すきま比 $\beta = 0.14$ での回転2球間クエット流れの
層流-乱流遷移のカオス*中 林 功 一^{*1}, 森 西 洋 平^{*1}, 小 林 政 弘^{*2}Chaotic Behavior of the Laminar-Turbulent Transition in Spherical Couette
Flow of Clearance Ratio $\beta = 0.14$

Koichi NAKABAYASHI, Youhei MORINISHI and Masahiro KOBAYASHI

We investigated the laminar-turbulent transition of a spherical Couette flow for clearance ratio $\beta = 0.14$ at which velocity fluctuation disappears. We found that the root mean square value for V_θ shows complicated evolution for distribution in the radial direction, while the root mean square value for V_ϕ shows a relatively simple one, where V_θ and V_ϕ are the fluctuating velocity components of the azimuthal and meridian directions, respectively. Calculating the correlation dimension and drawing the Poincaré section, it is revealed that the flow field traces a scenario as follows: steady state $\rightarrow$ periodic state $\rightarrow$ quasi-periodic state $\rightarrow$ chaos $\rightarrow$ periodic state $\rightarrow$ steady state (the disappearance of velocity fluctuation) $\rightarrow$ periodic state $\rightarrow$ chaos. It is also shown that in the quasi-periodic state, the first return map becomes irreversible as the Reynolds number increases.

Key Words: Chaos, Transition, Turbulence, Spherical Couette Flow, Correlation Dimension, Poincaré Section, First Return Map

1. 緒 言

本研究で取扱う回転2球間クエット流れは、内外球が同心状態に置かれた内球回転、外球静止の流れである。レイノルズ数の増加に伴い、流れは最初、基本層流を形成し、その後臨界レイノルズ数において外力不安定により赤道付近に環状TG(テイラー・ゲルトラー)渦を発生する。さらにレイノルズ数が増加すると準周期運動を経てカオスへと至る。このような遷移過程はレイリー・ベナール対流や回転2円筒流れにも見られ、Duboisら⁽¹⁾、Fenstermacherら⁽²⁾やOhjiら⁽³⁾をはじめとして多くの研究がなされている。回転2球間クエット流れに関しては、Wimmer⁽⁴⁾、Nakabayashi⁽⁵⁾、Bühlerら⁽⁶⁾、Nakabayashiら⁽⁷⁾などの実験的研究があり、2円筒流れの場合との相違が明らかにされつつある。特にすきま比 $\beta = 0.14$ の場合にレイノルズ数6000付近で速度変動の消滅現象が報告されている⁽⁷⁾が、この遷移過程は通常のそれとはまったく相違している。しかしこの遷移の詳細は不明

で、かく乱の速度変動成分がなぜ、どのようなメカニズムによって消滅するのか未解明である。

一方、散逸系の遷移過程に対する有力な解析手段として、カオス力学的手法が近年盛んに用いられるようになってきた。この手法は決定論的カオスという研究分野で開発されてきたものであるが、特にレイリー・ベナール対流に対する研究では相関次元を用いて新たな秩序構造が明らかになりつつある。また、回転2円筒流れではBrandstaterら⁽⁸⁾が相関次元によりカオティックな流れ場の特徴づけを行っている。

本研究では、速度変動の消滅現象が生じる $\beta = 0.14$ の回転2球間クエット流れに注目し、乱れの実効値と相関次元を用いて遷移過程を定量的に特徴づける。また、遷移過程に伴う特徴的な流れ場の構造の変化については、ポアンカレ断面と一次元再帰写像を用いて考察する。

記 号

r, θ, ϕ : 半径, 天頂角および方位角
 V_r, V_θ, V_ϕ : r, θ, ϕ 方向の変動速度
 $C(r)$: 相関積分
 d : 相関次元
 f_{H1} : セン断波動の無次元基本周波数

* 原稿受付 1997年2月7日。

^{*1} 正員, 名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。^{*2} 学生員, 名古屋大学大学院(〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

- $\hat{f}_0$: 内球回転周波数
 f_{s1}, f_{s2}, S_{s3} : スパイラル TG 渦の無次元基本周波数
 f_{w1}, f_{w2}, f_{w3} : 進行波の無次元基本周波数
 $H(x)$: ヘビサイド関数
 m : 埋込み次元
 R_1 : 内球半径
 R_2 : 外球半径
 Re : レイノルズ数 $= U_0 R_1 / \nu$
 Re_c : 臨界レイノルズ数
 R^* : レイノルズ数比 $= Re / Re_c$
 S_H : セン断波の波数
 S_s : スパイラル TG 渦の対の数
 S_w : 方位角方向進行波の波数
 U_0 : 内球赤道上の周速度 $= 2\pi \cdot \hat{f}_0 \cdot R_1$
 $x(t)$: 時系列データ
 β : すきま比 $= (R_2 - R_1) / R_1$
 τ : 遅れ時間
 ν : 動粘度
 η : 無次元半径座標 $= (r - R_1) / (R_2 - R_1)$

2. 実験装置および実験方法

実験装置の概略図を図1に示す。実験装置は前報⁽⁷⁾と同じ(内球半径 $R_1=76.88$ mm, 外球半径 $R_2=87.65$ mm)であるが, 本報では内球の北極にも軸を設け, 流れ場の幾何学的な赤道面対称性を向上させた。また, 作動流体の温度を赤道上で $\theta=45^\circ$ の2点で測定し, 測定中の温度変化および2点間の温度差を $\pm 0.1^\circ\text{C}$ 以下に抑えた。実験に用いたすきま比 β は 0.14 で, 作動流体としては, 水および 50, 66% グリセリン水溶液を用いた。実験にはレーザドップラー流速計(LDV)

Fig. 1 Schematics of the experimental apparatus

を用い, すきま中央の方位角(ϕ)方向, および天頂角(θ)方向の速度成分を測定した。また, 内球は極めてゆっくりと加速し, 準静的な遷移を実現させた。なお, テイラー不安定により赤道付近に環状 TG 渦が形成されるときレイノルズ数を臨界レイノルズ数 Re_c としているが, 今回の $\beta=0.14$ では可視化実験より $Re_c=900$ を得た。また, 遷移レイノルズ数と基本周波数を表1に示す。表1中の周波数は内球回転周波数 $\hat{f}_0$ で無次元化されている。

3. 実験結果および考察

3.1 乱れの実効値 図2に, 赤道上のすきまの

Table 1 Fundamental frequencies

R^*	Frequencies
1.20	$f_{s1}=1.32$ ($S_s=3$)
1.60	$f_{s2}=0.86$ ($S_s=2$)
1.74	$f_{s2}=0.85$ ($S_s=2$) $f_{w1}=2.65$ ($S_w=6$)
1.95	$f_{s3}=0.43$ ($S_s=1$) $f_{w1}=2.75$ ($S_w=6$)
2.95	$f_{s3}=0.43$ ($S_s=1$) $f_{w2}=2.26$ ($S_w=5$)
6.03	$f_{s3}=0.45$ ($S_s=1$)
6.50	None
10.02	$f_{H1}=7.53$ ($S_H=14$)
10.79	$f_{H1}=7.80$ ($S_H=14$) $f_{w3}=0.49$ ($S_w=1$)

Fig. 2 Evolution of rms values of V_ϕ/U_0 and V_θ/U_0

Fig. 3 Evolution of rms value distribution for V_ϕ/U_0 and V_θ/U_0

中心位置においてLDVにより計測された変動速度 V_ϕ/U_0 と V_θ/U_0 のrms値の R^* に対する変化を示す。環状TG渦は定常であるので、 $1.0 < R^* < 1.20$ において V_ϕ のrms値は零である。 $R^*=1.20$ においてスパイラルTG渦が生じ、それに伴い V_ϕ のrms値も増加する。 $R^*=1.60$ でスパイラルTG渦の数が3から2に減少するので、それに伴い V_ϕ のrms値もいったん急激に減少した後 $R^*=1.74$ で再び増加する。そこから $R^*=6.50$ の速度変動の消滅現象が起こるまでの間、 V_ϕ のrms値はほぼ一定に保たれる。 V_θ のrms値は V_ϕ のそののほぼ1/3であるが、 V_θ の定性的な挙動は V_ϕ の挙動に類似のものである。

図3(a)に、赤道上のすきま内での V_ϕ のrms値の分布の R^* に対する変化を示す。 $R^*=1.39$ において V_ϕ のrms値は値自体が小さくその分布も平坦である。 $R^*=3.00$ では、 $\eta=0.3$ で最大値を、 $\eta=0.8$ で弱い極値をもつ。 $3.00 \leq R^* \leq 6.50$ の範囲において V_ϕ のrms値の分布の変化は複雑である。 $R^*=6.99$ では流れは定常となり V_ϕ のrms値はほぼ零となる。

図3(b)に、赤道上のすきま内での V_θ のrms値の分布の R^* に対する変化を示す。すきま中央での V_θ のrms値は小さいが、 $3.00 \leq R^* \leq 6.50$ の範囲で内外壁近傍に極値をもつ。この傾向は渦セルの変動の観察結果と一致する。

3.2 相関次元の計算方法 力学系のもつ重要な性質は、相空間におけるアトラクタから抽出することができる。いま時系列データ $x(t)$ が得られたとすると、遅れ時間 τ を適当に選ぶことにより $x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \dots, x\{t+(m-1)\tau\}$ を座標軸として m

次元相空間を再構成することができる。このとき時系列データが描くアトラクタ上での点の分布には空間的な相関があり、それは次式によって得られる。

$$C_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H\{r - |\underline{x}(i) - \underline{x}(j)|\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$C(r) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_i(r) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで N は全データ数、 M はアトラクタ上で任意に選んだ点の数であり、 $H(x)$ はヘビサイド関数、 $C(r)$ はアトラクタ上のある点 $\underline{x}(i)$ から描いた半径 r の球内に点が含まれる確率を表している。そして $C(r)$ と r の間に次の関係が成り立つとき、 d はアトラクタの相関次元と呼ばれる。

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad \dots\dots\dots (3)$$

アトラクタの埋込み次元 m の増加に対して式(3)から得られる d がある有限な一定値に収束するならばその値が対象とする系の相関次元であり、またその系は決定論的であるという。またこのようにして得られた相関次元は、対象とする系で励起されている自由度の下限を与える⁽⁹⁾。

今回の計算に用いた N は4000~20000点で、 M は1000点とした。なお相空間を再構成する際の遅れ時間としては、速度変動から計算した相互情報関数 $I(\tau)$ がはじめて極小値をとるときの τ を選んだ。図4は $m=7, R^*=1.75$ における V_ϕ についての式(3)の計算結果である。図5は $m=7$ での $\log C(r)$ 対 $\log r$ グラフの傾きを縦軸にとったものである。図5中の領域B⁽⁹⁾は、力学系のもつ空間あるいは時間スケールよ

Fig. 4 Correlation integral versus r ($m=7$, $R^*=1.75$) Fig. 5 The local slope of Fig. 4 as a function of r

りも小さい領域であり、したがってそこで得られる変動は測定機器等の発生するランダムノイズによるものが支配的となる。このようなランダムノイズは相空間をくまなく埋め尽くすため、領域 B での傾きは大きな値となるが、その度合いはデータ点数にも依存する⁽⁸⁾。領域 C⁽⁸⁾は式(3)が成り立つ領域で、この図5から $d=2.1$ と決定される。領域 D では $C(r)$ が飽和するため傾きは零に減少する。しかし C と D の境界付近ではいったん傾きが増加している。これは、 r がこの付近に近づくと、 $C(r)$ を計算する際の球の曲率とアトラクタの曲率とがほぼ同程度となり、球内の点数 $C(r)$ が急激に増加するためである。同様な現象は Brandstater ら⁽⁹⁾の計算結果にも見受けられるが、著者らの計算結果ではより顕著に現れている。なお、図

Fig. 6 Effect of varying the N on the convergence of d : $\blacktriangle$ ($N=4\,000$), $\blacksquare$ ($N=8\,000$), $\bullet$ ($N=16\,000$) for $R^*=5.20$, $\triangle$ ($N=4\,000$) for $R^*=1.90$

5 では Brandstater ら⁽⁹⁾に示されている領域 A は現れなかった。図 6 は埋込み次元の増加に対する式(3)の計算結果の変化を示したものである。 $R^*=1.90$ のデータでは $N=4\,000$, $m=6$ で d は一定値 2.1 に収束している。したがってこのレイノルズ数における相関次元は 2.1 と決定される。今回の計算では相関次元が 2 程度の場合には $N=4\,000$ でもよい収束が得られた。しかし相関次元が 4~5 の場合には、図 6 に示す $R^*=5.20$ の例のように $N=4\,000$, 8 000 では収束が悪く $N=16\,000$ 程度のデータ数が必要であった。また $R^*=12.6$ 以降では、データ数を 20 000 点まで上げて計算したが相関次元は一定値に収束しなかった。これは流れ場で励起される自由度が非常に大きくなり、正確な相関次元を求めるにはさらに多くのデータ数が必要とするためであると考えられる。

3.3 相関次元の変化と遷移のシナリオ 図 7 に、相関次元と基本周波数の R^* に対する変化、および速度変動の消滅に至るまでのシナリオ⁽⁹⁾を示す。変動速度 V_ϕ と V_θ の rms 値自体は非常に異なっているにもかかわらず(図 2)、それらの相関次元 d の値はほぼ一致している。速度変動の消滅までのシナリオは流れ場のアトラクタに関連づけて以下のように説明される。まず、 $1.0 < R^* < 1.20$ においてアトラクタは固定点(S, 定常状態)である。これは定常な環状 TG 渦に対応している。 $R^*=1.20$ での最初のホップ分岐(f_{s1} が生じる)の後、 $1.20 < R^* < 1.74$ の間でアトラクタはリミットサイクル(P, 変動は周期的)となる。この間に、 $R^*=1.60$ で f_{s1} から f_{s2} への遷移が起こる。 $R^*=$

Fig. 7 Evolution of correlation dimension and scenario of the transition

1.74 で 2 番目のホップ分岐 (f_{w1} が生じる) が起こり、準周期状態 (QP_2) となる。赤道上のすきま中央部での V_ϕ のデータからストロボ写像法⁽⁹⁾ により再構成したトラジェクトリのポアンカレ断面を図 8 に示す。図 8(a) に示す $R^*=1.74$ でのポアンカレ断面は滑らかな環状となっており、このレイノルズ数のトラジェクトリが T^2 トーラスを形成していることがわかる。図 8(b) に示す $R^*=1.90$ でのポアンカレ断面では図 8 中に示す矢印の部分にトラジェクトリの引き延ばしと折り畳み構造が見られ、図 8(a) の状態と比べて非線形性が強まっていることが理解される⁽¹⁰⁾。さらに図 8(a), (b) のポアンカレ断面から一次元再帰写像を構成したものが図 9(a), (b) である。 $R^*=1.74$ の場合の図 9(a) は線形写像で可逆であるが、レイノルズ

 (a) $R^*=1.74$

 (b) $R^*=1.90$

 Fig. 8 Poincaré section of V_ϕ

 (a) $R^*=1.74$

 (b) $R^*=1.90$

Fig. 9 First return map of Fig. 8

数を $R^*=1.90$ と増加させた図 9(b) では写像上に平坦な部分が現れ不可逆となっている。これは、レイノルズ数の増加によりこの力学系のもっている非線形性が強まることを示している⁽¹⁰⁾。 $R^*=1.95$ 付近で生じる分岐により基本周波数 f_{s2} は f_{s3} へと変化し(図 7), d は 2 から 5 へと増加する。したがってこのときのアトラクタはカオス(C)に対応するストレンジアトラクタとして特徴づけられる。また、この分岐は 3 番めのホップ分岐とみなされるが、この分岐の直後において準周期運動(QP₃)は観察することができなかった。 $R^*=2.95$ における f_{w1} から f_{w2} の遷移(4 番めの分岐)の後、 R^* の増加に伴い d は減少する。次に、 $R^*=6.0$ 付近の分岐でカオスが基本周波数 f_{s3} の周期運動へと変化する。ここでのアトラクタはリミットサイクルである。 $R^*=6.50$ で d はほぼ零となり、そのアトラクタは固定点 S となる。以降 $6.50 < R^* < 10.02$ の間で速度変動の消滅現象が生じる。

その後 $R^*=10.02$ でのせん断波動 f_{H1} の発生によりアトラクタはリミットサイクルとなり、相関次元 d の値は約 1 となる。 $R^*=10.79$ で進行波動の基本周波数 f_{w3} が加わり 2 周期運動となるが、ここでは $1.74 < R^* < 1.95$ で見られたような相関次元 d が 2 程度で一定となる領域は観察されず、一気に 5 程度まで増加してカオス状態となる。 $R^*=12.8$ 以上の領域では、3・2 節で説明したように埋込み次元に対する相関次元の収束が悪くなりここでは正確な値が得られていないが、少なくとも相関次元が 5 以上の自由度が励起されており、 $2.95 < R^* < 6.03$ の領域よりもカオスが進行している。

4. 結 論

本研究では、速度変動の消滅現象が生じるすきま比 $\beta=0.14$ の回転 2 球間クエット流れの層流-乱流遷移について実験的に調べた。その結果をまとめると以下となる。

(1) 赤道上のすきま中央部での変動速度の rms 値は、 $R^*=2$ 付近での急激な増加から $R^*=6.5$ 付近での急激な減少までの間、ほぼ一定値を保つ。

(2) R^* の増加に伴う変動速度 V_ϕ の rms 値のすきま内での分布の変化は非常に複雑である。一方、変

動速度 V_ϕ のそれは比較的単純であり、またその分布は内外壁近傍で極値をもつ。

(3) R^* の増加に伴い流れ場は次のようなシナリオをたどる：定常状態→周期状態→準周期状態→カオス→周期状態→定常状態→周期状態→カオス。

(4) $1.74 < R^* < 1.95$ では、相関次元 d は一定値 2.1 であり、またポアンカレ断面はほぼ環状の T^2 トーラスとなるので流れ場は準周期状態とみなせるが、 $R^*=1.90$ でのポアンカレ断面には折り畳み構造が現れまたその一次元再帰写像にはこう配がほぼ零で不可逆となる部分が現れるので、この R^* の範囲内でもレイノルズ数の増加に伴い流れ場の非線形性が強まる。

なお本研究の一部に、平成 8 年度科学研究費補助金基盤 C が与えられた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Dubois, M., Bergé, P. and Croquette, V., Étude de régimes convectifs instationnaires à l'aide des diagrammes de Poincaré, *Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris*, C293 (1981), 409-411.
- (2) Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. and Gollub, J. P., Dynamical Instabilities and the Transition to Chaotic Taylor Vortex Flow, *J. Fluid Mech.*, **94** (1979), 103-128.
- (3) Ohji, M. and Amagi, K., Structure of Modulated Wavy Vortical Flows in the Circular Couette System, *Fluid Dyn. Res.*, **3** (1988), 305-314.
- (4) Wimmer, M., Experiments on a Viscous Fluid Flow Between Concentric Rotating Spheres, *J. Fluid Mech.*, **78** (1976), 317-335.
- (5) Nakabayashi, K., Transition of Taylor-Görtler Vortex Flow in Spherical Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **132** (1983), 209-230.
- (6) Bühler, K. and Zierep, J. (Comte-Bellot, G. and Mathieu, J. eds.), Dynamical Instabilities and Transition to Turbulence in Spherical Gap Flows, In *Advances in Turbulence, Proc. 1st Europ. Turbulence Conf.*, (1987), 16-26, Springer.
- (7) Nakabayashi, K. and Tsuchida, Y., Spectral Study of the Laminar-Turbulent Transition in Spherical Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **194** (1988), 101-132.
- (8) Brandstater, A. and Swinney, H. L., Strange Attractors in Weakly Turbulent Couette Taylor Flow, *Phys. Rev. A*, **35**-5 (1987), 2207-2220.
- (9) Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, Ch. (相澤洋二訳), カオスの中の秩序, (1992), 72-73, 139-143, 149-178, 産業図書.
- (10) 沢田康次, 非平衡系の秩序と乱れ, (1993), 62-64, 朝倉書店.