アクチュエータディスク法による超音速翼列流れの安定解析*

岩本幸治^{*1}, 横田和彦^{*2}, 辻本良信^{*2}Stability Analysis of Supersonic Cascade Flow
by Actuator Disk Methods

Yukiharu IWAMOTO, Kazuhiko YOKOTA and Yoshinobu TSUJIMOTO

This paper presents the results of a two-dimensional stability analysis on supersonic flow relative to a cascade, using actuator disk methods. The results show the possibility of existence of two types of destabilizing mode in the supersonic cascade flow. One mode corresponds to conventional rotating stall in subsonic cascade flows. This mode can be unstable both in subsonic and supersonic regions, and its propagation velocity ratio is smaller than unity. The other mode is a newly found mode unique to supersonic cascade flows. This mode can become unstable only in the supersonic region, and its propagation velocity ratio is in most cases larger than unity. Both modes become unstable due to the positive slope of the characteristic curves produced by flow compressibility as in the case of, for example, a shock wave.

Key Words: Compressor, Stability, Supersonic Flow, Cascade, Actuator Disk Method, Shock Wave

1. 緒 言

近年ガスタービン(やジェットエンジン)の回転数は、高速化の傾向にある。この理由は、周速が大きいとコンプレッサ一段当たりの圧力比を大きくとることにより、全段数を減らすことができ、ガスタービンの低コスト化とメンテナンス性の向上に直接結びつくからである。

このガスタービンの高速化に伴い、ファンや第一段コンプレッサのチップ近傍では翼列に対する相対流入速度が超音速であることが当然のこととなっている。超音速コンプレッサの場合、サージとチョークにより正常運転可能な流量域は極端に小さくなることが知られている。このような領域で作動させるためには、設計点近傍における挙動はもちろんであるが、設計領域外においてどのようなことが発生しうるのかを把握しておくことは、安全設計を行ううえで、さらには作動域を広げる研究を行ううえで非常に重要である。この種の研究としては不始動フラッタに関する研究⁽¹⁾⁽²⁾が

よく知られている。

また、Freeman ら⁽³⁾は、一次元運動量モデルを用いた解析的手法によって超音速翼列定常性能を調べ、超音速コンプレッサの性能曲線に「右上がり領域」が存在し、右上がり領域は流れの圧縮性により拡大されることを示した。ところで、非圧縮翼列流れにおいて、性能曲線の右上がりこう配はサージや旋回失速といった流体力学的不安定を生じることが知られている。したがって Freeman ら⁽³⁾の結果は、超音速翼列においても非圧縮流と同様に流体力学的不安定が存在する可能性を示している。さらには超音速流れ特有の流体力学的不安定が存在する可能性も示唆しているものと考えられる。ところが、そのような流体力学的不安定に関する研究はほとんど見られない。そこで本研究では、衝撃波を伴う超音速翼列流れに対し、アクチュエータディスク法を用いて安定解析を行う。特に、衝撃波に関連した超音速翼列特有の流体力学的不安定の可能性に着目して検討を行う。

2. 記 号

a : 音速

i : 虚数単位

k : y 方向波数

* 1996年3月21日 関西支部第71期定時総会において講演、原稿受付 1996年6月20日。

^{*1} 准員, 大阪大学大学院 (〒560 豊中市待兼町1-3)。

^{*2} 正員, 大阪大学基礎工学部。

M : マッハ数 p : 静圧 t : 時間 u : x 方向速度 v : y 方向速度 x, y : 座標 κ : 比熱比 λ : x 方向波数 ρ : 密度 χ : 翼列の食違い角 ω : 複素角振動数

添 字

 abs : 絶対系 D : 翼列下流 L : 衝撃波直前 rel : 相対系 t : よどみ点状態 U : 翼列上流 $\sim$: 微小じょう乱変動成分 $'$: 微小じょう乱変動成分の振幅

3. 理 論

3・1 翼列モデル 超音速翼列の不始動状態では、翼前縁上流に離脱衝撃波が発生している。この様子を、翼を平板で近似して模式図的に描くと、図1(a)のようになる。本研究で用いるアクチュエータディスク法では、その衝撃波の発生している翼列を無限小厚みのアクチュエータディスクモデルで表し、図1(b)に示したように翼列上流・下流の流れを解析する。アクチュエータディスクは翼列上流・下流の流れを結びつけ、これらに対する境界条件を与えるものであるが、本研究では翼列内の流れに対して流体力学的条件を適用して得られる2種類のアクチュエータディスクモデルを用いて検討を行う。

3・2 定常成分 まず、流れの定常成分の境界条件を定める。翼列上流と下流において、連続の式、

Fig. 1 Cascade and actuator disk (Relative)

$$\rho_U u_U = \rho_D u_D \quad \dots\dots\dots (1)$$

全エンタルピー保存式、

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_U}{\rho_U} + \frac{1}{2} (u_U^2 + v_U^2) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_D}{\rho_D} + \frac{1}{2} (u_D^2 + v_D^2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

Kutta の条件、

$$u_D \sin \chi - v_D \cos \chi = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が一般的に成立する。

圧縮性流れの場合さらにもう一つ条件が必要となる。よく用いられているのは、実験により得られた全圧損失係数を用いる手法である。しかし不始動状態までカバーした実験データの入手が困難であることから、第1のモデル(モデルI)として Freeman ら⁽³⁾によって提案された、翼弦方向の運動量保存の条件、

$$\begin{aligned} p_U \cos \chi + \rho_U u_U (u_U \cos \chi + v_U \sin \chi) \\ = p_D \cos \chi + \rho_D u_D (u_D \cos \chi + v_D \sin \chi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を用いる。

このモデルで用いた境界条件を満たす翼列下流のマッハ数は二つ存在する。これらは、衝撃波を伴う解と伴わない解であり、低いマッハ数の解を選択することによって、衝撃波を伴う場合の超音速翼列下流の流れを求めることができる。Freeman ら⁽³⁾は、このモデルは超音速翼列の定常性能のよい予測を与える、と述べている。

この境界条件を用いると、解析結果には損失が陰的に含まれることになる。例えば、非圧縮の極限をとてみると、全圧損失は $\Delta p_{\text{loss}} = \rho(v_U - v_D)^2/2$ となる。この損失は衝突損失と呼ばれている。

本研究では、特に衝撃波(損失)に関連した流体力学的不安定に着目して解析を進めるために、第2のモデル(モデルII)として、衝撃波損失のほかは損失を含まないような条件、すなわち等エントロピー流入後、翼間に垂直衝撃波が発生する場合の条件式、

$$p_U \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_U^2\right)^{\kappa/(\kappa-1)} = p_L \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_L^2\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{p_D}{p_L} = \frac{2\kappa}{\kappa-1} M_L^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad \dots\dots\dots (6)$$

を式(4)の代わりに用いたモデルも検討する(式(6)は Rankine-Hugoniot の関係式である)。ただし、 p_L 、 M_L は流れ方向が等エントロピー的に翼面方向に変化した状態での圧力、マッハ数である。ここで式(1)～(3)、(5)、(6)を連立させると、 M_L に対しては超音速、亜音速2種類の解が求められる。本解析では M_L は(翼間に発生する)衝撃波上流のマッハ数を仮定

しているので、 M_L は超音速となるほう ($M_L > 1$) を採用している。

以後、式(4)の翼弦方向の運動量保存の条件を用いる場合をモデルⅠ、式(5)、(6)の等エントロピー流入後、翼間に垂直衝撃波が発生する条件を用いる場合をモデルⅡと呼ぶことにする。

3・3 非定常成分 非定常成分については、微小じょう乱を仮定すれば、翼の上下流で二次元微小じょう乱 Euler 方程式を満たす。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad \cdots (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad \cdots (8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad \cdots (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) - \frac{\kappa}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = 0 \quad \cdots (10)$$

そして、微小じょう乱の形を複素角振動数 ω を用いて $\exp[i(\omega t - ky) + \lambda x]$ $\cdots (11)$

のように仮定する。例えば、密度 ρ の微小じょう乱は $\bar{\rho} = \rho' \exp[i(\omega t - ky) + \lambda x]$ (ρ' は振幅) である。式(11)において、実部に re, 虚部に im の添字を付けると、式(11)は次のように詳しく書き直される。

$$\exp[-\omega_{im}t + \lambda_{re}x] \exp[i(\omega_{re}t - ky + \lambda_{im}x)] \quad \cdots (12)$$

翼列をロータのモデルとすると、 y (翼列軸) 方向には周期性がある (減衰・発散しない) ため、 y 方向波数 k は実数とおくことができ、式(12)の1番めの $\exp$ 関数には k が現れない。式(12)における2番めの $\exp$ 関数は、流れ場全体が角振動数 ω_{re} で振動し、その振動が x, y 方向に伝ばすることを意味する。1番めの $\exp$ はその振動の振幅が時間的には ω_{im} の割合で減衰、空間的には λ_{re} の割合で x 方向に変化することを意味する。

式(11)の形のじょう乱を式(7)~(10)に代入すると、微小振幅に対する同次の連立一次方程式が得られる。この連立方程式に非自明解が存在するとすると、係数行列式が零となる条件から λ の四次方程式が得られる。それを λ について解くと、

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{u^2} [iu(\omega - kv) \pm a\sqrt{(a^2 - u^2)k^2 - (\omega - kv)^2}] \quad \cdots (13)$$

$$\lambda_3 = -\frac{i}{u}(\omega - kv) \quad (\text{重根}) \quad \cdots (14)$$

が得られる。

λ_3 に対しては圧力変動が零となり、これは渦・エン

Fig. 2 Relationship between circle wave surface and travelling single disturbance source

トロピーの波を表す。 $\lambda_{1,2}$ は圧力変動を伴う波を表す。式(13)の根号内は一般に複素数であるから $\lambda_{1,2}$ の値は二つあるが、これら二つの値はそれぞれが上・下流に伝ばする波を表している。じょう乱の発生源は翼列であるから、翼列上流では上流に伝ばする波、下流では下流に伝ばする波を表す値を $\lambda_{1,2}$ の二つの値から選ぶ必要がある。

まず、減衰率 ω_{im} が零の場合を考える。単一のじょう乱発生源に着目すると、この発生源から発生するじょう乱は主流に流されながら音速 a で円形波面を形成して広がる。一方、発生源自身は移動速度 ω_{re}/k でアクチュエータディスク (y 軸) 上を移動する。この様子を図2に示す。流れ場全体の変動は、アクチュエータディスク上に分布するすべてのじょう乱発生源による円形波面の重ね合わせで表される。図2に示されるように軸流亜音速の場合、形成される円形波面は y 軸と交点 R_1, R_2 をもつが、その交点と移動した発生源が一致する場合は Resonance⁽⁴⁾ と呼ばれる。そのときの周波数は式(13)の根号内が零になるような ω_{re} で表される。また、移動した発生源が円形波面内にとどまる場合は Sub-resonance, 円形波面外に到達する場合は Super-resonance と呼ばれる。流れ場の形態は Resonance 周波数を境に異なるので、それぞれの場合に対して適切な $\lambda_{1,2}$ の選択をしなければならない。Super resonance の場合は、図2に示されるようにじょう乱発生源を頂点とするマッハくさびが形成される。 $\omega_{im}=0$ の場合 $\lambda_{1,2}$ は二つの純虚数となり、虚部を $\text{Im}[\quad]$ で表せばこのマッハくさびの包絡線の傾きは $\text{Im}[\lambda_{1,2}/k]$ の二つの値、すなわち等位相面の傾きと等しい⁽⁵⁾。二つの包絡線のうち一方は上流の流れ場を通り、もう一方は下流の流れ場を通る。じょう乱の発生源は翼列であるから、上流には前者の波、下流には後者の波が存在するように $\lambda_{1,2}$ の選択をしなければならない。具体的には二つの等位相面の傾き $\text{Im}[\lambda_{1,2}/k]$ の

Table 1 Selection of $\lambda_{1,2}$

	Amplifying ($\omega_{im} < 0$)	Neutrally stable ($\omega_{im} = 0$)	Attenuating ($\omega_{im} > 0$)
Super-resonance			
Sub-resonance			

Note: Vertical arrows mean time-amplifying or attenuating state.

Horizontal arrows mean the extending direction of the isophase surface.

大小を判別することにより、 $\lambda_{1,2}$ のうち適切なほうを選択している。Sub-resonanceの場合は、Super-resonanceの場合と違ってマッハくさびが形成されないが、 $\lambda_{1,2}$ の実部は一方が正、もう一方が負になる。変動が無限上・下流で有限になるようにするほうが物理的に妥当であるため、翼列上流には実部が正、下流には実部が負のものを $\lambda_{1,2}$ の二つから選択する。

減衰率 ω_{im} が零でない場合においても、 ω_{re}/k を用いて Sub-resonance, Super-resonance の場合分けを行い、前述の $\omega_{im}=0$ の場合と同様の考察に基づいて $\lambda_{1,2}$ を選択する。ただし、 $\omega_{im} \neq 0$ で Super-resonance の場合は $\lambda_{1,2}$ の二つの値で表される等位相面のなす角はマッハくさびの頂角よりも小さくなるが、各等位相面の存在する領域はそれぞれ翼列上流と下流になるので等位相面の傾きから $\omega_{im}=0$ の場合と同様に $\lambda_{1,2}$ を選択する。また、このような選択に従うと $\omega_{im} \rightarrow 0$ としたときの極限值が $\omega_{im}=0$ の場合と一致する。

以上のように $\lambda_{1,2}$ の選択を行うと、翼列上・下流における選択した $\lambda_{1,2}$ の x 方向に対する振幅の増減の関係は表1のようになる。物理的には、表1は Sub-resonance の場合は、 y 軸上に分布するすべてのじょう乱発生点から来るじょう乱が互いに干渉し合うために無限上・下流における $\lambda_{1,2}$ の振幅は減少することを意味し、Super-resonance の場合は無限上・下流においても異なる発生点から来るじょう乱の干渉がなく無限上・下流では過去に翼列から発生したじょう乱の振幅がそのままの状態で伝わることを意味する。ただし、以上のように $\lambda_{1,2}$ の選択を行うと、 $\omega_{im} > 0$ で表されるじょう乱が時間的に減衰する、つまり安定側の領域では、Resonance 周波数において $\lambda_{1,2}$ の値が入れ替わり、不連続が生じる。ここでは以上の $\lambda_{1,2}$ に対する選択方法に基づいて上流の流れを表す解を λ_1 、下流の流れを表す解を λ_2 とおく。

本解析では、上流は渦なし流れ、下流は渦・エント

ロピー変動がある流れとする。したがって、翼列上流には λ_{1U} 、下流には λ_{2D} 、 λ_{3D} に対応する変動の線形和が存在することになる。密度変動に対して例をとると $\bar{\rho}_U = \bar{\rho}_{1U}$ 、 $\bar{\rho}_D = \bar{\rho}_{2D} + \bar{\rho}_{3D}$ である。各 λ に対応する変動成分 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{p}$ の大きさは固有値 λ に対応する固有ベクトルとしてその連成比が式(7)～(10)より決まる。そこで $\bar{\rho}$ 、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{p}$ のうち一つを基準にすれば他の三つは選んだ基準量で表すことができる。本解析では上流は $\bar{v}_{1U}$ 、下流は λ_{2D} に対しては $\bar{v}_{2D}$ 、 λ_{3D} のうち渦の波に対しては $\bar{v}_{3D}$ 、エントロピー変動に対しては $\bar{p}_{3D}$ を基準にして表すことにする。つまり、変動の未知数は四つであるから、次に挙げる四つの境界条件式で微小じょう乱の方程式系は閉じることになる。

翼列前後の流れを結びつける接続条件としては、準定常を仮定し、定常成分と非定常成分の和が定常成分と同様の条件[式(1)～(4)]あるいは[式(1)～(3)、(5)、(6)]を満たすものとする。そして、定常成分を差引くことにより、非定常成分に関する境界条件が得られる。

微小じょう乱の連続の式は、式(1)より

$$(\bar{\rho}_U u_U + \rho_U \bar{u}_U) - (\bar{\rho}_D u_D + \rho_D \bar{u}_D) = 0 \quad (15)$$

であり、微小じょう乱の全エントロピー保存式は、式(2)より

$$\left[\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_U}{\rho_U} \left(\frac{\bar{p}_U}{p_U} - \frac{\bar{\rho}_U}{\rho_U} \right) + u_U \bar{u}_U + v_U \bar{v}_U \right] - \left[\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_D}{\rho_D} \left(\frac{\bar{p}_D}{p_D} - \frac{\bar{\rho}_D}{\rho_D} \right) + u_D \bar{u}_D + v_D \bar{v}_D \right] = 0 \quad (16)$$

であり、また微小じょう乱に関する Kutta の条件は、式(3)より

$$\bar{u}_D \cos \chi - \bar{v}_D \sin \chi = 0 \quad (17)$$

となる。

そして、モデル I では、翼弦方向の運動量保存の条件、式(4)の微小じょう乱成分、

$$\begin{aligned} & [\bar{p}_v + (\bar{\rho}_v u_v + \rho_v \bar{u}_v)(u_v + v_v \tan \chi) \\ & + \rho_v u_v(\bar{u}_v + \bar{v}_v \tan \chi) \\ & - [\bar{p}_D + (\bar{\rho}_D u_D + \rho_D \bar{u}_D)(u_D + v_D \tan \chi) \\ & + \rho_D u_D(\bar{u}_D + \bar{v}_D \tan \chi)] = 0 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

を用い、またモデル II では、等エントロピー流入後、翼間に垂直衝撃波が発生するという条件式(5)、(6)の微小じょう乱成分、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{u_v^2 + v_v^2}{\rho_v} \bar{\rho}_v + u_v \bar{u}_v + v_v \bar{v}_v + \frac{1 - \frac{1}{2} M_b^2}{\rho_v} \bar{p}_v \\ & - \frac{1 - \frac{\kappa - 1}{2} M_b^2}{\kappa M_b^2 - \frac{\kappa - 1}{2}} \left[(2M_b^2 - 1) \left(\frac{1}{2} \frac{a_D^2}{\rho_D} \bar{\rho}_D \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u_D \bar{u}_D + v_D \bar{v}_D}{M_b^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_D} \bar{p}_D \right] = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

を用いる。

以上に述べた境界条件 [式(15)～(18)] あるいは [式(15)～(17), (19)] 中の微小じょう乱変動成分 $\bar{\rho}_v, \bar{\rho}_D$ 等を前述のように $\bar{v}_{1v}, \bar{v}_{2D}, \bar{v}_{3D}, \bar{\rho}_{3D}$ を基準にして表すと、微小じょう乱変動振幅 $v'_{1v}, v'_{2D}, v'_{3D}, \rho'_{3D}$ に対する同次の連立一次方程式(20)がモデル I、II それぞれに対して得られる。

$$[M] \begin{bmatrix} v'_{1v} \\ v'_{2D} \\ v'_{3D} \\ \rho'_{3D} \end{bmatrix} = [0] \dots\dots\dots (20)$$

ここで $[M]$ は係数マトリックスである。微小じょう乱変動振幅が非自明解をもつものとする、連立方程式の係数マトリックス行列式が零でなければならない。

$$\det[M] = 0 \dots\dots\dots (21)$$

これにより ω/k に関する方程式が得られる。ここで前述のように ω を複素数、 k を正の実数として考えると ω/k の実部 ω_{re}/k は翼列から見た相対系における変動の移動速度を表す。本解析では予旋回のない動翼列を考えているので周速は v_v に等しい。そのため、絶対系における移動速度は $v_v - \omega_{re}/k$ となり、変動の伝ば速度比(変動の伝ば速度と翼列の移動速度の比)は $1 - \omega_{re}/(kv_v)$ で与えられる。また、 ω/k の虚部 ω_{im}/k は変動振幅の時間的減衰率を表す。つまり、 $\omega_{im}/k > 0$ の場合にはじょう乱は時間的に減衰し流れは安定、 $\omega_{im}/k < 0$ の場合にはじょう乱は時間的に増幅し不安定となる。このように $1 - \omega_{re}/(kv_v)$ によって伝ば速度比を求め、 ω_{im}/k の符号によって安定判断を行う。

求めるべき ω/k に関する方程式(21)には、 $\lambda_{1v}/k, \lambda_{2D}/k$ が含まれ、式(13)にあるようにそれらの中には

ω/k を含む平方根が入っている。そのため、実際の解析においては、方程式(21)に対して移項や両辺を二乗するなどの操作で平方根をなくし、その結果得られた十二次方程式に対して DKA 法⁽⁶⁾を用いて数値的に解を求めた。求められた 12 個の解 ω/k の中には両辺を二乗するなどの操作によって混入し、式(21)を満たさない解も含まれる。そこで、DKA 法で求められた解 12 個すべてを式(21)に代入し、式(21)を満たすものを求めるべき振動解とした。式(21)を満たす解 ω/k すべては、DKA 法で求められた解 12 個の中に確実に含まれている。よって、本解析手法によって求めるべき解 ω/k は過不足なく求められている。

4. 結果と考察

4.1 定常性能曲線 まず、定常性能計算を行った。ただし、 $\kappa = 1.4$ とし、 $\chi = 60.0^\circ$ の場合の計算例を示す。解析は相対座標で行ったが、その結果を予旋回のない動翼列の性能として表す。

Freeman ら⁽³⁾の結果では翼厚をもち(本解析では翼厚をもたない)、翼列の食違い角が本解析と異なる場合が示されている。Freeman らの場合と条件を一致させた場合、本計算による結果は Freeman らの場合と一致することを確認し、計算コードの信頼性を確かめた。

モデル I による定常性能マップを図 3 に示す。予旋回のない動翼列を考えているので周速は v_v に等しく、横軸は軸方向流速を周速で無次元化したもの、縦軸は下流静圧を上流の絶対系での全圧により無次元化したものである。また、破線は各性能曲線の頂点(右上がりとなりの境界)を結んだ線を表す。図 3 から、周速 v_v の増加とともに右上がり領域が拡大し、かつ右上がりこう配も増加していくことがわかる。

3.1 節で述べたように、モデル I には衝撃波損失だ

Fig. 3 Characteristic map of model I (Momentum conservation parallel to the blade)

Fig. 4 Characteristic map of mode II (Isentropic turn and normal shock in the cascade)

けでなく衝突損失が陰的に含まれているので、周速 v_U (流入マッハ数) が小さく衝撃波が発生しない非圧縮性流体と近似できるような領域においても性能曲線の右上がりこう配は存在する。衝撃波損失以外の損失を含まないモデルを考えるためにモデルIIの場合の定常性能マップを検討する。

モデルIIによる定常性能マップを図4に示す。図4の構成は図3と同様である。図4の場合は、モデルの性質上モデルIのような衝突損失はなく、損失は衝撃波損失のみである。よって、モデルIIでは衝撃波損失によって右上がり領域が発生していることになる。なお、流入が翼列に対して亜音速になるような領域 ($v_U/a_{tUabs} < 1$) においても図4は右上がりこう配を示す。これは翼間に発生する衝撃波を扱うために式(6)において衝撃波直前のマッハ数 M_L をつねに1より大きくするように選んでいるからである。すなわち v_U/a_{tUabs} が小さい場合にも翼入口部で超音速に加速され、衝撃波が発生することを仮定しているためである。実際には v_U/a_{tUabs} が十分小さければ $M_L < 1$ となり、衝撃波は発生せず性能曲線は右下がり特性が得られる。 v_U/a_{tUabs} が小さい場合に対して $M_L > 1$, $M_L < 1$ いずれのモデルが妥当であるかを論ずるためには、有限ピッチの解析により入口部の流れをより詳細に求める必要がある。

モデルI, II双方による定常性能マップによる考察から、流体の圧縮性や衝撃波は性能曲線に右上がりを発生、さらには拡大させることが判明した。そして、回転数の高速化に伴う正常作動流量域の減少は、流体の圧縮性や衝撃波の存在が一因となっている可能性がある。

4.2 非定常安定解析 アクチュエータディスク法による微小じょう乱解析の結果を変動の振幅比

Fig. 5 Solution A of model I

($v'_U, v'_D, v'_S, \rho'_S$ 等の複素振幅比)の連続性や解の連続性を利用し、以下に述べる考察によって分類した。その結果、モデルIでは8種類(これは、ある定常条件下で8種類が同時に得られたというわけではない)、モデルIIでは7種類の ω/k が求められた。それらの多くは、すべての流れ条件において安定または中立安定である。系の安定性に関係のあると考えられる解、すなわち流れ条件によって不安定となる解は、モデルIで2種類、モデルIIで1種類存在する。以下ではこれらの解について議論を行う。

図5にモデルIによって得られた解の一つ(解Aと呼ぶ)の定常性能マップ上の性質を示す。横軸、縦軸は定常性能マップと同じである。

太実線よりも左側のグレーと斜線で示された領域において解Aが存在する。そして、太破線より左側の斜線で示された領域において解Aは不安定となる[A(U)は解Aが不安定であることを、A(S)は解Aが安定であることを示す]。

図5から、解Aは比較的低流量域において存在すること、解Aが不安定となるときには性能曲線は右上がりとなっていることがわかる。高回転領域においては、不安定領域は右上がり領域より狭い。衝撃波が発生していない ($M_{Urel} < 1$) 領域、あるいは圧縮性の影響が小さい低回転 (v_U/a_{tUabs} が小) の領域においても、低流量領域の場合には不安定となる。

ここで、図6に $v_U/a_{tUabs} = 0.7$ の場合、図7に $v_U/a_{tUabs} = 1.3$ の場合の解Aの伝ば速度比 [propagation velocity ratio, $1 - \omega_{re}/(kv_U)$] と、減衰率 (attenuation rate, ω_{im}/k) を示す。横軸は軸流速を周速で無次元化したものである。図6, 7ではこの ω/k が不安定を表す場合については、伝ば速度比が1より

Fig. 6 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution A ($v_v/a_{wabs}=0.7$)

Fig. 7 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution A ($v_v/a_{wabs}=1.3$)

小さく、不安定から安定に変化する際の伝ば速度比は1よりも小さくなっている。図5に表されている定常領域において、より一般的に調べた結果でも解Aが不安定を表す場合については、伝ば速度比が1より小さくなっていることが確認された。一方、非圧縮性翼列流れに関するアクチュエータディスク解析によれば、はく離等により右上がり特性が生じると、伝ば速度比が1よりも小さい不安定解、すなわち旋回失速が発生することが知られている¹⁷⁾。これらのことから、解Aは圧縮性翼列流れにおける旋回失速であると考えられる。

次に、図8にモデルIによって得られたもう一つの解(解Bと呼ぶ)の定常性能マップ上での性質を示す。横軸、縦軸は定常性能マップと同じである。

上下の太実線により囲まれたグレーと斜線で示された領域において解Bは存在する。そして、太破線より上側の斜線で示された領域において、解Bは不安定となる[B(U)は解Bが不安定であることを、B(S)は解Bが安定であることを示す]。解Aと同様、解Bが不安定となるときには性能曲線は右上がりとなっていることがわかる。ところで、図5と図8を比較すると、解Aと解Bは同時に存在する領域があることが

Fig. 8 Solution B of model I

Fig. 9 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution B ($v_v/a_{wabs}=1.3$)

Fig. 10 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution B ($v_v/a_{wabs}=1.4$)

わかる。したがって、解Aが解Bに変化したとは考えられず、解Bは解Aとは別の種類の解として分類した。

解Bは、圧縮性の影響が強い高回転領域(v_v/a_{wabs} が大)において不安定となる。また、超音速流入でかつ incidence=0($u_v/v_v=\cot 60^\circ=0.577$)の場合には、衝撃波は垂直衝撃波となり、圧力上昇は翼列による転向ではなく衝撃波によって生じるが、この条件下でも

Fig. 11 Solution C by model II

解 B が存在する。したがって、解 B は衝撃波に関係した不安定であると考えられる。

ここで、図 9 に $v_U/a_{Uabs}=1.3$ の場合、図 10 に $v_U/a_{Uabs}=1.4$ の場合の解 B の伝ば速度比と減衰率を示す。横軸は図 6 と同様である。図 9, 10 から、解 B は低流量の場合を除いて伝ば速度比が 1 よりも大きい不安定を表すことがわかる。

前述のように、モデル I には衝突損失が含まれているため、解 B が衝撃波のみに関係しているかは判定できない。そこでモデル II に対してモデル I と同様の解析を行った。モデル II では不安定に関する解は一つだけであるが(解 C と呼ぶ)、その解の定常性能マップ上での性質を図 11 に示す。

太実線により囲まれたグレーと斜線で示された領域において解 C が存在する。そして、太破線よりも左側の斜線で示された領域において、解 C は不安定となる [C(U) は解 C が不安定であることを、C(S) は解 C が安定であることを示す]。モデル II には、垂直衝撃波による損失しか含まれないので、解 C は垂直衝撃波に関係した不安定であると考えられる。

ここで、図 12 に $v_U/a_{Uabs}=1.0$ の場合、図 13 に $v_U/a_{Uabs}=1.3$ の場合の解 C の伝ば速度比と減衰率を示す。図 12, 13 から解 C が不安定な場合にはその伝ば速度はつねに 1 より大きいことがわかる。これは図 9, 10 の高流量域における解 B の挙動と対応している。

ところで、超音速流入でかつ incidence=0 ($u_U/v_U = \cot 60^\circ = 0.577$) の場合には、モデル I とモデル II は一致し、衝撃波は垂直衝撃波となるが、その場合には、解 B と解 C も安定・不安定にかかわらず一致するこ

Fig. 12 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution C ($v_U/a_{Uabs}=1.0$) Fig. 13 Propagation velocity ratio and attenuation rate of solution C ($v_U/a_{Uabs}=1.3$)

とが確認された。図 9, 13 は同一翼列移動速度 ($v_U/a_{Uabs}=1.3$) の条件下の結果であるが、このときの incidence=0 の値は双方が一致しているのがわかる。また、この場合も性能曲線の右上がり不安定となるための必要条件となっていることが確認された。

以上のことから、解 B と解 C は同種の性質をもった不安定の異なるモデルによる表現であって、同一の不安定とみなしてよいことがわかる。したがって、解 B も衝撃波に関係した不安定である可能性が高い。

5. 結 言

本解析により、次のような結論が得られた。

(1) 流体の圧縮性や衝撃波によって、性能曲線に右上がりが発生したり、右上がり領域が拡大されたりする。

(2) 「翼弦方向の運動量保存」を用いたモデルにおいては、圧縮性翼列流れの場合でも、非圧縮性翼列流れでよく知られている旋回失速の延長となる現象が発生する。これは性能曲線において、不安定となる領域で右上がり、安定となる領域では主として右下がりとなり、不安定となる場合については伝ば速度比は 1 よりも小さい。

(3) 「翼弦方向の運動量保存」, 「等エントロピー流入後, 翼間に垂直衝撃波が発生」いずれのモデルにおいても, 衝撃波の影響によると考えられる不安定な振動が存在する。これらは, 性能曲線の「右上がり領域」において発生し, モデル I においては低流量部を除いて伝ば速度比が 1 よりも大きく, モデル II においては発生するすべての領域において伝ば速度比が 1 よりも大きい。

本研究において以上の結論が得られたが, これはその種の不安定が存在する可能性が示されたにすぎない。また, モデル I, II のいずれがより実動的であるかも現時点では不明である。本研究が着目した不始動状態の超音速翼列の流れを実験的に調べることは極め

て困難であるので, 今後は数値解析も併用して流れの特性を明らかにしていきたい。

文 献

- (1) 土井博史・梶昭次郎, 機論, **59**-561, B (1993), 1573-1579.
- (2) Kobayashi, H., *Trans. ASME, J. Turbo.*, **111** (1989), 222-230.
- (3) Freeman, C. and Cumpsty, N. A., *ASME Paper*, No. 89-GT-326 (1989).
- (4) 梶昭次郎・岡崎卓郎, 機論, **35** 273, 第 2 部 (1969), 1008-1020.
- (5) 梶昭次郎・岡崎卓郎, 機論, **38**-309, 第 2 部 (1972), 1023-1033.
- (6) 戸川隼人, 数値計算, (1991), 68-73, 岩波書店.
- (7) 辻本良信・上條謙二郎・吉田義樹, 機論, **58** 551, B (1992), 2052-2059.