乱流の繰込み理論に関する研究*

(第2報, 区間平均の繰込みによる渦粘性係数の導出)

板 津 義 博^{*1}, 長 野 靖 尚^{*2}

Renormalization Group Theory for Turbulence (2nd Report, Formulation of Eddy Viscosity Model with Iterative-Averaging Renormalization)

Yoshihiro ITAZU and Yasutaka NAGANO

In the 1st report, we showed that the renormalization group (RNG) theory for turbulence developed by Yakhot and Orszag (1986) and reformulated by Yakhot and Smith (1992) is not related to Wilson's theory. Also it was pointed out that the Kolmogorov constant was evaluated by setting $\epsilon=0$ and $\epsilon=4$ in the same equations and that the constants in the $\bar{K}-\bar{\epsilon}$ model are invalid because of the same problem. In this study, we have used an iterative averaging method which does not require the ϵ -expansion technique, and applied it to derivation of eddy viscosity. Using the exact governing equations for turbulent shear flows, we have obtained the eddy viscosity more consistently than with the previous RNG method; the present form is equivalent to Boussinesq's postulate, and the model constant C_μ is determined from the value of the Kolmogorov constant.

Key Words: Turbulence, Turbulent Flow, Turbulence Model, Renormalization Group, ϵ Expansion, Inertial Range

1. 緒 言

繰込み群の方法 (renormalization group method, RNG と略記) を乱流理論に適用した例の中では, Yakhot-Orszag(YO)⁽¹⁾によって考案され, Yakhot-Smith⁽²⁾により改良された方法が有名である. 彼らのRNG理論によって構築された $\bar{K}-\bar{\epsilon}$ 方程式モデルの特徴は, 統計理論に基づく式展開のみでモデリングができかつモデル定数が得られることであり, 現在いくつかの市販の数値計算ソフトにも組み込まれつつある.

しかし前報⁽³⁾で示したように, 彼らのRNG法は物理的, 数学的な矛盾を含んでおり, さらに, Wilson理論⁽⁴⁾を基にした繰込み群理論にもなっていない. その中で, もっとも見過ごすことのできない問題点は, 繰込み群で得られる定数が展開パラメータ ϵ の摂動展開によって定められるため, ϵ の値を小さくする必要があるが ($\epsilon \rightarrow 0$), その一方で, 繰込みの操作が慣性領域で行われていることを示すためには, $\epsilon = 4$ が要求さ

れるため, 結果的に同じ式上の同じパラメータに対して, 異なる値 ($\epsilon = 0$ と 4) を代入する操作が行なわれているということである.

言うまでもなく, 慣性領域の波数成分を連続的に消去するという考え方そのものは, 高レイノルズ数の流れ場を取り扱う際に非常に有効的な方法である. そこで本研究では, Wilsonの ϵ 展開法は用いず, かつ人為的な揺動力を仮定しない厳密なNavier-Stokes方程式を波数空間上で取り扱い, 慣性領域の変動速度成分を連続的に消去して⁽⁵⁾, 低波数域のみで定義される平均速度成分の輸送方程式を導出する. そして, その結果得られた渦粘性係数について考察する.

2. 記 号

C_μ : 乱流モデル定数

d : 次元 (= 3)

$E(k)$: 3次元エネルギースペクトル

K : 乱流エネルギー $= \overline{u_i u_i} / 2$

k_d : コルモゴロフ波数 $= (\epsilon / \nu^3)^{1/4}$

k_e : エネルギー保有渦の波数 $= \epsilon / K^{3/2}$

* 原稿受付 1996年2月23日.

*¹ 准員, 名古屋工業大学大学院 (〒466 名古屋市昭和区御器所町).

*² 正員, 名古屋工業大学.

k_i : 波数空間の i 方向座標もしくはその方向
の波数成分

$\mathbf{k}$: 波数ベクトル $= (k_1, k_2, k_3)$

k : 波数 $= |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$

L : 最大長さスケール

n : 任意の数 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

P : 圧力

p : 圧力変動

$Q_v(k)$: スペクトル密度 $= E(k)/(4\pi k^2)$

q : 波数 $= |\mathbf{q}|$

S_d : d 次元単位球の表面積 ($S_3 = 4\pi$)

t : 時間

U_i : x_i 方向の速度成分

$\bar{U}_i$: x_i 方向の平均速度成分

u_i : x_i 方向の変動速度成分

x_i : 物理空間の i 方向座標

$\mathbf{x}$: 物理空間での座標ベクトル

α : コルモゴロフ定数

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

ε : 乱流エネルギー K の散逸率

Λ_0 : 初期切断波数 $= O(k_d)$

Λ_e : 最小波数 $= O(k_e)$

ν : 動粘性係数

ν_n : 繰込まれた粘性係数

ν_t : 渦粘性係数

ρ : 密度

添 字

()_< : 波数 $k < \Lambda_{n+1}$ での成分

()_> : 波数 $\Lambda_{n+1} < k < \Lambda_n$ での成分

| | : ベクトルの絶対値

()_c : 条件付区間平均値

()_— : 平均値

3. 繰込み近似による渦粘性係数の導出

3.1 基礎方程式 非圧縮性流体に対する運動方程式と連続の式は以下のように表わされる.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

次に, 式(1), (2)の速度成分 U_i に対し, 次のようなフーリエ級数の定義を用いて平均成分と変動成分に分ける.

$$\bar{U}_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} < \Lambda_e} \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (3)$$

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \geq \Lambda_e} u_i(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (4)$$

Fig. 1 Energy spectrum at large Reynolds number

ここで, 変動速度成分 u_i のエネルギースペクトルに対して

$$\int_0^{\Lambda_e} E(k) dk \ll \int_{\Lambda_e}^{\infty} E(k) dk \quad (5)$$

の関係が成立するものとし, 最小波数 Λ_e より低波数で定義される変動成分は無視できるものとしている. そして, 乱流エネルギーはコルモゴロフの $-5/3$ 乗則を用いることにより

$$K = \int_{\Lambda_e}^{\infty} \alpha \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} dk \simeq \int_{\Lambda_e}^{\Lambda_0} \alpha \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} dk \simeq \frac{3\alpha}{2} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Lambda_e^{-\frac{2}{3}} \quad (6)$$

と見積もることができるので, 式(6)から最小波数 Λ_e は

$$\Lambda_e \simeq \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\varepsilon}{K^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{\frac{3}{2}} k_e \quad (7)$$

で表される. その結果式(4)より, 変動成分は

$$\bar{u}_i = 0 \quad (8)$$

の条件を満たす. 同様に, 初期の切断波数 Λ_0 はエネルギー散逸率 ε を

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} 2\nu k^2 E(k) dk \simeq \int_{\Lambda_e}^{\Lambda_0} 2\nu k^2 E(k) dk \quad (9)$$

と見積もることにより,

$$\Lambda_0 \simeq \left(\frac{2}{3\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} k_d \quad (10)$$

のように表される.

よって, 式(1), (3), (4), (8)から, 速度の平均成分および変動成分について次の輸送方程式が得られる.

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u_i u_j} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \bar{u_i u_j}) \quad (12)$$

さらに, 式(12)を波数空間上で表わすと次のようになる.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_i(\mathbf{k}, t) \\ &= -\frac{i}{2} P_{imn}(\mathbf{k}) \sum_q u_m(\mathbf{q}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ & \quad - i P_{imn}(\mathbf{k}) \sum_q \bar{U}_m(\mathbf{q}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

ここで,

$$P_{imn}(\mathbf{k}) = k_m P_{in}(\mathbf{k}) + k_n P_{im}(\mathbf{k}) \cdots \cdots (14)$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \cdots \cdots (15)$$

である。また, $P_{ij}(\mathbf{k})$ は式(2)(ソレノイド条件)を考慮して,

$$k_i P_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \cdots \cdots (16)$$

となっている。式(13)で, 変動圧力はポアソン方程式を用いて消去してあり, 波数(パラメータ) k は $\Lambda_e \leq k < \Lambda_0$ の範囲で定義される。ただし, 乱れのレイノルズ数は十分に大きく, $\Lambda_e \ll \Lambda_0$ の関係が成立するものとする^{**1}。

同様に, レイノルズ応力を波数成分で表わすと以下ようになる。

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \sum_{k \ll \Lambda_e} R_{ij}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cdots \cdots (17)$$

$$R_{ij}(\mathbf{k}, t) = \sum_q u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \cdots \cdots (18)$$

ここで, 波数は $|\mathbf{k}| \ll \Lambda_e$, $\Lambda_e \leq |\mathbf{q}| < \Lambda_0$, $\Lambda_e \leq |\mathbf{k} - \mathbf{q}| < \Lambda_0$ で定義される。

3.2 高波数成分の除去 まず最初に, 速度成分を以下のような関係を用いて2成分に分ける⁽⁵⁾(図2)。

$$u_i(\mathbf{q}, t) = \begin{cases} u_i^<(\mathbf{q}, t) : \Lambda_e \leq q < \Lambda_1 \\ u_i^>(\mathbf{q}, t) : \Lambda_1 \leq q < \Lambda_0 \end{cases} \cdots \cdots (19)$$

ここで, $\Lambda_1 \leq q < \Lambda_0$ は初期切断波数付近での微小な領域を表わす。また, Λ_1 はパラメータ λ を用いて

$$\Lambda_1 = \Lambda_0(1 - \lambda), \quad 0 < \lambda \ll 1 \cdots \cdots (20)$$

と書ける。よって, 式(18)は次のように展開することができる。

$$\begin{aligned} \sum_q u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) &= \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &+ \sum_q u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) + \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &+ \sum_q u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

ここで, 微小波数帯 $\Lambda_1 \leq q < \Lambda_0$ で定義される速度成分は, 統計的にガウス分布に従うものと仮定し^{**2}, 高

波数側の成分にのみ作用する条件付区間平均操作を, 式(21)の右辺各項に対して行う。

まず最初に, 第1項には高波数側の速度成分が全く含まれていないので, そのままの形が保持され

$$\begin{aligned} & \sum_q \langle u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\ &= \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

となる。次に, 第2項および第3項は高波数側と低波数側の成分の相関であり, それらの成分は Navier-Stokes 方程式の非線形項を介してエネルギー輸送があり, 単純にそれぞれを独立に取り扱うことはできない。そこで, 高波数側の速度成分を McComb の理論⁽⁶⁾に基づいて次のような2成分に分ける。

$$u_i^>(\mathbf{q}, t) = v_i^>(\mathbf{q}, t) + \Delta_i^>(\mathbf{q}, t) \cdots \cdots (23)$$

ここで, $v^>$ は $u^<$ との相関が無いことを除けば, $u^>$ と同様な性質を有し(統計的にはガウス分布に従う), その全空間での平均値は

$$\langle v_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle = 0 \cdots \cdots (24)$$

$$\langle v_i^>(\mathbf{q}, t) v_j^>(\mathbf{q}', t) \rangle = \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{q}', t) \rangle \cdots \cdots (25)$$

となる。つまり, 関数 $\Delta^>$ が低波数側の成分 $u^<$ と相関のある部分を表している。そして, その全空間での平均値は

$$\langle \Delta_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle = 0 \cdots \cdots (26)$$

$$\langle \Delta_i^>(\mathbf{q}, t) \Delta_j^>(\mathbf{q}', t) \rangle = 0 \cdots \cdots (27)$$

となる。以上の関係を用いると, 式(21)の右辺第2項は

$$\begin{aligned} & \sum_q \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c = \sum_q \langle v_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &+ \sum_q \langle \Delta_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &= \sum_q \langle \Delta_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &\simeq O(\lambda^m) \simeq 0, \quad m \geq 1 \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

第3項は

$$\begin{aligned} & \sum_q \langle u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c = \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) \langle v_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\ &+ \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) \langle \Delta_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\ &= \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) \langle \Delta_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\ &\simeq O(\lambda^m) \simeq 0, \quad m \geq 1 \cdots \cdots (29) \end{aligned}$$

となるから, 微小区間 $\Lambda_1 \leq q < \Lambda_0$ が十分に小さい場合 ($0 < \lambda \ll 1$) には, 第2項, 第3項共に無視できるものとする。最後に第4項は, 式(13)を基にして得られる速度の2次モーメント $u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t)$ の輸送方程式

^{**1}この仮定はYOのRNG理論と同じである。

^{**2}これはYOのRNG理論の揺動力 f_i や, McCombの繰返し平均化法に用いる仮定と基本的に同じである。

Fig. 2 Fine scale removal

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu q^2 + \nu |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 \right) u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\
 &= -i P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \sum_r \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \\
 & - i P_{imn}^>(\mathbf{q}) \sum_r \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\
 & - \frac{i}{2} P_{imn}^>(\mathbf{q}) \sum_r u_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\
 & - \frac{i}{2} P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \sum_r u_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \\
 & \dots \dots \dots (30)
 \end{aligned}$$

を代入して展開を行う。そして、式(19), (23), (28), (29)の関係をを用いてまとめた結果、式(21)の右辺第4項は

$$\begin{aligned}
 & \sum_q \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 &= -i \sum_q \sum_r \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu q^2 + \nu |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 \right)^{-1} \\
 & \times \left\{ P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) \langle u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \right. \\
 & + P_{imn}^>(\mathbf{q}) \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) \langle u_n(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + \frac{1}{2} P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle u_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + \frac{1}{2} P_{imn}^>(\mathbf{q}) \langle u_m(\mathbf{r}, t) u_n(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \left. \right\} \\
 &= -i \sum_q \sum_r \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu q^2 + \nu |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 \right)^{-1} \\
 & \times \left[P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \{ \langle u_n^<(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \right. \\
 & + \langle u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \} \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) \\
 & + P_{imn}^>(\mathbf{q}) \{ \langle u_n^<(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + \langle u_n^>(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \} \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) \\
 & + \frac{1}{2} P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \{ \langle u_m^<(\mathbf{r}, t) u_n^<(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + 2 \langle u_m^<(\mathbf{r}, t) u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + \langle u_m^>(\mathbf{r}, t) u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \} \\
 & + \frac{1}{2} P_{imn}^>(\mathbf{q}) \{ \langle u_m^<(\mathbf{r}, t) u_n^<(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \langle u_m^<(\mathbf{r}, t) u_n^>(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & + \langle u_m^>(\mathbf{r}, t) u_n^>(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \} \left. \right\} \\
 & \simeq -i \sum_q \sum_r \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu q^2 + \nu |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 \right)^{-1} \\
 & \times \left\{ P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{r}, t) v_i^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c \right. \\
 & + P_{imn}^>(\mathbf{q}) \langle v_n^>(\mathbf{q} - \mathbf{r}, t) v_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \left. \right\} \bar{U}_m(\mathbf{r}, t) \dots (31)
 \end{aligned}$$

となる。更に、式(23)で定義された $v^>$ の平均値にはガウス基準場の関係式⁽⁷⁾

$$\langle v_\alpha^>(\mathbf{q}, t) \rangle_c = 0 \dots \dots \dots (32)$$

$$\langle v_\alpha^>(\mathbf{q}, t) v_\beta^>(\mathbf{q}', t) \rangle_c = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 P_{\alpha\beta}^>(\mathbf{q}) Q_v^>(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0} \dots \dots \dots (33)$$

$$\delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0} = \left(\frac{1}{L} \right)^3 \int_L \int_L \int_L \exp \{ -i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{x} \} dx_1 dx_2 dx_3 \dots \dots \dots (34)$$

$$\langle v_\alpha^>(\mathbf{q}, t) v_\beta^>(\mathbf{k}, t) v_\gamma^>(\mathbf{r}, t) \rangle_c = 0 \dots \dots \dots (35)$$

を適用して上式をまとめると、

$$\begin{aligned}
 & \sum_q \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 &= -i \sum_q \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \frac{1}{\nu q^2 + \nu |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} \{ P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) P_{in}^>(\mathbf{q}) \\
 & \times Q_v^>(\mathbf{q}) + P_{imn}^>(\mathbf{q}) P_{jn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) Q_v^>(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \} \bar{U}_m(\mathbf{k}, t) \\
 & \dots \dots \dots (36)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで、時間微分は慣性領域が準平衡領域であることを考慮し、かつ本理論では時間に対する履歴効果を考慮しない(マルコフ近似)ことから、無視できるものとする。さらに、式(36)の波数 $|\mathbf{k} - \mathbf{q}|$, q は、共に微小な波数帯でのみ定義されていることから、お互いの絶対値の差異は小さく、 $|\mathbf{k} - \mathbf{q}| \simeq q$ および $Q_v^>(\mathbf{q}) \simeq Q_v^>(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|)$ と近似することができる。その結果

$$\begin{aligned}
 & \sum_q \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\
 & \simeq -i \sum_q \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \frac{1}{2\nu q^2} \{ P_{imn}^>(\mathbf{q}) P_{jn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\
 & + P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) P_{in}^>(\mathbf{q}) \} Q_v^>(\mathbf{q}) \bar{U}_m(\mathbf{k}, t) \dots \dots \dots (37)
 \end{aligned}$$

となる。そこで $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{q}|$ であるから、式(37)に含まれる2階および3階のテンソルを k の1次のオーダー $O(k)$ まで展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 & P_{imn}^>(\mathbf{q}) P_{jn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + P_{jmn}^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}) P_{in}^>(\mathbf{q}) \\
 & \simeq k_j \delta_{im} + k_i \delta_{jm} - \frac{k_j q_i q_m}{q^2} - \frac{k_i q_j q_m}{q^2} - \frac{k_n q_j q_n}{q^2} \delta_{im}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{k_n q_i q_n}{q^2} \delta_{jm} + 2 \frac{k_n q_i q_j q_m q_n}{q^4} \dots (38)$$

さらに, $L \rightarrow \infty$ として

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_q \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \equiv \int_q d\mathbf{q} \dots (39)$$

と表記した後に, 波数ベクトル $\mathbf{q}$ の積分を

$$\int d\mathbf{q} = S_d \int q^{d-1} dq \dots (40)$$

$$\int q_\alpha q_\beta d\mathbf{q} = \frac{S_d}{d} \delta_{\alpha\beta} \int q^{d+1} dq \dots (41)$$

$$\int q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta d\mathbf{q} = \frac{S_d}{d(d+2)} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \int q^{d+3} dq \dots (42)$$

の関係をを用いることにより波数 q の積分へと置換した結果,

$$\begin{aligned} & \sum_q \langle u_i^>(\mathbf{q}, t) u_j^>(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c \\ &= -\nu_1 \{ ik_i \bar{U}_j(\mathbf{k}, t) + ik_j \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \} \dots (43) \end{aligned}$$

$$\nu_1 = \Delta\nu_0 \dots (44)$$

$$\Delta\nu_0 = \frac{7}{30\nu_0} \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_0} \frac{E(q)}{q^2} dq \dots (45)$$

$$\nu_0 = \nu \dots (46)$$

を得る.

よって, 式(18)の右辺は上述の繰込み近似により次のように表わされる.

$$\begin{aligned} & \sum_q \langle u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c = \sum_q u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ & - \nu_1 \{ ik_i \bar{U}_j(\mathbf{k}, t) + ik_j \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \} \dots (47) \end{aligned}$$

ここで, 波数は $|\mathbf{k}| \ll \Lambda_e$, $\Lambda_e \leq |\mathbf{k} - \mathbf{q}| < \Lambda_1$, $\Lambda_e \leq |\mathbf{q}| < \Lambda_1$ の範囲で定義される.

3.3 渦粘性係数の導出 式(47)の右辺第1項の速度成分を, $u_i^<(\mathbf{q}, t) \rightarrow u_i(\mathbf{q}, t)$ および $u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rightarrow u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t)$ と定義し直した後に,

$$u_i(\mathbf{q}, t) = \begin{cases} u_i^<(\mathbf{q}, t) & : \Lambda_e \leq q < \Lambda_2 \\ u_i^>(\mathbf{q}, t) & : \Lambda_2 \leq q < \Lambda_1 \end{cases} \dots (48)$$

のように新たな切断波数 Λ_2 を用いて2成分に分け, 今までと同様の操作を繰り返すと, 式(47)は

$$\begin{aligned} & \sum_{q < \Lambda_0} \langle u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c = \sum_{q < \Lambda_2} u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ & - \nu_2 \{ ik_i \bar{U}_j(\mathbf{k}, t) + ik_j \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \} \dots (49) \end{aligned}$$

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu_1 \dots (50)$$

$$\Delta\nu_1 = \frac{7}{30\nu_1} \int_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} \frac{E(q)}{q^2} dq \dots (51)$$

となる. 同様にして, $n+1$ 回繰り返した結果は, 式(47)から

$$\begin{aligned} & \sum_{q < \Lambda_0} \langle u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \rangle_c = \sum_{q < \Lambda_{n+1}} u_i^<(\mathbf{q}, t) u_j^<(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ & - \nu_{n+1} \{ ik_i \bar{U}_j(\mathbf{k}, t) + ik_j \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \} \dots (52) \end{aligned}$$

$$\nu_{n+1} = \nu_n + \Delta\nu_n \dots (53)$$

$$\Delta\nu_n = \frac{7}{30\nu_n} \int_{\Lambda_{n+1}}^{\Lambda_n} \frac{E(q)}{q^2} dq \dots (54)$$

となる.

次に, 式(52), (53), (54)の関係をを用いることにより, すべての変動速度成分が繰込まれた結果を求める. まず最初に, 式(53)の両辺を二乗した後に, それぞれ項に対し任意の数 $N-1$ まで和をとると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \nu_{i+1}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \nu_i^2 + 2\nu_i \Delta\nu_i + (\Delta\nu_i)^2 \} \dots (55)$$

もしくは

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \nu_i \Delta\nu_i + \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta\nu_i)^2 \dots (56)$$

となる. ここで, 式(56)の各項は式(53), (54)の関係をを用いることにより

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2) = \nu_N^2 \dots (57)$$

$$2 \sum_{i=0}^{N-1} \nu_i \Delta\nu_i = \frac{7}{15} \int_{\Lambda_N}^{\Lambda_0} \frac{E(q)}{q^2} dq \dots (58)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\Delta\nu_i)^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{7}{30\nu_i} \int_{\Lambda_{i+1}}^{\Lambda_i} \frac{E(q)}{q^2} dq \right\}^2 \dots (59)$$

と表すことができる. さらに式(58), (59)の被積分関数に, 次の慣性領域のエネルギースペクトル

$$E(q) = \alpha \varepsilon^{\frac{2}{3}} q^{-\frac{5}{3}} \dots (60)$$

を代入し, 積分を行なうと,

$$2 \sum_{i=0}^{N-1} \nu_i \Delta\nu_i = \frac{7\alpha}{40} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \left(\Lambda_N^{-\frac{5}{3}} - \Lambda_0^{-\frac{5}{3}} \right) \dots (61)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta\nu_i)^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{7\alpha}{80} \right)^2 \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{\nu_i^{\frac{16}{3}} \Lambda_i^{\frac{16}{3}}} \{ (1-\lambda)^{-\frac{5}{3}} - 1 \}^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{7\alpha}{80} \right)^2 \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{\nu_i^{\frac{16}{3}} \Lambda_i^{\frac{16}{3}}} \left(\frac{8}{3} \lambda + \frac{44}{9} \lambda^2 + \dots \right)^2 \\ &= O(\lambda^2) + O(\lambda^3) + \dots \dots (62) \end{aligned}$$

となる. 従ってパラメータ λ (もしくは区間 $\Lambda_{n+1} \leq k < \Lambda_n$) が十分に小さければ, 渦粘性係数は以下のように表すことができる.

$$\nu_N \simeq \sqrt{\frac{7\alpha}{40}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\Lambda_N^{-\frac{5}{3}} - \Lambda_0^{-\frac{5}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \dots (63)$$

特に, 切断波数が $\Lambda_N \ll \Lambda_0$ の条件では

$$\nu_N \simeq \sqrt{\frac{7\alpha}{40}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \Lambda_N^{-\frac{4}{3}} \dots\dots\dots (64)$$

と近似できるので、粘性係数が切断波数にのみに依存する(すなわち初期切断波数に依存しない)形が得られる。

以上より、慣性領域の速度成分をすべて繰込んだ後の粘性係数は、最終的に次式で表わされる。

$$\nu_e \simeq \sqrt{\frac{7\alpha}{40}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \Lambda_e^{-\frac{4}{3}} \dots\dots\dots (65)$$

したがって、式(65)に式(7)を代入して Λ_e を消去することにより、渦粘性係数は

$$\nu_e = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (66)$$

$$C_\mu = \sqrt{\frac{7\alpha}{40}} \left(\frac{2}{3\alpha} \right)^2 \dots\dots\dots (67)$$

となり、レイノルズ応力は繰込み近似により

$$\begin{aligned} & \sum_q u_i(\mathbf{q}, t) u_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) \\ &= -\nu_e \{ ik_i \bar{U}_j(\mathbf{k}, t) + ik_j \bar{U}_i(\mathbf{k}, t) \} \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 C_μ の値はコルモゴロフ定数 α に依存し、標準値 $\alpha = 1.62^{(8)}$ に対して、式(67)より $C_\mu = 0.09$ となる。

以上をまとめると、本繰込み理論からレイノルズ応力は

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (69)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (70)$$

と表わすことができる。この定式化は、よく知られた K - ε 乱流モデルのそれと一致する。

4. 結 言

Wilsonの繰込み群理論を用いず、McCombの繰返し平均化法と類似の手法をレイノルズ応力の定式化に適用し、新たな繰込み近似による乱流理論を構築した。その結果、 ε 展開に関する問題点を含むことなく、連続的な高波数成分の消去から渦粘性モデルが得られることが明らかになった。モデル定数も含め本理論による定式化は、前報で指摘したRNG理論の不合理的をほぼ払拭している。なお、過去にコルモゴロフ定数を統計理論から求めた結果⁽⁹⁾も報告されているが、本研究ではモデル化した項の形に着目しているので、コルモゴロフ定数を統計理論から決定することは行なっていない。

さらに、Yakhot-Orszag-Smith理論の K - ε 2方程式のモデリングについても、前報で指摘したように多くの物理的、数学的不合理が含まれているが、これらの改良は今後の課題としたい。特に、 ε -方程式中の渦糸の伸びによる生成の効果は、従来の高レイノルズ型 K - ε モデルでは十分に表現されていないので、そのモデル化が今後最も重要であると考えている。

本研究を進めるにあたり多大なご助言をいただいた、東京大学生産技術研究所の吉澤徹教授に謝意を表す。また、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金重点領域研究(1)(No. 05240103)の援助を受けた。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) Yakhot, V., and Orszag, S. A., Renormalization Group Analysis of Turbulence, *J. Sci. Comput.* **1**, (1986), 3 - 51.
- (2) Yakhot, V., and Smith, L. M., The Renormalization Group, the ε -Expansion and Derivation of Turbulence Models, *J. Sci. Comput.* **7**, (1992), 35 - 61.
- (3) 板津・長野, 乱流の繰込み理論に関する研究(第1報, 乱流モデル構築に関するYakhot-Orszag-Smith理論の評価), 機論, **62**-595, B (1996), 999 - 1005.
- (4) Wilson, K. G., and Kogut, J., The renormalization group and the ε expansion, *Phys. Rep.* **12C**, (1974), 77 - 199.
- (5) McComb, W. D., 1990, The Physics of Fluid Turbulence, Oxford University Press.
- (6) McComb, W. D., and Watt, A. G., Conditional Averaging Procedure for the Elimination of the Small-Scale Modes from Incompressible Fluid Turbulence at High Reynolds Numbers, *Phys. Rev. Lett.* **65**, (1990), 3281 - 3284.
- (7) Yoshizawa, A., Statistical analysis of the derivation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, *Phys. Fluids* **27**, (1984), 1377 - 1387.
- (8) Sreenivasan, K. R., On the universality of the Kolmogorov constant, *Phys. Fluids* **7**, (1995), 2778 - 2784.
- (9) Kraichnan, R. H., Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, (1965), 575 - 598.