渦法における渦度生成に関する一考察*

木田輝彦^{*1}, 中西正人^{*2}, 倉田光雄^{*3}

Vortex Generation on the Surface of Bodies in the Vortex Method

Teruhiko KIDA, Masato NAKANISHI and Mituo KURATA

The aim of the present work was to analyze the generation of vorticity on the surface of bodies. The fluid flow examined is viscous incompressible fluid and the local solution near the surface of bodies is considered. The solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation are constructed by means of a boundary layer equation for three initial vorticity fields, $\omega_0(x, y) = -\omega_0(x, -y)$, $\omega_0(x, y) = \omega_0(x, y)$ and $\omega_0(x, y) = 0$ for $y < 0$, where ω_0 is the initial vorticity and (x, y) is in the local coordinate system (x is tangential and y is normal). The results of the present analysis show that the vorticity generated on the boundary is determined by the slip velocity in these three initial cases for very small time lapse. This implies that the vorticity generated at the boundary is not dependent on the flow field models in numerical calculations. The present local solutions are applicable to the three-dimensional local flow near the boundary and the same conclusion is easily derived except flows near singular points such as separation and stagnation points.

Key Words: Vorticity Degeneration, Vortex Method, Local Solution, Boundary Layer

1. はじめ

渦法は、鈍体まわりの流れや振動する物体と流体振動との連成問題などの数値シミュレーションに広く用いられ、多くの成果が得られている。また、理論的研究もなされ、ナビエ・ストークスの方程式との関連についても明らかにされてきた⁽¹⁾⁽²⁾。

渦法は渦度場を直接取り扱うため、流れの強いせん断層を直接模擬出来る。また、数値計算のための格子形成等の操作を必要とせず、計算スキームが簡潔であるという特徴を持っている。さらに、数値粘性を原理的には含まないため、高レイノルズ数流れのシミュレーションに適した計算手法として期待される。この渦法に関しては、すでに優れた解説が多く報告されている⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、物体まわりの流れで重要な物体表面から渦生成に関しては、まだ十分には研究されていない。

渦法では通常 split 法が用いられる。この split 法における渦生成に関連する基礎的研究は、Chorin ら⁽⁶⁾に

よってなされ、その後、渦生成に関する種々の手法の提案がなされている。Anderson⁽⁷⁾は、境界で生成される渦度を求めるため、流体全体の流れ場を考慮した積分表示式を導出している。また、Puckett⁽⁸⁾は Chorin 提案の渦シート法⁽⁹⁾について、境界層理論の枠組みの中で解析し、その精度や収束性について明らかにしている。一方、渦生成に関する理論的研究には、Benfatto と Pulvirenti⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾によるものがある。彼らは二次元無限平板を取り上げた。この場合、平板表面近傍では慣性項が小さいので、基礎方程式は Stokes 形の方程式となる。この方程式を用い、生成渦に関する理論解析を行い、Chorin ら⁽⁶⁾の split 法に関するアルゴリズムについての収束性を明らかにしている。この研究では、壁面の滑り速度成分が常に零になるように渦度場を平板の下面に拡張し解析している。従って、壁面の法線方向速度成分が零になる条件から基礎式が導出されている。

渦法では、流れ場を物体内部まで拡張し、流れ場を求める方法が多く採用される。Chorin ら⁽⁶⁾は物体内部に逆強さの渦度を仮想している。Benfatto らの解析⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾では、物体の内部に同じ強さの渦度を設定した流れを取り扱っている。また、物体内部に流れ場を拡張しなく、パネル法などと組み合わせる方法も採ら

* 原稿受付 1996年12月12日。

*¹ 正員、大阪府立大学工学部(〒593 堺市学園町1-1)。*² 准員、大阪府立大学大学院。*³ 正員、摂南大学工学部(〒572 寝屋川市池田中町17-8)。

れている。従って、流れ場のモデルによって、物体表面の滑り速度が異なる。Chorin ら⁽⁶⁾は、物体表面の滑り速度に対応して渦度を物体表面から生成させればよいと主張しているが、流れのモデル化に従って物体表面の滑り速度が異なる場合でも、この滑り速度に対応して渦を生成させればよいのかという点は解明されていない。そこで、本報では、Benfatto と Pulvirenti⁽¹⁰⁾の手法を適用し、渦度場の種々のモデルに対応する生成渦について解析し、理解しやすい形で解を提示する。ここでは、Benfatto らと同様に物体表面近傍に着目し、二次元無限平板上の流れを考える。渦度場のモデルとして、次の三種類の場合を取り上げる：(1) Chorin 提案のモデル（ケース 1）、(2) Benfatto らの取り扱ったモデル（ケース 2）と (3) 物体内部には渦度を置かないモデル（ケース 3）である。ここで得られた結果を要約すると、どのモデルにおいても滑り速度に対応して生成渦を定めるとよい、また、物体表面近傍の局所流れが滑らかな場合には三次元流れでもこの結果は利用できる。

2. 基礎方程式と境界条件

Fig. 1 Physical state and coordinate system

本研究では、図 1 に示すような滑らかな物体表面近傍の滑らかな局所流れを考える。物体表面上に原点 O を、接平面上の流れの主流方向に x 軸、また、法線方向に y 軸を取る。つまり、物体近傍の初期の渦度場の渦線方向を z 軸に取る。ここで、代表速度として適当な速度 U_0 を、物体の代表長さに比べ十分に小さい長さ l_0 を代表長さにとる。また、代表時間として l_0^2/ν をとり、圧力は $\rho U_0 \nu / l_0$ で無次元化する。ここで、 ν は動粘性係数、 ρ は密度である。このとき、Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{l_0 U_0}{\nu} (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} = -\text{grad} p + \Delta \vec{u} \quad \text{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

となる。ここで、 $l_0 U_0 / \nu \ll 1$ となるような物体表面に近い局所解に注目する。このとき、基礎方程式は次のように近似される。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad} p + \Delta \vec{u} \quad \text{div} \vec{u} = 0 \quad (2)$$

特に、式 (1) の左辺の第二項は、滑りなしの条件から物体表面の極近傍では非常に小さいので無視でき、上述の近似 (式 (2)) は妥当であろう。また、滑らかな流れを対象としているので、主流方向流れ (x 成分) に比べ、接平面に沿った主流に直交する速度成分 (z 成分) は、 x 方向速度成分や法線方向成分 (y 成分) に比べて高次の微小量と考えられる。つまり、局所流れ場では、渦度の z 成分が他の成分に比べ非常に大きいと仮定している。物体形状は滑らかであるので、よどみ点や剥離点近傍の流れを除いた大部分の局所流れにこの仮定は適用出来ると考えられ、流れの主要部は無限平板上の二次元流れと考えられる。

この流れの境界条件は、滑りなしから

$$\vec{u} = 0 \quad (y = 0) \quad (3)$$

で与えられる。

外部流れによる局所流れに対する影響は、局所流れの $y \rightarrow \infty$ における境界条件によって与えられる。原点近傍で、外部流れの速度場が $(U_0, 0, 0)$ で与えられるとすると、局所流れの境界条件は

$$\vec{u} \rightarrow U_0 \vec{e}_1 \quad (y \rightarrow \infty)$$

となる。ただし、 $\vec{e}_1$ は x 方向の単位ベクトルである。ここで、

$$\vec{u} = (\hat{u}(y, t) + U_0) \vec{e}_1 + \vec{\tilde{u}}(x, y, t)$$

として、 $\vec{\tilde{u}}$ と $\hat{u}$ を定義する。このとき、それぞれの基礎式は、式 (2) から次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} &= -\text{grad} p + \Delta \vec{\tilde{u}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \end{aligned}$$

また、境界条件は

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{u}} &= 0, \quad \hat{u} = -U_0 \quad (y = 0) \\ \vec{\tilde{u}} &\rightarrow 0, \quad \hat{u} \rightarrow 0, \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。 $\hat{u}$ は Rayleigh の解を利用すると容易に求められる。

$$\hat{u} = -U_0 \text{erfc}(\eta), \quad \eta = \frac{y}{2t^{1/2}}$$

$\vec{\tilde{u}}$ に関する基礎式の回転を取ると、渦度輸送方程式が得られる。

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \Delta \vec{\omega} + F(x, t) \delta(y) \quad (y \geq 0) \quad (4)$$

ただし、 $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{\tilde{u}}$ と定義され、本局所流れでは $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ である。ここで、 $\vec{e}_3$ は z 方向の単位ベクトルである。 δ は Dirac のデルタ関数で、 $y \geq 0$ で定義されている (

$\int_0^\infty f(y)\delta(y)dy = f(0)$ 。また、式 (4) の右辺第 2 項は粘着条件 (3) より、壁面上に生成される渦度である。

Fig. 2 Physical models of vorticity field

本報では、図 2 に示すような、3 種類の渦度場に関するモデルについて考える。

ケース 1 $\omega_0(x, y) = -\omega_0(x, -y); y \geq 0$

ケース 2 $\omega_0(x, y) = \omega_0(x, -y); y \geq 0$

ケース 3 $\omega_0(x, y) = 0; y < 0$

ここで、 ω_0 は初期渦度場である。ケース 1 は Chorin ら (6) のモデルで、ケース 2 は Benfatto ら (10) (11) によるモデルである。ケース 3 は物体内部に流れ場を拡張しないモデルである。これらの各モデルに対する壁面上の渦度の生成項は、流れ場の物体内部への拡張を考慮すると

ケース 1 $F(x, t) = f(x, t)\text{sgn}(y)$

ケース 2 $F(x, t) = 2f(x, t)$ (5)

ケース 3 $F(x, t) = f(x, t)$

によって与えられる。ここで、 f は物体表面 ($y = +0$) で生成される渦度である。また、局所流れの渦度場には次の条件が課せられる。

$$\omega \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (6)$$

速度場は、この局所渦度による項とポテンシャル流れ場による項で表現できる。渦度場から誘起される速度場 (u_w, v_w) は Biot-Savart の式から

$$(u_w, v_w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi, \eta) \times \frac{(-y + \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \quad (7)$$

となる。ポテンシャル流れ場による速度場を (u_p, v_p) で表すと、速度場 $\vec{u} = (u, v)$ は次のようになる。

ケース 1:

$$(u, v) = (u_p, v_p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \omega(\xi, \eta) \left(\frac{(-y + \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{(-y - \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) d\eta \quad (8)$$

ケース 2:

$$(u, v) = (u_p, v_p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \omega(\xi, \eta) \left(\frac{(-y + \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) d\eta$$

$$+ \frac{(-y - \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} d\eta \quad (9)$$

ケース 3:

$$(u, v) = (u_p, v_p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \omega(\xi, \eta) \times \frac{(-y + \eta, x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\eta \quad (10)$$

従って、境界条件式 (3) は次のようになる。

ケース 1:

$$0 = u_p(x, 0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi$$

$$0 = v_p(x, 0) \quad (11)$$

ケース 2:

$$0 = u_p(x, 0)$$

$$0 = v_p(x, 0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \quad (12)$$

ケース 3:

$$0 = u_p(x, 0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi$$

$$0 = v_p(x, 0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \quad (13)$$

ポテンシャル流れ場では、与えられた無限遠での条件の下で、 $y = 0$ で u_p が与えられると v_p が定まり、また、 v_p が与えられると u_p が求まる。ここでは、 $(u, v) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow \infty$) の外部条件が課せられているので、ケース 1 およびケース 2 の u_p と v_p はいずれも零となる。ここでは、次のようなより一般的な場合の積分方程式を考える。

ケース 1:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi = -u_p(x, t) \quad (14)$$

ケース 2:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi = -v_p(x, t) \quad (15)$$

ケース 3 の場合、 $y = 0$ での v_p が式 (13) より与えられる。式 (6) より、 $u_p \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) であるので、 u_p が次式で求められる。

$$u_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_p(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (16)$$

従って、式 (13) から求められた v_p を上式 (16) に代入すると、 u_p は

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \quad (17)$$

となる。従って、ケース 3 の場合の境界条件は次式で表現される。

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \quad (18)$$

この結果は式 (14) の場合の特別な場合に当たる。従って、上述のケース 1 と 2 の場合を解析すればよいことになる。

3. 積分方程式の構成

この章では式 (14) と (15) から、生成渦 f に関する基礎式を導く。式 (4) の基本解 $G(x, y; t)$ は次式で示される。

$$G(x, y; t) = g(x, t)g(y, t) \quad (19)$$

ただし、 g は

$$g(x, t) = \frac{1}{2(\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (20)$$

である。この基本解を利用すると、式 (4) の解は Green の式を利用して、次のように求められる。

ケース 1:

$$\begin{aligned} \omega = & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} \omega_0(x', y') (g(y - y', t) - g(y + y', t)) \\ & \times g(x - x', t) dy' + \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} f(x', s) \\ & \times g(x - x', t - s) g(y, t - s) dx' \end{aligned} \quad (21)$$

ケース 2:

$$\begin{aligned} \omega = & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} \omega_0(x', y') (g(y - y', t) + g(y + y', t)) \\ & \times g(x - x', t) dy' + 2 \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} f(x', s) \\ & \times g(x - x', t - s) g(y, t - s) dx' \end{aligned} \quad (22)$$

これらの式 (21) と (22) を式 (14) と (15) に代入すると、 f に関する積分方程式が導出される。

ケース 1:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} f(x', s) dx' \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \\ & g(\xi - x', t - s) g(\eta, t - s) d\xi \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dy' \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \\ & \times \omega_0(x', y') (g(\eta - y', t) - g(\eta + y', t)) \\ & \times g(\xi - x', t) d\xi - u_p(x, t) \end{aligned} \quad (23)$$

ケース 2:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} f(x', s) dx' \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \\ & g(\xi - x', t - s) g(\eta, t - s) d\xi \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dy' \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \\ & \times \omega_0(x', y') (g(\eta - y', t) + g(\eta + y', t)) \\ & \times g(\xi - x', t) d\xi - v_p(x, t) \end{aligned} \quad (24)$$

4. 解の構成

ケース 2 に関しては、すでに Benfatto ら⁽¹⁰⁾により $v_p = 0$ の場合について解析されているので、ここでは、ケース 2 に関しては理解し易い形で解を表現し直し、壁面での滑り速度との関係を明らかにする。ケース 1 の場合の解は求められていないので、Benfatto ら⁽¹⁰⁾の解析手法を用い、フーリエ変換とラプラス変換を利用し、式 (23) の解を求める。

4.1 ケース 1

まず、 $1/(x^2 + a^2)$ のフーリエ変換が、 k を変数として表すと (13)、

$$(\pi/2)^{1/2} \exp(-a|k|)/a \quad (a > 0)$$

である。この結果と、畳み込みの関係を利用すると、

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - x', t - s) \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi\right\} \\ & = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\eta) \exp(-(t - s)k^2 - |\eta||k|) \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで、記号 $\mathcal{F}$ はフーリエ変換を意味する。従って、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - x', t - s) \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik(x - x') - (t - s)k^2 \\ & \quad - |\eta||k|) dk \end{aligned} \quad (26)$$

さらに、次の関係式を利用する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} g(\eta, t - s) \exp(-\eta|k|) d\eta \\ & = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp((t - s)k^2) \varphi((t - s)^{1/2}|k|) \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 $\varphi(x) = \int_x^{\infty} \exp(-x^2) dx$ である。このとき、式 (23) の左辺は次のようになる。

式 (23) の左辺

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx') f(x', s) dx' \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi((t - s)^{1/2}|k|) \exp(-ikx) dk \end{aligned} \quad (28)$$

従って、ここで、未知関数 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ とする。このとき、

式 (23) の左辺

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2^{1/2}\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, s) \varphi((t - s)^{1/2}|k|) \\ & \quad \times \exp(-ikx) dk \end{aligned} \quad (29)$$

となる。次に、式 (23) の右辺を $h(x, t)$ とし、そのフーリエ変換を $\hat{h}$ とする。

$$\begin{aligned} h(x, t) & \equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \hat{h}(k, t) dk \end{aligned} \quad (30)$$

この定義式と式 (29) を用い、式 (23) を書き改めると次式を得る。

$$\int_0^t \tilde{f}(k, s) \varphi((t-s)^{1/2}|k|) ds = \pi^{1/2} \tilde{h}(k, t) \quad (31)$$

この両辺にラプラス変換を施す。ラプラス変換後を～を付けて記す。このとき、Benfatto 等⁽¹⁰⁾により求められている φ に関するラプラス変換を利用すると、次のように未知関数 f が求められる。

$$\tilde{f}(k, p) = 2(p + k^2 + |k|(p + k^2)^{1/2}) \tilde{h}(k, p) \quad (32)$$

次に、もう少し具体的に $\tilde{h}$ を求めてみる。まず関数 h の定義式から

$$\begin{aligned} h(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dy' \int_0^{\infty} d\eta \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \omega_0(x', y') \\ &\quad \times (g(\eta - y', t) - g(\eta + y', t)) \\ &\quad \times g(\xi - x', t) d\xi - u_p(x, t) \end{aligned} \quad (33)$$

この式に式 (26) を用いると、

$$\begin{aligned} h(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_0(x', y') dx' dy' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik(x-x') - tk^2) dk \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp(-\eta|k|) \\ &\quad \times (g(\eta - y', t) - g(\eta + y', t)) d\eta \\ &\quad - u_p(x, t) \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、次の関係を利用する。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(\eta - y', t) \exp(-\eta|k|) d\eta \\ = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp(-y'|k| + tk^2) \varphi\left(|k|t^{1/2} - \frac{y'}{2t^{1/2}}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

この結果、 $\tilde{h}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k, t) &= -\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}_0(k, y') \\ &\quad \times \left(\exp(-|k|y') \varphi\left(t^{1/2}|k| - \frac{y'}{2t^{1/2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp(|k|y') \varphi\left(t^{1/2}|k| + \frac{y'}{2t^{1/2}}\right) \right) dy' \\ &\quad - \tilde{U}(k, t) \end{aligned} \quad (36)$$

ただし、 $\tilde{\omega}_0(k, y)$ と $\tilde{U}(k, t)$ は $\omega_0(x, y)$ と $u_p(x, t)$ の x に関するフーリエ変換である。

ここで、次の関係を利用する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\varphi\left(|k|t^{1/2} - \frac{y'}{2t^{1/2}}\right)\right) \\ = \frac{\pi^{1/2}}{p} - \frac{1}{2p} \int_0^{\infty} \exp\left(-p\xi - \xi k^2 + y'|k| - \frac{y'^2}{4\xi}\right) \\ \times \frac{1}{\xi^{1/2}} \left(|k| + \frac{y'}{2\xi}\right) d\xi \quad (y' > 0) \\ \mathcal{L}\left(\varphi\left(|k|t^{1/2} + \frac{y'}{2t^{1/2}}\right)\right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2p} \int_0^{\infty} \exp\left(-p\xi - \xi k^2 - y'|k| - \frac{y'^2}{4\xi}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\xi^{1/2}} \left(|k| - \frac{y'}{2\xi}\right) d\xi \quad (y' > 0) \end{aligned}$$

ただし、記号 $\mathcal{L}$ はラプラス変換を意味し、変換場の変数は p である。この結果、 $\tilde{h}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k, p) &= -\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}_0(k, y') \\ &\quad \times \left(\frac{\pi^{1/2}}{p} \exp(-y'|k|) - \frac{y'}{2p} \right. \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(p+k^2\right)\xi - \frac{y'^2}{4\xi}\right) \frac{1}{\xi^{3/2}} dy' \\ &\quad \left. - \tilde{U}(k, p) \right) \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、 $\tilde{U}(k, p)$ は $\tilde{U}(k, t)$ のラプラス変換である。ここで、次の積分を利用する (付記 1 参照)。

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) \xi^{-3/2} d\xi = 2 \frac{\pi^{1/2}}{z} \exp(-z) \quad (39)$$

この関係式 (39) を式 (38) に代入すると最終的に

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k, p) &= -\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}_0(k, y') \\ &\quad \times \left(\frac{\pi^{1/2}}{p} \exp(-y'|k|) - \frac{\pi^{1/2}}{p} \right. \\ &\quad \times \exp(-(p+k^2)^{1/2}y') \left. \right) dy' - \tilde{U}(k, p) \end{aligned} \quad (40)$$

となる。従って、式 (32) から、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k, p) &= -2 \int_0^{\infty} \tilde{\omega}_0(k, y') \\ &\quad \times \left(\exp(-y'|k|) \left(1 + \frac{k^2}{p} + \frac{|k|}{(p+k^2)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k^2|k|}{p(p+k^2)^{1/2}} \right) - \exp(-(p+k^2)^{1/2}y') \right. \\ &\quad \times \left(1 + \frac{k^2}{p} + \frac{|k|}{(p+k^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k^2|k|}{p(p+k^2)^{1/2}} \right) \right) dy' \\ &\quad - 2(p+k^2+|k|(p+k^2)^{1/2}) \tilde{U}(k, p) \end{aligned} \quad (41)$$

4.2 ケース 2

ケース 2 の場合、基礎の積分方程式は式 (24) で与えられている。この方程式の解は、すでに Benfatto 等⁽¹⁰⁾ によってフーリエ・ラプラス変換場では求められている。

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k, p) &= -i \operatorname{sgn}(k) (p + k^2 + |k|(p + k^2)^{1/2}) \\ &\quad \times \tilde{h}(k, p) \end{aligned} \quad (42)$$

このケースでは、式 (24) の右辺の h は次のようになる。

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-ik(x-x')) \\ &\quad \times \omega_0(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) \\ &\quad \times \left(\exp(-y'|k|) \varphi\left(t^{1/2}|k| - \frac{y'}{2t^{1/2}}\right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \exp(y'|k|) \varphi \left(t^{1/2}|k| + \frac{y'}{2t^{1/2}} \right) dk \\ - v_p(x, t) \quad (43)$$

この結果、 $\hat{h}$ は

$$\hat{h}(k, t) = \frac{i}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(k, y') \operatorname{sgn}(k) \\ \times \left(\exp(-y'|k|) \varphi \left(t^{1/2}|k| - \frac{y'}{2t^{1/2}} \right) \right. \\ \left. + \exp(y'|k|) \varphi \left(t^{1/2}|k| + \frac{y'}{2t^{1/2}} \right) \right) dk dy' \\ - \hat{V}(k, t) \quad (44)$$

となる。ただし、 $\hat{V}(k, t)$ は $v_p(x, t)$ のフーリエ変換である。さらに、次の積分を利用する。

$$\int_0^\infty \exp \left(-\xi - \frac{z^2}{4\xi} \right) \xi^{-1/2} d\xi = \pi^{1/2} \exp(-z) \quad (45)$$

そのとき、 $\tilde{h}$ は次のようになる。

$$\tilde{h}(k, p) = \frac{i}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(k, y') \operatorname{sgn}(k) \\ \times \left(\frac{\pi^{1/2}}{p} \exp(-y'|k|) - \frac{\pi^{1/2}|k|}{p(p+k^2)^{1/2}} \right. \\ \left. \times \exp(-(p+k^2)^{1/2}y') \right) dy' - \tilde{V}(k, p) \quad (46)$$

ただし、 $\tilde{V}(k, p)$ は $\hat{V}(k, t)$ のラプラス変換である。この結果を式 (42) に代入すると、

$$\tilde{f}(k, p) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \operatorname{sgn}(k) \left(p + k^2 + |k|(p+k^2)^{1/2} \right) \\ \times \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(k, y') \operatorname{sgn}(k) \\ \times \left(\frac{\pi^{1/2}}{p} \exp(-y'|k|) - \frac{\pi^{1/2}|k|}{p(p+k^2)^{1/2}} \right. \\ \left. \times \exp(-(p+k^2)^{1/2}y') \right) dy' \\ + i \operatorname{sgn}(k) \left(p + k^2 + |k|(p+k^2)^{1/2} \right) \\ \times \tilde{V}(k, p) \quad (47)$$

5. $t \ll 1$ の漸近解

渦法では split 法が用いられる。この場合、時間ステップ Δt は小さく取られ、この時間間隔における渦生成が問題となる。そこで、ここでは物理的に理解し易い形で、極く小さい時間 t における漸近解を求めることにする。この場合、ラプラス場では、 $p \gg 1$ における漸近解を求めることになる。

5.1 ケース 1

式 (41) より、

$$\tilde{f} \cong -2 \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(k, y') \exp(-y'|k|) \\ \times \left(1 + \frac{|k|}{p^{1/2}} + \frac{k^2}{p} + \frac{k^2|k|}{2p^{3/2}} + \dots \right) dy' \\ - 2p \left(1 + \frac{|k|}{p^{1/2}} + \frac{k^2}{p} + \frac{k^2|k|}{2p^{3/2}} + \dots \right) \tilde{U}(k, p) \quad (48)$$

が得られる。ここで、 $p^{-1/2}$ や $p^{-3/2}$ の逆ラプラス変換は容易に求められるので、

$$\hat{f}(k, t) \cong -2 \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(k, y') \exp(-y'|k|) \\ \times \left(\delta(t) + \frac{|k|}{(\pi t)^{1/2}} + k^2 \mathbf{1}(t) + \frac{k^2|k|t^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right. \\ \left. + \dots \right) dy' - 2 \left(\frac{d\hat{U}(k, t)}{dt} + \hat{U}(k, 0) \right) \\ - 2 \int_0^t \frac{|k|}{(\pi(t-s))^{1/2}} \left(\frac{d\hat{U}(k, s)}{ds} + \hat{U}(k, 0) \right) ds \\ + \dots \quad (49)$$

となる。さらに、次の逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を利用する。

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\omega}_0(k, y') \exp(-y'|k|)) \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \frac{y'}{(x-x')^2 + y'^2} dx' \quad (50)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(|k| \exp(-y'|k|)) \\ = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} \frac{y'^2 - x'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} \quad (51)$$

これらを用い、さらに畳み込みの関係を用いて最終的に次の関係を得る (付記 2 参照)。

$$f(x, t) \approx -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \frac{y'}{(x-x')^2 + y'^2} dx' dy' \\ \times \delta(t) - \frac{1}{(\pi t)^{1/2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \\ \times \frac{y'^2 - (x-x')^2}{((x-x')^2 + y'^2)^2} dx' dy' \\ - 2 \left(\frac{d\tilde{u}_p(x, t)}{dt} + \tilde{u}_p(x, 0) \right) \\ - 2 \int_0^t \frac{1}{(\pi(t-s))^{1/2}} \left(\frac{d\tilde{u}_p(x, s)}{ds} + \tilde{u}_p(x, 0) \right) ds \\ + \dots + O(1(t)) \quad (52)$$

ただし、 $\tilde{u}_p$ は次のように定義される。

$$\tilde{u}_p = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_p(\xi, t)}{(x-\xi)^2} d\xi$$

この式 (52) の右辺の第一項は、式 (8) から分かるように、初期渦度場による壁面での滑り速度の 2 倍に対応している。従って、壁面による鏡像を考えた渦度場を設定していることから、この項は初期渦度場による滑り速度の 2 倍の渦が生成されていることを示している。第二項はポテンシャル流れによる壁面での初期滑り速度とその時間変化の 2 倍である。これらの項は、ポテンシャル流れによる滑り速度に対応して渦が壁面から生成していることを示す。また、Chorin ら⁽⁶⁾ による split 法では、時間ステップ Δt としたとき、この手法の精度は $(\Delta t)^{1/2}$ のオーダーと推定される。

5.2 ケース 2

ケース 2 の場合も同様に求められる。式 (47) から、式 (50) と (51) より

$$\begin{aligned} f(x, t) \approx & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \frac{y'}{(x-x')^2 + y'^2} dx' dy' \delta(t) \\ & + \frac{1}{(\pi t)^{1/2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \\ & \times \frac{y'^2 - (x-x')^2}{((x-x')^2 + y'^2)^2} dx' dy' + O(1(t)) \\ & + \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^\infty \frac{1}{x-\xi} \left(\frac{dv_p(\xi, t)}{dt} + v_p(\xi, 0) \right) d\xi \\ & + O(t^{1/2}) \end{aligned} \quad (53)$$

が得られる (付記 2 参照)。

このケース 2 の場合、壁面での滑り速度は自然に満足されている。従って、基礎方程式は壁面の法線方向の速度が零になるという条件から導かれている。このことから、split 法では、時間ステップ毎に壁面法線方向速度成分がスリップしていることになる。上式 (53) の右辺の第一項は、初期の渦度場によるこの滑り速度に対応して渦度を生成することを意味している。つまり、平板の表面に渦度 $2f$ が生成されたとする。この渦度によって生じる平板表面上の法線成分 v は

$$v = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x')}{x-x'} dx' \quad (54)$$

で求められる。上式に式 (53) の右辺の第一項を代入し、計算すると

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_0(x', y') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y'^2} dx' dy' \quad (55)$$

となる。式 (12) から分かるように、この法線方向成分の滑り速度に対応して渦が生成されていることが分かる。式 (53) の右辺第二項も同様で、初期の滑り速度と時間の経過とともに生じる滑り速度に対応して渦が生成されていることが分かる。

6. 結論

渦法における境界面からの渦生成問題を理論的に考察した。ここでは、物体表面が滑らかであると、表面極く近傍の局所流れを取り上げた。このような流れでは、粘着の条件から慣性項が無視でき、Stokes 形の基礎方程式となる。この方程式から、三つの初期流れ場について考察し、壁面からの渦度の生成について解析した。これらの渦度場は、渦法でよく用いられる境界近傍での渦度場に対応している。得られた結果は、どの渦度場のモデルでも、壁面での壁面に平行な滑り速度や法線方向の滑り速度に対応して渦度を生成すればよいということである。この結果は、本報で述べたように、局所流れが滑らかであれば、三次元流れに対しても適用できる。

渦法では渦度場が与えられ、渦度場から速度場を計算し、物体表面の粘着の条件から渦度を生成させてきた。この手法において、速度を求める際には、 $\text{rot} \mathbf{u}_p = 0$ を満たす速度場 $\mathbf{u}_p$ の自由度がある。この自由度のため、計算手法により生成渦が異なってくる。本解析の最も重要な結論は、計算手法にかかわらず壁面の滑り速度に応じて渦度を生成すればよいことを明らかにした点である。

付記 1

次の積分を考える。

$$I(z) = \int_0^\infty \exp\left(-\left(t + \frac{z^2}{4t}\right)\right) t^{-3/2} dt$$

$t = \frac{x}{2} \exp(x)$ とおき、積分変数を t から x に変える。このとき、

$$I(z) = 2 \left(\frac{2}{z}\right)^{1/2} \int_0^\infty \cosh \frac{x}{2} \exp(-z \cosh x) dx$$

となる。ここで、さらに $s = \sinh \frac{x}{2}$ とおき、積分変数を x から s に変える。この結果、

$$I(z) = 4 \left(\frac{2}{z}\right)^{1/2} \int_0^\infty \exp(-z(2s^2 + 1)) ds$$

となり、最終的に、

$$I(z) = \pi^{1/2} \frac{2}{z} \exp(-z)$$

が得られる。

付記 2

$|k|$ の逆フーリエ変換を求めることにする。ここで、次の関係に注目する。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\exp(-a|k|)}{a} \\ &\approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{a} - |k|\right) \quad (a \rightarrow 0) \end{aligned}$$

従って、超関数の意味として

$$\mathcal{F}^{-1}(|k|) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{x^2}$$

となる。従って、畳み込みを利用すると式 (52) の $\tilde{u}_p$ に関する項が導かれる。

次に、 $|k|$ の逆フーリエ変換を求める。ここで、 $\mathcal{F}(df/dx) = -ik\mathcal{F}(f)$ を利用する。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{x}\right) &= \frac{i}{k} \mathcal{F}\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{x^2}\right) \\ &= -i \frac{|k|}{k} = -i \text{sgn}(k) \end{aligned}$$

従って、

$$\mathcal{F}^{-1}(\text{sgn}(k)) = -i \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{x}$$

となる。従って、式 (53) の v_p に関する項が導出される。

文 献

- (1) 中嶋、木田、機論、B-56, (1990), pp.3284-3291
 - (2) 中嶋、木田、機論、B-61, (1995), pp.4257-4262, pp.4263-4270
 - (3) 亀本、数値流体力学、2-1, (1994), pp.20-29, 2-2, (1994), pp.28-39
 - (4) T. Sarpkaya, ASME, JFE, 111, (1989), pp.5-52
 - (5) A. Leonard, J. Comp. Phys., 37, (1980), pp.289-335
 - (6) A.J. Chorin, et al., Commun. Pure Appl. Math., 31, (1978), pp.205-256
 - (7) C.R. Anderson, SIAM, Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, ed. by R.E. Caflisch, et al., (1989), pp.144-159
 - (8) E.G. Puckett, SIAM, J. Sci. Stat. Comput., 10-2, (1989), pp.298-327
 - (9) A.J. Chorin, J. Fluid Mech., 57 (1973), pp.785-796
 - (10) G. Benfatto and M. Pulvirenti, Commun. Math. Phys., 96, (1984), pp.59-95
 - (11) G. Benfatto and M. Pulvirenti, Commun. Math. Phys., 106, (1986), pp.427-458
 - (12) A.J. Chorin, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1-1, (1980), pp.1-21
 - (13) 森口他、数学公式III、岩波全書、(1978)
-