磁場保持される磁性流体液柱の横振動特性*

大幅元吉^{*1}, 澤田達男^{*2}, 斎藤慎八郎^{*3}
須藤誠一^{*4}, 棚橋隆彦^{*2}Lateral Vibrational Characteristics of a Magnetic Liquid Column Held
by Magnetic FieldMotoyoshi OHABA, Tatsuo SAWADA, Shin-hachiro SAITO,
Seiichi SUDO and Takahiko TANAHASHI

We have investigated the stability and vibrational response of magnetic liquid columns held by Helmholtz coils. Theoretical resonance frequencies were derived from the linear potential theory prior to the experiment. During the experiment, a small quantity of a kerosene-based magnetic liquid was injected onto a lower pole plate. When the magnetic field was increased, a cylindrical column (height=9.78 mm) was vertically formed between the two pole faces of the iron core Helmholtz coils. When the magnetic field was decreased, the column diameter exhibited hysteresis such that the column broke at a smaller diameter than that at formation. The coils holding the liquid column were then excited horizontally and the lowest mode ($m=1$, $n=1$) derived theoretically appeared in the measurements. The surface frequency response was measured optically using a CCD camera, a strobovision analyzer and a stroboscope for various magnetic field intensities and aspect ratios (mean diameter/height). We found that the resonance frequency of the mode ($m=1$, $n=1$) decreased with increase of the aspect ratio. The experimental resonance frequencies were in qualitative agreement with the theoretical predictions.

Key Words: Magnetic Fluid, Magnetohydrodynamics, Electromagnetically Induced Vibration, Liquid Column, Frequency Response, Resonance Frequency

1. 緒 言

材料プロセスのうち浮遊帯域溶融法(Floating zone technique)⁽¹⁾では, 素材の融液が液柱を形成し, 液柱の安定性, 振動, 内部流動などが成長結晶に複雑な影響を及ぼす⁽²⁾⁽³⁾. 液柱の安定性に関しては, 液体の密度・表面張力・体積, および支持台直径や重力などが関係し, 重力場や無重力場における各種の研究がなされている^{(4)~(6)}. また, 液柱振動に関しては, 液柱自体が容易に励振されやすいことから, 非軸対称振動や軸対称振動における固有振動数・固有モード・周波数応答^{(7)~(9)}などが調べられている.

一方, 電場や磁場により液柱の安定性が高まること, が, 最近, 明らかにされている. Boudouvis ら⁽¹⁰⁾は, 一様磁場下における磁性流体液柱の形状変化を有限要素法により解析し, 安定領域が磁場に依存することを実験的に確認した. González ら⁽¹¹⁾は, 誘電体液柱の

軸方向に交流電場を与え, 安定性が増すことを理論的, 実験的に示した. Nicolás⁽¹²⁾は, 導電性液柱に一様磁場を作用させた場合, 安定境界が磁場の強さと液柱形状に依存することを解析的に求めた. Castellanos ら⁽¹³⁾は, 導電性液柱の軸方向に交流磁場を作用させた場合, 安定領域と界面固有振動数が, 磁気ボンド数と磁場の浸透深さによることを理論的に導いた. これらの研究の大半は液柱の安定性に限られ, 液柱振動に及ぼす電場や磁場の影響はほとんど知見されない.

そこで本研究は, 液柱の横振動に与える磁場の影響を理論と実験により調べたものである. 試験流体として磁性流体を用い, ヘルムホルツ状コイルにより磁性流体液柱を保持し, 磁場を増減させた場合の形状変化および安定限界を実測した. さらに, 液柱を保持した状態のコイルを水平方向に加振して液柱の共振振動数を求め, その結果を線形ポテンシャル理論より導かれる理論値と比較・検討した. これらにより, 液柱共振振動数が理論と定性的に一致することを示すとともに, 磁場の増減により液柱径にヒステリシスの存在することを明らかにした.

おもな記号

a : 液柱半径

* 1996年4月4日 第73期通常総会講演会において講演, 原稿受付 1996年10月31日.

^{*1} 正員, 桐蔭横浜大学工学部 (〒215 横浜市青葉区鉄町1614).

^{*2} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1).

^{*3} 桐蔭横浜大学工学部.

^{*4} 正員, いわき明星大学理工学部 (〒970 いわき市中央台飯野5-5-1).

- A : 液柱アスペクト比 $=2a/h$
 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$: 円柱座標系の r, θ, z 方向単位ベクトル
 f_0 : 加振振動数
 f_1 : $m=1, n=1$ モードの共振振動数
 h : 液柱高さ
 H : 振動時の磁場の強さ
 H_0 : 静止時の磁場の強さ
 H_c : 静止時の座標原点における磁場の強さ
 I_m : 第 m 次第 1 種変形ベッセル関数
 M : 振動時の磁化の強さ
 M_0 : 静止時の磁化の強さ $=\chi_i H_0$
 m : 方位角方向のモード数
 n : 軸方向のモード数
 p : 圧力
 $\mathbf{u}$: 液体界面に対する単位法線ベクトル
 Q : 液柱体積
 t : 時間
 X_0 : ヘルムホルツ状コイルの加振振幅
 δ : 減衰係数
 η : 界面の変位
 κ : 波数
 μ_0 : 真空の透磁率
 ρ : 密度
 σ : 表面張力
 ϕ : 速度ポテンシャル
 χ_i : 初磁化率
 ω : ヘルムホルツ状コイルの加振角振動数
 ω_d : 粘性減衰を考慮した共振角振動数
 ω_{mn} : (m, n) モード共振角振動数

2. 液柱の振動解析

本解析では、磁場保持される磁性流体液柱の横振動の共振振動数を微小振幅の仮定のもとに線形理論より導く。図 1 のように非磁性の平行平板間に半径 a 、高さ h の円柱状の磁性流体液柱が形成され、磁場 $H(r, \theta, z, t)$ は、 z 軸に平行であるとする。また、液柱周囲の空気密度は無視できるものとする。図 1 のように円柱座標系の原点 O を静止時の液柱中心におき、 z 軸を液柱軸に沿って上向きにとる。磁性流体を非導電性・非圧縮性の完全流体とみなす。液柱振動が静止状態から始まる場合、流れは渦なしであり、速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ が定義される。これより連続の式は次の Laplace 方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

液柱両端の境界条件は、 $z = \pm h/2$ で z 方向流速が

零となることから、次式と書ける。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = \pm h/2 \quad (2)$$

液柱界面の運動学的境界条件は、静止界面からの r 方向変位を $\eta(\theta, z, t)$ で表すと、式 (3) で与えられる。

$$\frac{D}{Dt}(r-a-\eta)=0, r=a+\eta \quad (3)$$

ここで、 D/Dt は速度成分 (v_r, v_θ, v_z) により次のように定義される。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

さらに、液柱界面の力学的境界条件は、Rosensweig により式 (4) のように与えられる⁽¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \rho g z + p - \mu_0 \int_0^H M dH = 0, r = a + \eta \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 ρ は密度、 μ_0 は真空の透磁率、 M は磁化の強さ、磁場 H と磁化の方向は平行である。液柱界面に対する単位法線ベクトル $\mathbf{u}$ は次式となる。

$$\mathbf{u} = \frac{\left(\mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)}{\left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5)$$

これから次の線形化した平均曲率が求められる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

したがって、表面張力に関する Laplace の式は

$$p - p_0 = \sigma \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right] \quad (7)$$

と書ける。ここで、 p_0 は大気圧(一定値)、 σ は表面張力である。式 (4) から圧力 p は、速度を微小としてその二乗項を無視すると、

Fig. 1 Analytical model of a magnetic liquid column

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_0 \int_0^H M dH - \rho g z \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

となる。外部磁場 H と磁化 M との間に線形関係が成り立つ範囲では、初磁化率 χ_i を用いて $M = \chi_i H$ と表されるので、式(8)の右辺第2項は

$$\mu_0 \int_0^H M dH = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_i H^2 \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

と書ける。いま、磁場 $H(r, \theta, z, t)$ が、 r 方向に微小変位 $X_0 e^{i\omega t}$ の振動を行うとし、 X_0 の二次項を微小とみなし無視すると、次のように表すことができる。

$$H(r, \theta, z, t) = H_0(r, \theta, z, 0) + \frac{\partial H_0}{\partial r} X_0 \cos \theta e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

ここで、静止時の磁場の強さ $H_0(r, \theta, z, 0)$ は、 z 軸に関して対称であるとする。式(8)~(10)を式(7)に代入し、式(11)が得られる。

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\sigma}{a} - \frac{\sigma}{a^2} \left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \rho g z \\ & - \frac{1}{2} \mu_0 \chi_i H_0^2 - \mu_0 \chi_i H_0 \frac{\partial H_0}{\partial r} X_0 \cos \theta e^{i\omega t} \\ & + p_0 = 0, \quad r = a + \eta \quad \cdots \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

次に、式(11)の両辺に D/Dt の演算を行う。また、速度 (u_r, v_θ, v_z) 、界面変位 η および X_0 は一次の無限小であり、これらの二次項を無視すると、液柱界面 $r = a + \eta$ での境界条件は、 $r = a$ における境界条件で近似することができる。ここで、新たに α を係数とする減衰項 $\alpha \partial \phi / \partial t$ ⁽¹⁵⁾ を導入すると、液柱界面の境界条件は式(12)となる。

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{a^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial \theta^2} + a^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} \right) \\ & - \mu_0 M_0 \left(\frac{\partial H_0}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + \left(\rho g - \mu_0 M_0 \frac{\partial H_0}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & - i\omega X_0 \mu_0 M_0 \frac{\partial H_0}{\partial r} \cos \theta e^{i\omega t} = 0, \quad r = a \quad \cdots \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

ここで、 $M_0(r, \theta, z, 0)$ は静止時の磁化の強さであり、 $M_0 = \chi_i H_0$ で表される。式(12)において、磁場の強さ H_0 は z 軸に関して対称であるから、 $\partial H_0 / \partial \theta = 0$ となる。また、 $\partial \phi / \partial z$ は、式(2)および式(24)から $z = \pm h/2$ と $z = 0$ において零となることから、 $\partial \phi / \partial z \ll \partial \phi / \partial r$ とみなし、無視できるものとする。これらの条件のもとで、式(12)に式(3)の線形関係式

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad r = a \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

を代入することで、速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ に関する液柱界面の境界条件式(14)が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\rho a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} + a^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial z^2} \right) \\ & - \frac{\mu_0 M_0}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & - i\omega X_0 \frac{\mu_0 M_0}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial r} \cos \theta e^{i\omega t} = 0, \quad r = a \quad \cdots \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

さて、速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ を

$$\phi(r, \theta, z, t) = B(t)P(r, z)\Theta(\theta) \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

とおき、これを式(1)に代入し、分離定数を m^2 とすると、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

となる。さらに、式(16)で $P(r, z) = R(r)Z(z)$ とおき、分離定数を κ^2 とすると、次式となる。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\kappa^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \kappa^2 Z = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

式(18)で変数変換 $\kappa r = \xi$ を行い、次式を得る。

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} - \left(1 + \frac{m^2}{\xi^2} \right) R = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

式(17)に周期性の条件 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ を適用し、 C を定数とすると、 $\Theta(\theta)$ は以下となる。

$$\Theta(\theta) = C \cos m\theta \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

ここで、 m は方位角方向のモード数 ($m = 1, 2, 3, \dots$) を表す。また、式(19)では境界条件式(2)に加え、振動モードが $z = 0$ の $r - \theta$ 面に関して対称の場合を考えると、 D を定数として、 $Z(z)$ は以下と書ける。

$$Z(z) = D \cos \kappa z \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

ここで、 κ は波数 $\kappa = 2n\pi/h$ であり、 n は z 軸方向のモード数 ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示す。式(20)の解は、 $\phi(r, \theta, z, t)$ が $r = 0$ で有限となる条件から、 E を定数として、以下のように書くことができる。

$$R(r) = EI_m(\kappa r) \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

ここで、 I_m は第 m 次第1種変形ベッセル関数である。よって、速度ポテンシャルは式(24)となる。

$$\phi(r, \theta, z, t) = B(t)I_m(\kappa r) \cos m\theta \cos \kappa z \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

式(24)を界面の境界条件式(14)に代入し、整理することで $B(t)$ に関する式(25)を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 B}{dt^2} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{dB}{dt} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\sigma}{a^2} (m^2 - 1 + a^2 \kappa^2) \right. \\ & \left. - \left[\mu_0 M_0 \frac{\partial H_0}{\partial r} \right]_{r=a} \right\} \frac{I_m(\kappa a)}{I_m(\kappa a)} B \\ & = \omega_{mn}^2 F(\theta, z) e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

ここで、 $I_m(x)$ は $dI_m(x)/dx$ を示し、 (θ, z) を指定し

て得られる定数 $F(\theta, z)$ は $\cos m\theta \cos \kappa z \neq 0$ の場合に次式で与えられる。

$$F(\theta, z) = \frac{i\omega X_0 \cos \theta}{\omega_{mn}^2 I_m(\kappa a) \cos m\theta \cos \kappa z} \times \left[\frac{\mu_0 M_0}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial r} \right]_{r=a} \dots (26)$$

以上から、減衰を含まない (m, n) モード共振角振動数 ω_{mn} は、式(25)から次の分散関係式として求められる。

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\kappa a}{2} \left\{ \frac{\sigma}{\rho a^3} (m^2 - 1 + a^2 \kappa^2) - \left[\frac{\mu_0 M_0}{\rho a} \frac{\partial H_0}{\partial r} \right]_{r=a} \right\} \times \frac{1}{I_m(\kappa a)} [I_{m-1}(\kappa a) + I_{m+1}(\kappa a)] \dots (27)$$

ここで、 $dI_m(x)/dx = [I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x)]/2$ の関係を用いた。式(27)において、 $m \geq 1$ であり、 $[\partial H_0/\partial r]_{r=a} \leq 0$ とすると、 $\omega_{mn}^2 \geq 0$ となる。よって、液柱は横方向の振動に対し、つねに安定であることがわかる。式(25)を ω_{mn} を用いて書くと、次式となる。

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + 2\delta \omega_{mn} \frac{dB}{dt} + \omega_{mn}^2 B = \omega_{mn}^2 F e^{i\omega t} \dots (28)$$

ここで、 $\delta = \alpha/2\rho\omega_{mn}$ は減衰係数である。この定常解として

$$B(t) = B_{mn} e^{i(\omega t - \beta)} \dots (29)$$

を式(28)に代入すると、 B_{mn} と β は以下となる。

$$B_{mn} = \frac{F}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_{mn})^2]^2 + 4\delta^2(\omega/\omega_{mn})^2}} \dots (30)$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{2\delta\omega/\omega_{mn}}{1 - (\omega/\omega_{mn})^2} \dots (31)$$

結局、減衰を含む共振振動数 ω_d は、 $dB_{mn}/d\omega = 0$ の条件から式(32)のように求められる。

$$\omega_d^2 = \omega_{mn}^2 (1 - 2\delta^2) \dots (32)$$

3. 実験装置および実験方法

図2に実験装置の概要を示す。本実験装置はヘルムホルツ状コイル、加振機および変位計測システムからなる。このヘルムホルツ状コイルは、内径 50 mm、外径 140 mm、高さ 100 mm のアルミニウム製ボビンに導線を巻いたコイル 2 個から成り、両磁極間を 30 mm 離して同軸となるように連結され、加振台上に固定される。このコイルは、ボビン中心部に任意径の鉄心を挿入させて、破場分布を変えることができる。本実験では直径 12 mm、長さ 100 mm の鉄心を用いた。

図3はヘルムホルツ状コイルに $i = 450$ mA の電流を加えたときの $z = 0$ における r 方向の磁場分布を示したものである。磁場の強さ H_0 は、 $r = 0$ より外側に向かって次第に減少しており、半径方向の磁場こう配

は負の値をもつことがわかる。磁場分布は、 z 軸および $z = 0$ の r - θ 面に関して対称である。液柱両端のぬれ条件を同一とするため、厚さ 10 mm のアクリル板を向かい合う両磁極面上に接着してあり、液柱高さは $h = 9.78$ mm である。水平振動は動電形加振機 (EMIC, F-400 B/A-E 07) によって発生させる。この加振機は加速度信号をフィードバックさせ、加振振動数と加振振幅を任意の値に制御することができる。

液柱界面の変位測定には、図2のように CCD カメラとストロボビジョンアナライザ (菅原研究所, SVA-2) を用いた。液柱体積は、液柱の各高さにおける直径の測定値から求めた。液柱の周波数応答実験では、加振台上に固定され、液柱を保持した状態のヘルムホルツ状コイルを水平方向に正弦波加振させ、振動数をゆっくりと増加させて、液柱の振動変位を測定した。その際、ストロボスコープを液柱振動数とわずかに異なるように発光させ、そのスローモーション運動を CCD カメラでとらえ、ストロボビジョンアナライザ

Fig. 2 Experimental apparatus

Fig. 3 Radial magnetic field distribution for magnet current $i = 450$ mA at $z = 0$

Fig. 4 Photographs of the static magnetic liquid column ($Q=94 \text{ mm}^3$, $h=9.78 \text{ mm}$) subject to various magnetic fields: (a) $H_c=16.6 \text{ kA/m}$, (b) $H_c=24.8 \text{ kA/m}$, (c) $H_c=33.1 \text{ kA/m}$, (d) $H_c=40.0 \text{ kA/m}$

により解析した。この周波数応答で最大変位を与える加振振動数を、対応する振動モードの共振振動数とみなした。液柱の減衰振動特性は、共振振動状態から加振台を停止させたときの界面減衰振動を高速度ビデオシステム(菅原研究所, TURTLE)により 200 コマ/s で収録し、解析して求めた。

磁性流体はケロシンベースの HC-50 [タイホー工業(株)製] を用いた。物性値は、比重 1.390, 粘度 $10.5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, 表面張力 0.026 N/m (25°C), 飽和磁化 37.8 kA/m であった。また、実験温度は $22\sim 23^\circ\text{C}$ であった。

4. 実験結果および考察

4・1 磁場下の液柱形状の変化 理論解析から、液柱形状が共振振動数に直接影響することが予想される。そこで、まず、静止状態における液柱形状の変化を磁場の強さを増減させて調べた。液柱形状を表す無次元パラメータとして、アスペクト比 A (液柱直径 $2a$ /液柱高さ h) を定義する。アスペクト比 A は、磁場の強さ $H_c=35.0 \text{ kA/m}$ のときの液柱平均直径から計算した。

図 4 の写真は、外部磁場の強さ H_c を変化させた場合の静止状態における液柱形状を示す。液柱体積は $Q=94 \text{ mm}^3$ ($A=0.357$) の一定値である。これより $H_c=24.8$ から 40.0 kA/m の範囲では、液柱軸方向の界面がほぼ z 軸方向に沿っているのがわかる。液柱下部の径がいくぶん増大するのは、重力による液体静圧によるものである。磁場の強さが低下する $H_c=16.6 \text{ kA/m}$ では、下部の液柱径が顕著に増加し、アクリル板との界面接触角も減少している。 H_c の減少とともにこの傾向はさらに強まり、やがて液柱の上端直下が破断することで、液柱は崩壊した。

図 5 は外部磁場 H_c を増減させた場合の $z=0$ における液柱直径 d を示したものである。液柱体積は $Q=132 \text{ mm}^3$ ($A=0.424$) である。液柱の形成は、あらか

Fig. 5 Magnetic liquid column diameter d versus magnetic field H_c for $Q=132 \text{ mm}^3$ ($A=0.424$) at $z=0$

じめ $H_c=5 \text{ kA/m}$ 程度の磁場を与えておき、下側アクリル板上に適量の磁性流体をマイクロピペットにより注入し、 H_c をゆっくり増加させていく。このとき、液滴は円すい形を形成しながら次第にその高さを伸ばさせていき、 $H_c=10.9 \text{ kA/m}$ で上側アクリル板に達して、液柱を形成する(図 5 中の上向き矢印で表示)。液柱形成時の液柱径は $d=3.19 \text{ mm}$ である。さらに H_c を増加させると、液柱径は次第に増大し、 $H_c=24.8 \text{ kA/m}$ 付近より $d=4.19 \text{ mm}$ の一定値に落ちつく。

磁場 H_c の減少の場合、液柱径 d は $H_c=15 \text{ kA/m}$ 近辺から形成時に比べて次第に大きな値をとることになり、ヒステリシスを示すことがわかる。 $H_c=8.3 \text{ kA/m}$ で液柱は崩壊する(下向き矢印で表示)。この時点の液柱径は $d=2.49 \text{ mm}$ であり、形成時に比べ約 78% に減少している。このように、磁場を減少させる場合に、液柱の形成時の径に比べ、より小さな径まで液柱が維持されるのは、表面張力の作用に加え、液柱軸方向に沿う磁場が液柱界面に生ずる微小じょう乱を抑制させ、液柱の崩壊を抑止させる働きによるものと考えられる。

4・2 液柱の振動モードと周波数応答 液柱を保

Fig. 6 Photographs of the mode (1, 1) of magnetic liquid columns for $H_c=38.3$ kA/m and $X_0=0.6$ mm :
(a) $A=0.187$, $f_0=11.9$ Hz, (b) $A=0.257$, $f_0=10.9$ Hz, (c) $A=0.385$, $f_0=10.3$ Hz

持した状態でヘルムホルツ状コイルを水平方向に正弦波加振するとき、液柱全体がその振動数に応じて加振軸方向に並進振動しながら、固有モード応答を示すのが観察された。図6の写真は、3種類の異なるアスペクト比 A をもつ液柱の ($m=1$, $n=1$) モード共振点における振動モードを示す。磁場は $H_c=38.3$ kA/m、加振振幅は $X_0=0.60$ mm のそれぞれ一定値である。共振振動数は、 $A=0.187$ では $f_0=11.9$ Hz, $A=0.257$ では $f_0=10.9$ Hz, および $A=0.385$ では 10.3 Hz である。これより、(1, 1)モードは、液柱軸が加振軸方向に湾曲する振動モードをもつことがわかる。式(27)について考察したように、液柱の横振動は安定な運動であり、振動中に破断するような挙動や、軸方向に伝はる波動現象は、観察されなかった。

図7はアスペクト比 A を変化させた場合の、(1, 1)モード界面の周波数応答を示したものである。横軸は加振振動数 f_0 、縦軸は液柱の無次元最大変位 $\eta_{\max}/X_0$ を表す。ここで、 $\eta_{\max}$ は $z=0$ の静止界面から r 軸外向きの液柱最大変位、 X_0 は加振振幅 0.60 mm である。磁場は $H_c=38.3$ kA/m の一定値、アスペクト比は $A=0.256$, 0.347 , 0.459 の場合である。これらのいずれの応答も f_0 の増加にしたがい、 $\eta_{\max}$ は次第に増大していき、ある振動数において最大値(共振点)に達する。その後、 f_0 の増加とともに $\eta_{\max}$ は次第に減少する。一方、 A の増加に伴い、液柱の共振点は低振動数側に移行していることがわかる。特に $A=0.459$ の場合、界面変位は著しく増大し、その応答は急しゅん化している。また、この場合には共振点近くで液柱変位が急増する非線形応答が観察された。

4.3 液柱の(1, 1)モード共振振動数 ここでは共振振動数の実験値を理論と比較・検討する。理論曲線の計算には、式(27)、(32)の両式を用いた。式(27)中の磁場こう配 $[\partial H_0/\partial r]_{r=a}$ は、図3の磁場分布を最小二乗法で近似し、それを微分することで得た。初磁

Fig. 7 Surface frequency response of the mode (1, 1) at various aspect ratios A for $H_c=38.3$ kA/m

化率は磁化曲線から求めた $\chi_i=0.515$ を用いた。また、液柱の並進運動による磁場の補正も同時に行った。式(32)の減衰係数 δ は、本実験の場合、固有モード振動の減衰と液柱全体としての並進運動の減衰とを考慮する必要がある。前者については、液柱全体の並進運動のため、固有モードの減衰特性を求めることが困難であることから、鉛直方向加振時の軸対称振動の減衰振動曲線から減衰係数を推定する方法をとった。後者は、並進運動の減衰振動曲線から減衰係数を求めた。 δ としてこれら二つの減衰係数の和を用いた。

図8は磁場 $H_c=38.3$ kA/m における(1, 1)モード共振振動数の実験値 f_1 を理論と比較したものである。理論計算では、前述の実験から得られた減衰係数 $\delta=0.25$ を用いた。実験値 f_1 はアスペクト比 A の増加にしたがい次第に減少しており、理論曲線とほとんど同様の傾向を示していることがわかる。理論との差は、アスペクト比の全域で同程度認められる。その原因として、不均一な液柱径や接触角の減少(理論式では

Fig. 8 Comparison of the experimental (circles) and theoretical (solid) results for the mode (1, 1) resonant frequency f_1 as a function of the aspect ratio A for $H_c = 38.3$ kA/m

$\pi/2$), 非線形性, および凝集による動的効果などの影響が考えられる。したがって, 今後, これらの要因を考慮した定式化が必要である。

5. 結 論

ヘルムホルツ状コイルの2磁極面間に円柱状の磁性流体液柱を形成させ, 外部磁場の強さおよび液柱アスペクト比を変化させた場合の液柱の形状変化および横振動共振振動数を実測し, その結果を粘性減衰を考慮した線形理論値と比較・検討した。得られた結果を要約すると以下となる。

(1) 外部磁場の増減により液柱径にヒステリシスが現れる。また, 磁場の強さを減少させていく場合, 液柱が形成されるとき径より細い径まで液柱が維持される。

(2) 水平加振した場合の液柱振動の周波数応答

は, アスペクト比の増加に伴い次第に増大し, 急しゅう化する応答を示す。

(3) 外部磁場を一定として液柱アスペクト比が増加する場合, 液柱の(1, 1)モード共振振動数は, 次第に減少する特性を示す。

(4) 液柱アスペクト比を変化させて得られた(1, 1)モード共振振動数は, 線形理論から導かれた理論値と定性的に一致する。

最後に, 本実験にあたり桐蔭横浜大学院生宇崎俊介君の協力を得たことを付記して, 深く感謝の意を表す。

文 献

- (1) Keck, P. H. and Golay, M. J. E., *Phys. Rev.*, **89** (1953), 1297.
- (2) Martinez, I., Haynes, J. M. and Langbein, D. (Walter, H. U., ed.), *Fluid Sci. in Space*, (1987), 668-672, Springer-Verlag.
- (3) 石川正道・日比谷孟俊, マイクログラビティ, (1994), 296-298, 培風館.
- (4) Hynes, J. M., *J. Colloid Interface Sci.*, **32** (1970), 652-654.
- (5) Coriell, S. R. and Cordes, M. R., *J. Crystal Growth*, **42** (1977), 466-472.
- (6) Boucher, E. A. and Jones, T. G. J., *J. Colloid Interface Sci.*, **126** (1988), 469-478.
- (7) Sanz, A. and Lopez-Diez, J., *J. Fluid Mech.*, **205** (1989), 503-521.
- (8) Perales, J. M. and Meseguer, J., *Phys. Fluids*, **A4** (1992), 1110-1130.
- (9) Bauer, H. F., *J. Sound Vib.*, **142** (1990), 125-133.
- (10) Boudouvis, A. G., Puchalla, J. L. and Scriven, L. E., *J. Colloid Interface Sci.*, **124** (1988), 677-687.
- (11) González, H., McCluskey, F. M. J., Castellanos, A. and Barrero, A., *J. Fluid Mech.*, **206** (1989), 545-561.
- (12) Nicolás, J. A., *Phys. Fluids*, **A4** (1992), 2573-2577.
- (13) Castellanos, A. and González, H., *J. Fluid Mech.*, **265** (1994), 245-263.
- (14) Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, (1985), 125, Cambridge University Press.
- (15) 曾我部潔・柴田碧, 生産研究, **26**-3 (1974), 119-122.