流体の圧縮性を考慮した旋回キャビテーションの解析*

渡 辺 聡^{*1}, 宮 本 政 博^{*2}
横 田 和 彦^{*3}, 辻 本 良 信^{*3}

An Analysis of Rotating Cavitation Considering Flow Compressibility

Satoshi WATANABE, Masahiro MIYAMOTO,
Kazuhiko YOKOTA and Yoshinobu TSUJIMOTO

A linear analysis based on a semi-actuator disk method is carried out to investigate the effects of flow compressibility due to 2-phase flow on rotating cavitation. It is assumed that no slip and no phase change occur between gas and liquid phases, and that the flow field is isothermal because of the large thermal capacity and conductivity of the liquid phase. The results show that there are many solutions of characteristic equation, corresponding to conventional forward and backward rotating cavitations, rotating stall, solution with no disturbances, natural vibrations of 1-D cascade flow resonant with the upstream and downstream flow fields, and a forward rotating mode different from conventional forward rotating cavitation. It is also shown that the stable regions of conventional rotating cavitations become slightly larger due to the flow compressibility.

Key Words: Cavitation, Stability, Compressible Flow, Rotating Cavitation, Cascade, Propagation Velocity Ratio

1. 緒 言

旋回キャビテーション(以下 R. C. とする)は, 羽根車の各翼に不均一にキャビテーションが発生し, その不均一が羽根車周方向に伝ばする不安定現象である。この現象はロケットエンジン用ターボポンプなどの高回転・低 NPSH 下で運転されるポンプで問題となる。実際, 純国産の H-II ロケットの開発時には液体酸素ターボポンプインデューサの R. C. による軸振動(周波数が軸回転の 1.0~1.3 倍)の発生が問題となった⁽¹⁾。この軸振動はケーシングの改良によって抑えられたがその機構については完全にはわかっていない。また, R. C. は Space Shuttle(米)⁽²⁾ や ARIANE V(欧)⁽³⁾ でも発生するなど, 現在では液体ロケット用ターボポンプ共通の問題となっている。

R. C. は Tsujimoto らによって初めて理論的な説明がなされている⁽⁴⁾。R. C. はその発生原因が羽根車の性能によらず正のマスフローゲインファクタ(流量低下に対するキャビティ体積の増加)にあり, 羽根車の

性能の右上がり特性が発生原因である旋回失速とは本質的に異なるものである。また, R. C. には伝ば速度比が 1 以上の前回りモードとそれとは異なる後回りモードが存在することが示されている。同様の性質が非線形解析⁽⁵⁾ や三次元解析⁽⁶⁾⁽⁷⁾ でも見られているが, 後回りモードが実験で発生した例としては最近の Hashimoto ら⁽⁸⁾ の報告例があるにすぎない。

これまでの解析はすべて非圧縮流れ解析であった。しかし実際には流体にはわずかながら気泡が溶存しており, その流体が低圧にさらされると気泡が膨張するため, 流体は気泡の膨張・収縮に伴う圧縮性をもつ。したがって, この圧縮性が R. C. に及ぼす影響を調べておく必要がある。そこで本研究では, 流体を均質な気液二相流として扱うことにより流れの圧縮性を考慮し, セミアクチュエータディスク法を用いて二次元線形解析を行う。流れはインデューサ上流で渦なし, 下流で渦あり流れとする。また, 流れは非粘性流れであるとし, インデューサ内の損失は R. C. にはほとんど影響しない⁽⁴⁾ ので無視する。気液二相流の仮定としては気相液相間の滑りがなく, 液相の熱容量および熱伝導率が十分大きいと等温に保たれ, 相変化がないとする。

* 1996 年 3 月 22 日 関西支部第 71 期定時総会において講演, 原稿受付 1997 年 2 月 5 日。

^{*1} 正員, 大阪大学大学院(〒560 豊中市待兼山町 1-3)。

^{*2} 大阪大学大学院。

^{*3} 正員, 大阪大学大学院基礎工学研究科。

2. 記 号 表

A_1, A_2 : 翼列上下流の軸流速の圧力変動を伴う成分の無次元複素振幅
A_{c1}, A_{c2} : 翼列内部の圧力変動の無次元複素振幅
B_2 : 翼列下流の軸流速の渦度変動を伴う成分の無次元複素振幅
G_{1-4} : 式(17)で定義
h : ピッチ
K : キャビテーションコンプライアンス
k : 無次元周波数 $= sn/U$
$k_{res\pm}$: Resonance 周波数
k^* : 無次元伝ば速度 $= k_R^* + jk_I^*$
l : 翼弦長
M : マスフローゲインファクタ
M_c : 翼列内のマッハ数
M_{rel} : 相対流入マッハ数
M_x : 軸流マッハ数
n : 複素周波数
P : 定常圧力
p : 圧力
S : 翼列前縁のど部の面積
s : 変動の y 方向波長
U, V : x, y 方向平均速度
U_T : 周速
u, v : x, y 方向速度
V_c : キャビティ体積
W : 平均相対速度
W_p : じょう乱源の媒質に対する相対速度
w : 相対速度
α : 迎え角
β : 食違い角
$\bar{\beta}$: 定常相対流れ角
γ : 流れ角
δ : 変動成分
λ : x 方向波長
ξ : 翼弦方向座標
ρ : 密度

上付き添字

— : 定常成分

下付き添字

1, 2 : 翼列上流, 下流

 c : 翼列内部

3. 解析モデル

図1に示すように $x=0$ 上に置かれた直線軸翼列

(翼弦長 l , ピッチ h , 食違い角 β)が周速 U_T で y 軸正方向へ移動する場合を考える。本研究では低マッハ数流れを扱うため流れの定常成分としては簡便のために非圧縮流れで解いたものを使用し、流れの圧縮性は変動成分に対してのみ考慮する。したがって、主流の速度は翼列上流 ($x < 0$) で $(U, 0)$, 下流 ($x > 0$) で $(U, U \tan \gamma)$, 翼列内部では相対的に翼弦方向に $W_c = U \sec \beta$ である。定常圧力場はこれらの定常速度と定常密度を用いて Bernoulli の式から求めたものを使用する。

流れは均質な気液二相流であるとする。気相液相間で滑りがなく、液相の熱容量、熱伝導率が大いことを考慮して流体は等温に保たれるとし、相変化がない (クオリティ $\chi = \text{const.}$) とすると、圧力 p は流体全体の密度 ρ の関数として次式のように表される。

$$p = \frac{RT\chi\rho_l\rho}{\rho_l - (1-\chi)\rho} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 T は温度、 R は気相の気体定数、 ρ_l は液相の密度であり、式(1)により流体のパロトロピー性が保証される。したがって、Euler の運動方程式と連続の式および式(1)が流れの支配方程式となる。

4. 流れ場の変動量

4・1 翼列上・下流の変動 流れ場の諸量を定常成分と変動成分に分解し、変動成分が定常成分に対して十分小さいとして線形化を行う。変動成分の基礎式は次の線形化された Euler の方程式と連続の式および式(1)を線形化して得られる式で構成される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta u = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\delta p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta v = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\delta p}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta\rho + \bar{\rho}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\delta v}{\partial y}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\delta p = \frac{1}{f}\frac{P}{\bar{\rho}}\delta\rho = \bar{a}^2\delta\rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

Fig. 1 Analytical model

ここで、 δ は変動成分を意味する。また、 f はボイド率であり、ボイド率が小さい範囲では音速 a はボイド率の増加に伴い小さくなる。

流れ場の各変動成分を次の形で仮定する。

$$\exp 2\pi j(nt - y/s) \exp (2\pi \lambda x/s) \cdots \cdots (5)$$

ここで、 n は複素伝播周波数、 s は y 方向波長、 λ は x 方向波数であり、式(5)は周方向(y 軸正方向)に変動成分が伝ばする形となっている。

式(2)~(4)から δu , δv , δp を消去すると圧力変動に関する次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho} \left[\nabla^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \delta p = 0 \cdots \cdots (6)$$

この方程式の解が圧力変動を伴う素解であり、その波数は次のようになる。

$$\lambda_{\pm} = \frac{jM_x^2(k - \tan \gamma) \pm \sqrt{(1 - M_x^2) - M_x^2(k - \tan \gamma)^2}}{1 - M_x^2} \cdots \cdots (7)$$

ここで、 γ は流れ角、 $M_x = U/\bar{a}$ は軸流マッハ数である。また、 $k = k_R + jk_I$ は無次元複素周波数であり $k = sn/U$ である。 $\lambda_{\pm}$ は波数が二つあることを示しているが、これは圧力変動を誘起する波(以下圧力波とする)の発生源から出た圧力波が上・下流に伝わるためであり、したがって翼列上流の波数は圧力波が上流へ伝わるものを、下流の波数は下流へ伝わるものを選ばなければならない。次に波数 λ の選び方について述べる。

まず、圧力変動が時間的に増加、減衰しない場合、すなわち $n_I = k_I = 0$ のときを考える。

図2に y 軸上を移動する単一のじょう乱源から放出された圧力波の円形波面(Wave surface)を示す。この円形波面とじょう乱源の移動距離との兼ね合いにより流れ場の形態が決まり、 y 軸上のすべてのじょう乱源から出た円形波面を領域全体で重ね合わせることで、波数 λ の圧力変動が形成される。

図2(a)に示すように、じょう乱源が単位時間後にちょうど点Aもしくは点Bに到達する場合、あるいはじょう乱源の媒質に対する相対速度 W_p が音速 a と等しい場合を Resonance⁽⁹⁾ といい、このときの周波数を Resonance 周波数という。無次元化された Resonance 周波数は幾何学的にわかるように、次式で与えられる。

$$k_{res\pm} = \frac{V_p}{U} = \tan \gamma \pm \frac{\sqrt{1 - M_x^2}}{M_x} \cdots \cdots (8)$$

ただし、 $V_p = sn$ はじょう乱源の移動速度である。この Resonance 周波数は圧力変動の波数(7)の根号内の中身が零となる条件からも得られ、流れ場の形態は Resonance 周波数を境に区別される。

図2(b)に示すようにじょう乱源自身が放出した円形波面内にとどまる場合、あるいは $W_p < a$ の場合を Sub-resonance という。このとき周波数は $k_{res-} < k < k_{res+}$ の範囲にある。Sub-resonance の場合には圧力変動の波数(7)は根号内の中身が正であるため実部をもち、無限上下流で無限大に発散するものが一つずつ存在する。しかしじょう乱源の強さが y 方向に周期的であるため、すべてのじょう乱源からの圧力波は無限遠方で干渉して弱め合うと考えられる。したがって、圧力変動が無限遠で減衰するような λ を選択すればよく、これは波数(7)の実部で判断できる。

一方、図2(c)に示すようにじょう乱源が自身が放出した円形波面の外側に到達する場合、あるいは $W_p > a$ の場合を Super-resonance といい、周波数は $k < k_{res-}$ あるいは $k_{res+} < k$ の範囲にある。このとき、じょう乱源に対して上流側と下流側に、同一のじょう乱源から異なる時刻に発生した波面が干渉するため、いわゆる Mach wedge に相当する干渉波面(Interfering wave front(a), (b))が形成される。また、波数 λ は純虚数となり圧力変動が無限遠で増幅・減衰しない伝ば形波動解⁽¹⁰⁾ となる。したがって、翼列上流で

Fig. 2 Relationship between wave surface and disturbance source travelling along y -axis

Table 1 Selection of axial wave number λ

	Amplifying ($k_I < 0$)	Neutrally stable ($k_I = 0$)	Attenuating ($k_I > 0$)
Super-resonance ($k_R < k_{res-}$ or $k_{res+} < k_R$)			
Sub-resonance ($k_{res-} < k_R < k_{res+}$)			

Note: Vertical arrows '↑↑↑' mean time-amplifying or attenuating state.
Horizontal arrows '→' mean the extending direction of the interfering wave fronts (a) or (b).

は波面(a), 下流では波面(b)に相当するものを選択すればよいが, これは干渉波面のこう配と波数 λ から得られる等位相面のこう配が一致することから等位相面で判断可能である。

次に, 圧力変動が時間的に増幅する場合($k_I < 0$)や減衰する場合($k_I > 0$)を考える。この場合でも単一のじょう乱源と円形波面の関係や W_p は $k_I = 0$ のときと変わらないため, 流れ場が Super-resonance か Sub-resonance かは圧力変動の周波数と式(8)の Resonance 周波数とを比較することにより決定できる。Sub-resonance の場合には無限上下流で圧力変動が有限であるとし, 波数 λ の実部で適正な波数を選択する。一方, Super-resonance の場合には, 干渉波面のこう配と波数 λ から得られる等位相面のこう配が一致しないが, 複素周波数の虚部 k_I を零に近づけたときに前述した $k_I = 0$ のときの波数と一致する波数 λ を選べばよい。

以上の選択を行った結果を変動の振幅の x 方向の形態に着目してまとめたものを表1に示す。Sub-resonance の場合には, すべてのじょう乱源から発生した圧力波が互いに干渉し合って弱め合うために無限上下流で圧力変動がつねに減少することを示している。一方, Super-resonance の場合には各じょう乱源から生じた圧力波はおのおので干渉波面を形成するため, 異なるじょう乱源から出た圧力波の干渉による減衰はない。このため無限上下流の変動の振幅の大きさは過去に発生した圧力波の強さで決まり, 変動が時間的に増幅(減衰)する場合には無限上下流で減少(増加)する。したがって, 圧力変動が時間的に減衰する場合($k_I > 0$)には Sub-resonance と Super-resonance の境界で波数 λ が不連続となる。

次に, 圧力変動を伴わない素解を求める。これは渦度変動を伴う素解であり, 運動方程式(2)で圧力変動を零とし速度の変動成分を式(5)の形で代入して得られる。その結果, 次の波数が得られる。

$$\lambda = -j(k - \tan \gamma) \dots \dots \dots (9)$$

以上で圧力変動を伴う素解と, 渦度変動を伴う素解が求められることができたが, 一般に微小変動流れ場は, これら二つの重ね合わせで表される。

翼列上流($x < 0$)の流れは非回転であるとするので, 流れ場の各変動成分は圧力変動を伴う素解のみで表される。流れ場の変動成分は支配方程式(2)~(4)を満足することから次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_1}{\rho U^2} &= -\frac{jk + \lambda_1}{\lambda_1} A_1 \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_1 x/s} \\ \frac{\delta u_1}{U} &= A_1 \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_1 x/s} \\ \frac{\delta v_1}{U} &= -\frac{j}{\lambda_1} A_1 \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_1 x/s} \\ \frac{\delta \rho_1}{\rho} &= -\frac{jk + \lambda_1}{\lambda_1} M_{x1}^2 A_1 \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_1 x/s} \end{aligned} \dots \dots \dots (10)$$

ここで, A_1 は軸方向速度の変動成分の無次元振幅である。波数 λ_1 は上流軸流マッハ数 M_{x1} を用いて式(7)から求め, 翼列上流側で表1の変動となるよう選択する。

翼列下流($x > 0$)は翼列からの放出渦の存在のため回転流れ場であり, 流れ場の各変動成分は圧力変動を伴う素解と渦度変動を伴う素解の重ね合わせで表される。流れ場の変動成分は支配方程式(2)~(4)を満足することから次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_2}{\rho U_2} &= -\frac{j(k - \tan \gamma) + \lambda_2}{\lambda_2} A_2 \\ &\times \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_2 x/s} \\ \frac{\delta u_2}{U} &= \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) \left[A_2 e^{2\pi \lambda_2 x/s} + B_2 e^{2\pi \lambda_3 x/s} \right] \\ \frac{\delta v_2}{U} &= \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) \\ &\times \left[-\frac{j}{\lambda_2} A_2 e^{2\pi \lambda_2 x/s} - (k - \tan \gamma) B_2 e^{2\pi \lambda_3 x/s} \right] \\ \frac{\delta \rho_2}{\rho} &= -\frac{j(k - \tan \gamma) + \lambda_2}{\lambda_2} M_{x2}^2 A_2 \end{aligned}$$

$$\times \exp 2\pi j \left(nt - \frac{y}{s} \right) e^{2\pi \lambda_2 x / s} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 A_2 は軸方向速度の圧力変動を伴う変動成分の無次元複素振幅であり、 B_2 は渦度変動を伴う変動成分の複素振幅である。波数 λ_2 は下流軸流マッハ数 M_{x2} を用いて式(7)から求め、翼列上流側で表1の変動となるよう選択する。波数 λ_3 は式(9)から得られる。

4.2 翼列内部の流れ場

翼列内部では流れは完全に翼に沿うから、流れは翼弦方向 (ξ 方向) の一次元流れである。流れ場の各変動成分を次の形で表す。

$$\exp 2\pi j n^* t^* \exp (2\pi \lambda_c \xi / s) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 t^* は相対座標系での時間、 n^* は振動数であり $n^* = n - U_T/s$ である。流れ場の各変動成分は流れの支配方程式を満足することから次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_c}{\rho U^2} &= \exp 2\pi j n^* t^* \left[A_{c1} e^{2\pi \lambda_{c1} \xi / s} + A_{c2} e^{2\pi \lambda_{c2} \xi / s} \right] \\ \frac{\delta w_c}{W_c} &= \exp 2\pi j n^* t^* \left[-M_c A_{c1} e^{2\pi \lambda_{c1} \xi / s} \right. \\ &\quad \left. + M_c A_{c2} e^{2\pi \lambda_{c2} \xi / s} \right] \\ \frac{\delta \rho_c}{\rho} &= \exp 2\pi j n^* t^* \left[M_c^2 A_{c1} e^{2\pi \lambda_{c1} \xi / s} \right. \\ &\quad \left. + M_c^2 A_{c2} e^{2\pi \lambda_{c2} \xi / s} \right] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、 A_{c1} 、 A_{c2} は圧力変動の無次元複素振幅である。 ξ 方向の波数 λ_{c1} 、 λ_{c2} および翼弦方向のマッハ数 M_c は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda_{c1} &= \frac{j \frac{S n^*}{W_c} M_c}{1 - M_c} = j \frac{M_c}{1 - M_c} \cos \beta (k - \tan \bar{\beta}) \\ \lambda_{c2} &= \frac{j \frac{S n^*}{W_c} M_c}{1 + M_c} = -j \frac{M_c}{1 + M_c} \cos \beta (k - \tan \bar{\beta}) \\ M_c &= \frac{W_c}{\bar{a}_c} = W_c \sqrt{\frac{f \bar{\rho}}{P_c}} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

5. 境界条件

5.1 翼列前縁前後の連続の式

図3に示すような翼列前縁のど部(三角形領域)における連続の式を考

Fig. 3 Continuity equation at inlet of cascade

える。のど部の流体の密度を翼列内部の前縁 ($\xi=0$) の密度で同様であるとし、翼列内部へ流出する密度や流速も前縁での値を用いることにする。翼前縁に発生するキャビティの体積を V_c とすると、相対座標系で次の連続の式が成立する。

$$\rho_1 u_1 h - \rho_c w_c h \cos \beta = \frac{\partial^* \rho_c (S - V_c)}{\partial t^*} \dots\dots (15)$$

ここで、 $S = h^2 \cos \beta \sin \beta / 2$ は翼列前縁のど部の面積である。

キャビティ体積 V_c が迎え角 α とキャビテーション係数 $\sigma = 2(p_1 - p_v) / \rho_1 w_1^2$ の関数、すなわち $V_c = V_c(\alpha, \sigma)$ であるとする。キャビティ体積変化 δV_c を、その入口状態に対する応答が準定常的であるとして次のように表す。

$$\begin{aligned} \delta V_c &= h^2 (-K \delta \sigma + M \delta \alpha) \\ K &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial V_c}{\partial \sigma}, M = \frac{1}{h^2} \frac{\partial V_c}{\partial \alpha} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 K はキャビテーションコンプライアンス、 M はマスフローゲインファクタであり、これらを用いると式(15)は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\delta u_1}{U} + \frac{\delta \rho_1}{\rho} \right) - \left(\frac{\delta w_c}{W_c} + \frac{\delta \rho_c}{\rho} \right) \\ &= 2\pi j \frac{h}{s} (k - \tan \bar{\beta}) \left[\frac{S}{h^2} \frac{\delta \rho_c}{\rho} \right. \\ &\quad \left. - \left(G_1 \frac{\delta u_1}{U} + G_2 \frac{\delta v_1}{U} + G_3 \frac{\delta p_1}{\rho U^2} + G_4 \frac{\delta \rho_1}{\rho} \right) \right] \\ G_1 &= 2\sigma K \cos^2 \bar{\beta} - M \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} \\ G_2 &= -2\sigma K \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} - M \cos^2 \bar{\beta} \\ G_3 &= -2K \cos^2 \bar{\beta} \\ G_4 &= \sigma K \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

5.2 翼列前縁前後の圧力上昇

作動流体がバロトロピー流体であり、翼列前縁で圧力損失がないと仮定するため、前縁前後で Bernoulli の式が適用できる。線形化して変動成分だけにとると次式が得られる。

$$U \delta u_1 - U_T \delta v_1 + \frac{\delta p_1}{\rho} = W_c \delta w_c + \frac{\delta p_c}{\rho} \dots\dots\dots (18)$$

5.3 翼列後縁前後の条件

翼列後縁前後では以下の圧力の連続、連続の式、Kutta の条件が満足されなければならない。

$$\begin{aligned} \delta p_c &= \delta p_2 \\ \delta w_c \cos \beta &= \delta u_2 \dots\dots\dots (19) \\ \delta v_2 &= -\delta u_2 \tan \beta \end{aligned}$$

6. 解析方法と解析条件

流れ場の変動成分(10)、(11)、(13)を、流れ場の境界条件式(17)～(19)に代入することにより、各変動成分の無次元複素振幅に関する連立一次方程式が得られ

Table 2 Conditions for present analysis

Design parameters of cascade	
Stagger, β	79.73 [deg.]
Chord, l/s	0.815
Pitch, h/s	0.333
Flow condition	
Flow rate, U/U_T	0.110
Cavitation number, σ	0.04

る。自明でない解が存在する条件, すなわち連立一次方程式の係数行列式が零となることから, 無次元複素周波数 k に関する特性方程式が導かれ, この k を求めて安定判別を行う。

複素伝ば速度比 k^* は次式で求められる。

$$k^* = k_R^* + jk_I^* = \frac{sn}{U_T} = k \frac{U}{U_T} \dots\dots\dots (20)$$

ここで, k_R^* は伝ば速度比を示し, $k_R^* > 1$ のときそのモードは前回りモード, $k_R^* < 1$ のとき後回りモードである。また, k_I^* は減衰率を示しており, $k_I^* < 0$ のときそのモードは変動が増加する不安定なモードである。

基本的な解析条件を表2にまとめる。解析のパラメータとしては, キャビテーションコンプライアンス K およびマスフローゲインファクタ M と, 流れの圧縮性を与えるボイド率 f がある。後者の圧縮性を与えるパラメータについてはボイド率 f を用いずに, 次の相対流入マッハ数を導入することにする。

$$M_{rel} = \sqrt{\frac{U^2 + U_T^2}{a_1^2}} \dots\dots\dots (21)$$

これにより, 圧縮性の効果は相対流入マッハ数を介して考慮されることになる。流れが等温に保たれるという仮定は音速 a を求める際に用いるだけであるから, この相対流入マッハ数を圧縮性を表すパラメータとしておけば, 他の熱力学的条件の場合でも, 本解析法および解析結果をそのまま適用することができる。

7. 解析結果と考察

7.1 特性方程式の解の同定 特性方程式には解が多数存在するので, まずそれらの分類を行う。

図4にキャビテーション特性を $(K, M) = (0.1, 0.1)$ とし相対流入マッハ数が $M_{rel} = 0.0 \sim 0.4$ の範囲の特性方程式の解を示す。図4を見るとわかるように解はI～VIの6種類あるが, それらは以下に述べるように分類できる。

まず, 解I～IIIについて見ると, 非圧縮への極限 ($M_{rel} \rightarrow 0$) をとった場合に, 解I～IIIがそれぞれ非圧縮流れ解析⁽⁴⁾で得られた前回りのR.C., 後回りの

Fig. 4 Solutions of characteristic equation $[(K, M) = (0.1, 0.1), M_{rel} = 0.0 \sim 0.4]$

Fig. 5 Solutions of characteristic equation $[(K, M) = (0.1, 1.0), M_{rel} = 0.0 \sim 0.4]$

R.C., 旋回失速の解と一致していることがわかる。したがって, 解Iが前回りのR.C., 解IIが後回りのR.C., 解IIIが旋回失速であると同定できる。

次に解IVを見ると, 解IVは翼列下流で圧力変動を伴う素解の波数 λ_2 と渦度変動の素解の波数 λ_3 が等しい解であり, その伝ば速度比は次のようになる。

$$k^* = (\tan \gamma - j)U/U_T \dots\dots\dots (22)$$

しかし, この解は元の連立方程式に代入するとわかるように, 圧力変動を伴う素解と渦度変動を伴う素解が互いに打ち消しあって零となる解である。したがって, 流れ場の変動成分が零となりこの解は物理的意味を持たないため, 以下ではこの解については省略することにする。

次に解V, VIについて見る。解V, VIの伝ば速度比を見ると, 相対座標で見た伝ば速度比 ($k_R^* - 1$) が, 翼間流れを長さ l に等しい断面積が一定の直管内の一次元流れとみなしたときの両端自由端の気柱振動の一次の固有振動数に近いことがわかる。また, 伝ば速度比の絶対値が大きい範囲でもこの気柱振動の高次の固有振動数に近い解が存在することがわかっており, したがって解V, VIは翼間内の気柱振動と翼列上流, 下流の流れが連成したモードであるといえる。解

Table 3 Classification of solutions

I	Conventional forward rotating cavitation
II	Conventional backward rotating cavitation
III	Rotating stall
IV	Solution with no flow disturbances
V, VI	Natural vibrations of 1-D cascade flow coupled with upstream and downstream flow
VII	Unknown forward rotating cavitation

 Fig. 6 Neutrally stable points of conventional R. C. I and II [$K=0.1$, $M_{rel}=0.0\sim0.4$]

V, VIは著者らが解析を行った諸条件の範囲ではつねに安定であったため、以下ではこれらの解についても省略することにする。

一般には、特性方程式の解は以上に示された6種類存在するが、キャビテーション特性 M/K が比較的大きい場合には7番めの解VIIが存在することが判明した。その例として、キャビテーション特性を $(K, M)=(0.1, 1.0)$ とした場合の特性方程式の解を図5に示す。

解VIIは前回モードであるが、相対流入マッハ数 M_{rel} が大きい範囲で存在しており、その伝ば速度比は比較的大きいが M_{rel} が大きくなるにつれて小さくなっている。この伝ば速度比と式(8)のResonance周波数を比べるとわかるように、翼列上流でSuper-resonance、下流でSub-resonanceとなっている。このことは、非圧縮流れ解析で見られる従来のR.C.に相当する解I, IIが翼列上下流両方においてSub-resonanceとなっているのとは異なっている。したがって、解VIIは新たなR.C.の解である可能性があり、従来のR.C.との違いは翼列上流の流れにあるといえる。しかし、翼列上流においてSuper-resonanceとなっているR.C.が実験で発生したという報告はなく、この解の存在については今後も検証していく必要がある。

また、図5のように M/K が比較的大きい場合には、従来のR.C.の前回モードである解Iが圧縮性の影響をほとんど受けていないのがわかる。それに対し後回りのR.C.である解IIは図4のときと比べて圧縮性の影響を強く受けており、相対流入マッハ数が

(a) Solutions I, II, VII

(b) Enlarged figure about the origin of Fig. 7(a)

 Fig. 7 Solutions of Equation (23), compared with those of characteristic equation [$(K, M)=(0.1, 1.0)$, $M_{rel}=0.0\sim0.4$]

$M_{rel}=0.2$ のあたりを境に上流側の流れがSub-resonanceからSuper-resonanceになっている。この理由は今のところよくわからないが、新たなR.C.の解VIIの存在と関連しているものと思われる。

以上に見られた解I～VIIを表3にまとめる。

7.2 圧縮性の影響について まず、従来のR.C.の解I, IIの安定性を見るために中立安定点(k_R^* , M)を求めた結果を図6に示す。この中立安定点の M よりマスフローゲインファクタが小さい範囲ではそのモードは安定である。したがって、この中立安定点の M が大きくなるとそのモードの安定領域が拡大することになる。図6はキャビテーションコンプライアンスを $K=0.1$ とし、相対流入マッハ数を $M_{rel}=0.0\sim0.4$ としたときの結果である。図6から、R.C.の解I, IIの安定領域は圧縮性の影響をほとんど受けていないことがわかるが、相対流入マッハ数 M_{rel} が大きくなり圧縮性が強くなるとわずかながら拡大し、この傾向は前回R.C.の解Iのほうが顕著である。つまり、流体の圧縮性がR.C.を安定化することになるが、これは流体が圧縮性をもてば流体自身がコンプライアンスをもつことになり、それによって系全体のコンプ

ライアンスが増加するためであると考えられる。

次に、新たな R. C. の解 VII も含めた流体の圧縮性の効果の調査を容易にするために、問題の簡便化を行う。R. C. 発生時には、インデューサ下流の圧力変動は上流の圧力変動に比べて小さく⁽¹⁾、非圧縮流れ解析⁽⁴⁾では翼列下流の変動を無視しても R. C. の解が得られている。そこで本研究でもこれらの事実をふまえて、翼列下流および翼列内部の流れの変動成分を無視し、 $\delta\rho_c=0$, $\delta p_c=0$ とおくと、連続の式(17)のみから次の特性方程式が得られる。

$$2\pi j \frac{h}{s} (k - \tan \bar{\beta}) \left(G_1 - \frac{j}{\lambda_1} G_2 - \frac{jk + \lambda_1}{\lambda_1} G_3 - \frac{jk + \lambda_1}{\lambda_1} M_{x1}^2 G_4 \right) + \left(1 - \frac{jk + \lambda_1}{\lambda_1} M_{x1}^2 \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

この方程式を、 λ_1 内の根号を外すように変形すると複素周波数 k に関する四次方程式が得られるので、方程式(23)の解を得るには四次方程式の解の内から式(23)を満足するものを選べばよい。

図 7 (a), (b) に方程式(23)の解を示す。解析条件についてはキャビテーション特性を $(K, M) = (0.1, 1.0)$ とし、相対流入マッハ数を $M_{rel} = 0.0 \sim 0.4$ としている。図 7 には、従来の特性方程式の解のうち R. C. に相当する解 I, II, VII も示しているが、それらと方程式(23)の解がよく一致しているのがわかる。

次に、図 7 (a) を見ると、相対流入マッハ数 M_{rel} が比較的小さい間 ($M_{rel} = 0.19 \sim 0.20$ 程度) に後回りの安定なモードとして解 VII が存在することがわかる。 $M_{rel} = 0.19$ という値は波数 λ_1 が $k_I > 0$ の範囲で Super-resonance と Sub-resonance の間で不連続になることに起因している。解 VII は $M_{rel} = 0.2$ 付近でその伝ば速度比 k^* が $-\infty$ となって消え去りそれと同時に伝ば速度比が $+\infty$ である不安定な解として現れ、 M_{rel} が大きくなるにつれて伝ば速度比が小さくなっていく。伝ば速度比が無限大となる原因としては式(23)の解を得るために解く四次方程式の四次の係数が零である可能性が考えられる。(四次方程式の四次の係数) = 0 の式において、解 VII が存在するのは M/K が比較的大きい場合でありキャビテーション係数 σ は 0.01 ~ 0.1 程度であることから $\sigma = 0$ とすると、次式が得られる。

$$M_{x1} = 2 \frac{K}{M} \cot \bar{\beta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

不安定な前回りの R. C. の解 VII は翼列上流で軸流マッハ数がこの値を超えると存在することから、その存在

条件は次式で与えられる。

$$M > 2 \frac{K}{M_{rel}} \cot \bar{\beta} \sqrt{1 + \tan^2 \bar{\beta}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

上式を図 7 の場合に合せて概算すると $M_{rel} > 0.201$ という値が得られるが、これは図 7 に見られる解 VII の存在範囲とよく一致している。上式は文献(4)の式(17)と類似している。

8. 結 言

本研究で得られた結果を以下にまとめる。

(1) 特性方程式の解は特殊な場合を除いて計 6 種存在した。それらは、I, II が非圧縮流れで見られる前回り、後回りの R. C., III が旋回失速、IV が流れ場の変動が零の解、V, VI が翼間の一次元流れの固有振動と翼列上流と下流の流れが連成した解であることが判明した。

(2) M/K が大きい場合には(1)の 6 種のほかに新たな前回りの不安定な解 VII が存在することが判明した。このモードは翼列上流の流れが Super-resonance となっており、Sub-resonance である従来の R. C. とは異なるものである。また、その存在条件も示したが、このモードは実験では確認されていない。

(3) 従来の R. C. の解 I, II の安定性を調べたところ、圧縮性が強くなると、R. C. の安定領域が拡大することが判明した。これは翼のキャビティのコンプライアンスに作動流体のコンプライアンスが加わるためであると考えられる。しかし、この傾向はわずかであった。

本研究を行うに当たり数々の有益なご議論をいただいた東北大学流体科学研究所の上條謙二郎教授に心から感謝する。また、本研究は平成 8 年度文部省科学研究費基盤研究(B)(2)の援助を受けた。記して謝意を表す。

文 献

- (1) Kamijo, K., ほか 2 名, *AIAA J. Prop. Power*, **9**(1993), 819-826.
- (2) Ryan, R. S., ほか 3 名, *AIAA Paper*, 94-3153(1994).
- (3) Goirand, B., ほか 3 名, *IMEchE*, C453/056(1992), 263-269.
- (4) Tsujimoto, Y., ほか 3 名, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **115**(1993), 135-141.
- (5) Tsujimoto, Y., ほか 3 名, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **118**(1996), 589-594.
- (6) 渡辺聡・ほか 2 名, 機論, **61**-591, B(1995), 3900-3907.
- (7) 渡辺聡・ほか 2 名, 機論, **62** 600, B(1996), 3064-3069.
- (8) Hashimoto, T., ほか 4 名, *AIAA Paper*, 96-2674(1996).
- (9) 辻本良信・村田暹, 機講論, No. 760-15(1976), 160-167.
- (10) 梶昭次郎・岡崎卓郎, 機論, **38** 309, 2(1971), 1023-1033.