}^{n4} + 2u_{i,2}^{n1}) \quad (28)$$

$$C_1 = u_i^{n1} - u_i^{n2} + u_i^{n3} - u_i^{n4} - (u_{i,1}^{n4} - u_{i,1}^{n1}) \quad (29)$$

$$D_1 = u_i^{n1} - u_i^{n2} + u_i^{n3} - u_i^{n4} - (u_{i,2}^{n2} - u_{i,2}^{n1}) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} G_1 = & -u_i^{n1} + u_i^{n2} - u_i^{n3} + u_i^{n4} \\ & + (u_{i,2}^{n2} - u_{i,2}^{n1}) + (u_{i,1}^{n4} - u_{i,1}^{n1}) \end{aligned} \quad (31)$$

なお, 上記のようにして得られた $\bar{u}_i(\eta_j^1)$, $\bar{u}_{i,k}(\eta_j^1)$ は式(18)を用いて x_i 座標系に座標変換し, 次式より $\bar{u}_i(x_j^1)$, $\bar{u}_{i,k}(x_j^1)$ を得る.

$$\bar{u}_i(x_j^1) = \bar{u}_i(\eta_j^1) \quad (32)$$

$$\bar{u}_{i,k}(x_j^1) = \frac{\partial \bar{u}_i(\eta_j^1)}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \quad (33)$$

このようにして, 各節点毎でこれらの計算を行い, 移流フェイズの解とする $\bar{u}_i(x_j)$, $\bar{u}_{i,k}(x_j)$ を得る.

3.4 非移流フェイズの計算 非移流フェイズの式(15), (16)の計算についてはGalerkin型の有限要素法を適用し, 非移流フェイズの計算を行う. 非移流フェイズの解とする $\bar{u}_i(x_j)$, $\bar{u}_{i,k}(x_j)$ を得るために必要な定式化を以下に示す.

式(15), (16)に重み関数 σ^* , ψ^* を乗じた上で, 解析領域 Ω に関する領域積分を行い, u_i , $u_{i,k}$ に関する次の重み付き残差方程式を導く.

$$\int_{\Omega} \left(\dot{u}_i'' - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \right) \sigma^* d\Omega = 0 \quad (34)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ (\dot{u}_{i,k}'') + u_{j,k}^n u_{i,j}^n - \frac{1}{Re} (u_{i,k}^n)_{,jj} \right\} \psi^* d\Omega = 0 \quad (35)$$

さらに, 上記の2式について, 発散定理を適用すると, 次の弱形式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{u}_i'' \sigma^* d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} u_{i,j}^n \sigma^* n_j d\Gamma \\ + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} u_{i,j}^n \sigma_{,j}^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{u}_{i,k}'') \psi^* d\Omega + \int_{\Omega} u_{j,k}^n u_{i,j}^n \psi^* d\Omega \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} (u_{i,k}^n)_{,j} \psi^* n_j d\Gamma \\ + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} (u_{i,k}^n)_{,jj} \psi_j^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

ここで, 本論では, $\dot{u}_i$, $\dot{u}_{i,k}$ の時間変数項を式(17)の考慮のもとで陽的なEulerの時間積分より表現し, 式(37)第2,3項に式(36)を代入する. さらに, 双1次要素 ϕ_{α} を用いて要素内の物理量と重み関数の空間に関する補間近似を行い, 次のような有限要素方程式を導く.

$$M_{\alpha\beta}(\bar{u}_i)_{\beta} = M_{\alpha\beta}(\bar{u}_i)_{\beta} - N_{\alpha\beta}^1(\bar{u}_i)_{\beta} \Delta t \quad (38)$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(\bar{u}_{i,k})_{\beta} &= M_{\alpha\beta}(\bar{u}_{i,k})_{\beta} \\ &\quad - N_{\alpha\beta\gamma}^2(\bar{u}_i)_{\beta}(\bar{u}_j)_{\gamma} \Delta t \\ &\quad + N_{\alpha\beta}^3\{(\bar{u}_i)_{\beta} - (\bar{u}_i)_{\beta}\} \end{aligned} \quad (39)$$

なお, $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}^1$, $N_{\alpha\beta\gamma}^2$, $N_{\alpha\beta}^3$ は次式で与えられる.

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} d\Omega \quad (40)$$

$$N_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,j} d\Omega \quad (41)$$

$$N_{\alpha\beta\gamma}^2 = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,k} \Phi_{\gamma,j} d\Omega \quad (42)$$

$$N_{\alpha\beta}^3 = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,k} d\Omega \quad (43)$$

ここで, 境界条件を考慮しつつ, 有限要素方程式(38),(39)から全体系の連立1次方程式を構成し, これを解くことで非移流フェイズの解 $\bar{u}_i(x_i)$, $\bar{u}_{i,k}(x_j)$ が求められる.

なお, $\bar{u}_{i,k}(x_j)$ は次の時間stepの既知量として用いるため $u_{i,k}^{n+1}(x_j)$ と改める. なお, 数値計算する際, 質量行列 $M_{\alpha\beta}$ には集中質量行列を用いる.

3.5 修正速度ポテンシャルの計算 修正速度ポテンシャル ϕ に関するPoisson方程式(11)に対してはGalerkin型の有限要素法を適用し, ϕ を求める.

式(11)に重み関数 ϕ^* を乗じた上で解析領域 Ω に関する領域積分を行い, ϕ に関する次の重み付き残差方程式を導く.

$$\int_{\Omega} (\phi_{,ii} + \bar{u}_{i,i}) \phi^* d\Omega = 0 \quad (44)$$

さらに, 発散定理を適用し, 次の弱形式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \phi_{,i} \phi^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{,i} \phi_{,i}^* d\Omega \\ + \int_{\Omega} \bar{u}_{i,i} \phi^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

ここで, 要素内の物理量と重み関数を双1次要素 ϕ_{α} を用いて補間近似を行い, 次に示すような有限要素方程式を導く.

$$S_{\alpha\beta} \phi_{\beta} = L_{\alpha\beta}(\bar{u}_i)_{\beta} \quad (46)$$

なお, $S_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}$ は次式で与えられる.

$$S_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,i} d\Omega \quad (47)$$

$$L_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,i} d\Omega \quad (48)$$

ここで, 境界条件を考慮しつつ, 有限要素方程式(46)より全体系の連立1次方程式を構成し, これを解くことで, 求める修正速度ポテンシャル ϕ を得る. なお, 行列計算には反復法を用いる.

3.6 計算手順 これまで示してきた定式化について計算手順に沿って改めてまとめると次のようになる.

- [1] CIP-FEMの移流フェイズの計算を行う。すなわち、 $u_i^n(x_j)$, $u_{i,k}^n(x_j)$ を正規直交系上に座標変換し、式(22)~(31)により与えられる移流方程式の近似解から、 $\bar{u}_i(\eta_j)$, $\bar{u}_{i,k}(\eta_j)$ を得る。さらに、これらを x_i 座標系に座標変換し、 $\bar{u}_i(x_j)$, $\bar{u}_{i,k}(x_j)$ を得る。
- [2] CIP-FEMの非移流フェイズの計算を行う。式(38), (39)から全体系の連立1次方程式を構成し、 $\bar{u}_i(x_j)$, $u_{i,k}^{n+1}(x_j)$ を得る。
- [3] 修正速度ポテンシャル ϕ に関するPoisson方程式の計算を行う。式(46)より全体系の連立1次方程式を構成し、反復解法より、これを解き、 ϕ を得る。
- [4] 式(11)に対してGalerkin法を適用し、[3]の ϕ から $u_i^{n+1}(x_j)$ を得る。

上記の[1]~[4]を逐次、繰り返し、 u_i , $u_{i,k}$ に関する時間進行を行う。

4. 計算例

これまで示してきた定式化の妥当性を確認するため、数値計算例を示す。

有限要素方程式に対する数値積分として式(38),(39)に対してはGaussの1点積分公式を適用し、式(46)に対してはGaussの4点積分公式を適用する。また、修正速度ポテンシャル ϕ に関するPoisson方程式を数値的に解く際の反復解法にはCG法を用いる。このとき、収束判定値は平均2乗残差 ε に対し $\varepsilon = 10^{-5}$ とする。

Fig.1 Analysis model

Boundary condition

- a : $u_1 = 1.0$, $u_2 = 0.0$, $u_{i,k} = 0.0$, $\phi_{,n} = 0.0$
- b : $u_i = 0.0$, $u_{i,k} = 0.0$, $\phi_{,n} = 0.0$
- c : $u_i = 0.0$, $u_{i,k} = 0.0$, $\phi = 0.0$

Initial condition

$$u_i^0 = 0.0, u_{i,k}^0 = 0.0, \phi^0 = 0.0$$

例題として、典型的なベンチマーク問題である正方キャビティ内流れ問題を取り上げる^{13,14)}。計算モデルと初期条件、境界条件をFig.1に示す。このとき、正方キャビティの1辺を代表長さとし、正方キャビティの内部領域を解析領域 Ω 、その境界を境界 Γ とする。

初期条件は領域 Ω 全域に $u_i^0 = 0.0$, $u_{i,k}^0 = 0.0$, $\phi^0 = 0.0$ を与える。

境界条件は境界 Γ のうち上辺部には代表速度 $u_1 = 1.0$ を与え、他の辺には $u_i = 0.0$ を与える。さらに、境界 Γ 上のすべてで $u_{i,k} = 0.0$ とする。また、 ϕ のPoisson方程式に対する適当な境界条件として下辺中央を $\phi = 0.0$ とし、他の境界上には $\phi_{,n} = 0.0$ を与える。なお、領域 Ω の流れ場に対して大きな影響を与える上辺の両端点部の境界条件には $u_1 = 1.0$, $u_2 = 0.0$ を与えた。

領域 Ω の分割についてはFig.2のような境界近傍で細かく分割するよう配慮した不等分割メッシュを用いる。このとき、節点数は2601、分割数は2500とし、最小メッシュ幅は 2.0136×10^{-3} とした。また、時間増分には $\Delta t = 1/600$ を与えた。

得られた数値計算結果として時間と共に変化する流速 u_i と圧力 p の様子を $Re = 10^3$ と $Re = 10^4$ の場合についてそれぞれFig.3,4に示す。

また、Fig.5,6では正方キャビティ内の垂直、水平の各中心軸上の流速 u_i の数値解がほぼ定常に達した際の値をもとに、本手法による計算結果とGhiaら¹⁴⁾による計算結果の両者の比較について示す。また、このときの本手法による数値解の一部について具体的な数値をTable.1,2に示す。

計算結果では上辺部の両端点の境界条件を $u_1 = 1.0$, $u_2 = 0.0$ とした影響から、 $Re = 10^4$ では数値解の一部において比較的低い値を示す。しかし、全体的には本解法による計算結果とGhiaらの計算結果は良く一致しており、本解法による数値解の高い計算精度が確かめられた。

Fig.2 Element mesh

Fig.3 Flow in square cavity at $Re = 10^3$ Fig.4 Flow in square cavity at $Re = 10^4$

Fig.5 Velocity profile for the center of cavity at $Re = 10^3$ Fig.6 Velocity profile for the center of cavity at $Re = 10^4$ Table 1 Result for u_2 along vertical line though the center of cavity

x_1	$Re = 10^3$	$Re = 10^4$
0.0000	0.0000	0.0000
0.0834	0.3104	0.4246
0.1002	0.3331	0.4161
0.1179	0.3516	0.3976
0.1563	0.3705	0.3560
0.2224	0.3350	0.2891
0.5000	0.0263	0.0123
0.8437	-0.3831	-0.3489
0.8821	-0.4785	-0.3963
0.9166	-0.5171	-0.4244
0.9324	-0.4756	-0.4285
0.9617	-0.2837	-0.5150
1.0000	0.0000	0.0000

Table 2 Result for u_1 along vertical line though the center of cavity

x_2	$Re = 10^3$	$Re = 10^4$
0.0000	0.0000	0.0000
0.0383	-0.1307	-0.3158
0.0834	-0.2493	-0.4137
0.1179	-0.3272	-0.3802
0.1772	-0.3826	-0.3290
0.3029	-0.2568	-0.2166
0.5000	-0.0619	-0.0302
0.6997	0.1462	0.1678
0.8634	0.3464	0.3624
0.9474	0.4457	0.4631
0.9752	0.6458	0.4388
0.9879	0.8197	0.4979
1.0000	1.0000	1.0000

5. おわりに

2次元非定常非圧縮粘性流れ問題の基礎方程式に時間進行法にFractional Step法を導入した上で、CIP-有限要素法を適用し、数値解析に必要な定式化について示してきた。例題として正方キャビティ内流れ問題をとり上げ、その数値計算例を示した。また、他の文献の計算結果との比較を行い、本手法による計算結果の妥当性を示した。これらの結果から本手法の2次元非定常非圧縮粘性流れ問題への適用性と有効性を確認した。

さらに、本手法の場合、上流化に伴う数値計算上のパラ

メータを用いておらず、解析領域の分割による計算精度への影響を十分に配慮すれば複雑な形状を有した解析対象に対して確度の高い結果を得ることが期待できる。

参考文献

- 1) 登坂宜好, 大西和榮: 偏微分方程式の数値シミュレーション, 東大出版会, 1991
- 2) 棚橋隆彦: 計算流体力学, アイピーシー, 1994
- 3) 登坂宜好: 高レイノルズ数粘性流れ問題の有限要素スキーム, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 18, 1994
- 4) T.Yabe and Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, Computer Physics Communications Vol.66, 1991, 233-242
- 5) T.Yabe and Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two-dimensional solver, Computer Physics Communications Vol.66, 1991, 219-232
- 6) T.Yabe and P.Wang: Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, Journal of Physical Society of Japan, 60, 1991, 2105-2108
- 7) 矢部孝, 青木尊之: 固体, 液体, 気体の統一解法を目指すCIP法, 計算工学, 1996, Vol.1, No.1, 19-25
- 8) 矢部孝: 大きな密度差を持つ圧縮・非圧縮流体の統一解法CIP, 第8回計算力学講演会講演論文集, 1995, 497-498
- 9) 青木尊之: 非構造格子CIP法, CIPUS Annual Report(CIPUS-A95), 1996
- 10) 井出康之, 登坂宜好: CIP-有限要素法による2次元移流拡散方程式の近似解析, 日本機械学会論文集, 62-597B, 1996, 1679-1684
- 11) J.Donea, S.Giuliani, and H.Laval: Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 30, 1982, 53-73
- 12) 数値流体力学編集委員会: 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 1995
- 13) 角田和彦, 登坂宜好: 非定常非圧縮粘性流れ問題の指数関数型Petrov-Galerkin有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 1992, 189-198
- 14) U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, Journal of Computational Physics, 48, 1982, 387-411