圧縮性オイラー方程式に対する大域的四次精度 非振動中心差分スキーム*

渡辺 則彦^{*1}, 本間 弘樹^{*2}

A Globally Fourth Order Non-oscillatory Centred Scheme for the Compressible Euler Equations

Norihiko WATANABE and Hiroki HONMA

A globally fourth order non-oscillatory centred scheme is proposed for solving the compressible Euler equations. The present scheme can bring out stable solutions without multi-stage time integration, and calculation time is considerably reduced in comparison with MUSCL type schemes. As a numerical experiment for the present scheme, a computational result for a shock dynamics problem is obtained in comparison with some conventional schemes. The present scheme is useful for efficient computation for problems required higher time-space accuracy such as complex non-stationary flow field including weak discontinuities.

Key Words: Numerical method, FDM, TVD scheme, Central difference, Shock waves

1. 緒 言

現在、非線形波動を伴う圧縮性流れの数値解析法は TVD スキームと呼ばれる非振動型のスキームが多く用いられている。TVD スキームが Harten ⁽¹⁾ によって提案されてからすでに 15 年近くが経ち、TVD スキームはさまざまな形態をもって発展してきた。それらのスキームはいずれも実際の解析においては一長一短があり、解析対象となる流れ場の諸条件によって適宜選択され、有効に利用されている。近年では計算機の性能の向上とも相まって、圧縮性乱流の直接解法や、複雑な非定常流れの解析など、時間、空間ともに高精度を要求される流れの解析も積極的に行われている。このような問題をより効率的に解こうとするならば、数値解が収束しやすいように、解適合格子法など、離散点を効率的に分布させることも大切であるが、そのみならず、スキームそのものの精度を向上させることも重要になる。

現在主流となっている非振動スキームの高次精度化法としては、まず一つには数値流束を構成する従属変数を高次補間する方法があり、代表的な手法としては

MUSCL 法 ⁽²⁾ がよく用いられ、現在までに空間精度は五次精度にまで拡張されている ⁽³⁾。また MUSCL 法を用いる場合、時間精度の改善にあたっては一般に陽解法では Runge-Kutta 法などの多段階時間積分法が用いられる。この方法の利点はいずれも既存のスキームの基本型を変えずに組み合わせることができることにある。もう一つの方法としては、時間、空間精度ともに高次精度のスキームを定式化し、それを TVD 化する非 MUSCL 的な方法があり、代表的なスキームとしては Harten の流束修正法、それを改良した Yee の二次精度風上型 TVD スキーム ⁽⁴⁾、Roe, Davis による TVD-Lax-Wendroff スキーム ^{(4),(5)} などが挙げられる。この種のスキームは現在までには二次精度まで高次精度化されているが、弱い不連続に対する解像度は三次精度以上の MUSCL 法と比べてやや低くなっている。しかしながらこの方法は大域的には時間精度も高次精度化されるので多段階時間積分法と特に組み合わせることなく、ある程度安定的に解を得ることができる。これら MUSCL 法と非 MUSCL 法を比べれば、非 MUSCL 法は、単一段階の時間陽積分においても衝撃波等、流れが急変するような場所を除き、大域的に時間精度を一次精度以上に上げることができるが、MUSCL 法は通常、

* 原稿受付 1997 年 3 月 28 日。

^{*1} 正員、千葉大学大学院 (〒263 千葉市稲毛区弥生町 1-33)。

^{*2} 正員、千葉大学大学院自然科学研究科。

陽解法では多段階時間積分を用いて時間精度を上げる必要がある。従って、たいいていの場合、MUSCL 法による解析は、非 MUSCL 法による解析よりも時間積分の段階数にほぼ比例して演算回数が増大し、特に離散点の多い解析においては非 MUSCL 法よりも計算効率は低くなってしまう。

そこで本論では多段階時間積分に伴う計算量増加を避け、かつ大域的には時間精度、空間精度ともに最高四次精度を保つような、一つの非 MUSCL 型のスキームを構築し、圧縮性流れへ応用した結果について、その精度と効率を検討する。作成するスキームは Roe, Davis ^{(4),(5)} による TVD-Lax-Wendroff スキームの考え方を拡張したものである。TVD-Lax-Wendroff スキームは、Lax-Wendroff スキームに流れの局所状態によって大きさを可変にした人工粘性項を加えて TVD 化したスキームであり、最大時間空間二次精度を有する。本論で作成するスキームは、この TVD-Lax-Wendroff スキームの考え方を拡張した最大時間空間四次精度を有する非振動スキームである。このスキームと既存のスキームを用いて衝撃波を伴う流れを計算した結果を比較する。

2. 四次精度 Lax-Wendroff 型 中心差分スキーム

スキームを考えるのに簡単のため、いま、次式に示される定係数線形波動方程式を考える。

$$u_t + f_x = 0 \quad (1)$$

$$f_x = cu_x \quad (2)$$

ここで $u = u(t, x)$ であり、また c は波の移流速度であって、定数である。まずは Lax-Wendroff スキームの考え方に準じて、単純な四次精度の中心差分スキームを導く。Lax-Wendroff スキームは時間方向の離散点に n 、空間方向の離散点に i と添字を付ければ次式のように書ける。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{a^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3)$$

ここで a は $a = c\Delta t/\Delta x$ であり、クーラン数である。この Lax-Wendroff スキームは時間 $n+1$ における離散点 i の解を時間方向にテイラー展開した次式から導かれる。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}^n + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 u_{ttt}^n \\ & + \frac{1}{24}(\Delta t)^4 u_{tttt}^n + O((\Delta t)^5) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、次式のように時間と空間の微分項を交換する。

$$u_t^n = -cu_x^n \quad (5)$$

$$u_{tt}^n = c^2 u_{xx}^n \quad (6)$$

$$u_{ttt}^n = -c^3 u_{xxx}^n \quad (7)$$

$$u_{tttt}^n = c^4 u_{xxxx}^n \quad (8)$$

すると式 (4) は

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - c\Delta t u_x^n + \frac{1}{2}(c\Delta t)^2 u_{xx}^n - \frac{1}{6}(c\Delta t)^3 u_{xxx}^n \\ & + \frac{1}{24}(c\Delta t)^4 u_{xxxx}^n + O((\Delta x)^5) \end{aligned} \quad (9)$$

と書ける。いまテイラー展開の結果は四次精度まで展開したものであるが、Lax-Wendroff スキームは右辺第二項と第三項をそれぞれ二次精度中心差分で近似し、右辺第四項以降は無視したスキームとして与えられる。ここでは四次の項までを含むスキームを考えることとし、時空間ともに四次精度のスキームを構築するのに式 (9) の右辺第五項までを差分近似する。右辺第五項は空間四階微係数であり、四次精度の差分近似が必要である。また他階数の空間微係数も同様に四次精度中心差分式を用いて近似する。ここで、各階数の空間微分に対する四次精度中心差分式はそれぞれ次式ようになる。

$$u_x = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (10)$$

$$u_{xx} = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2} \quad (11)$$

$$u_{xxx} = \frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2(\Delta x)^3} \quad (12)$$

$$u_{xxxx} = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{(\Delta x)^4} \quad (13)$$

これらを式 (9) に代入すると、次式で示されるようなステンシルが五点の時間四次、空間四次精度の中心差分スキームを作ることができる。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n \\ & - \frac{a}{24}(2u_{i-2}^n - 16u_{i-1}^n + 16u_{i+1}^n - 2u_{i+2}^n) \\ & + \frac{a^2}{24}(-u_{i-2}^n + 16u_{i-1}^n - 30u_i^n + 16u_{i+1}^n - u_{i+2}^n) \\ & - \frac{a^3}{24}(-2u_{i-2}^n + 4u_{i-1}^n - 4u_{i+1}^n + 2u_{i+2}^n) \\ & + \frac{a^4}{24}(u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 6u_i^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n) \end{aligned} \quad (14)$$

フーリエ分解を用いたフォン・ノイマンの安定解析によれば、式 (14) のスキームの増幅率 $|g|$ と位相誤差 ϕ は次式のようになる。

$$|g| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (16)$$

$$x = 1 + \frac{a^2}{12} \cos 2\theta (a^2 - 1) + \frac{a^2}{3} \cos \theta (4 - a^2) + \frac{a^2}{4} (a^2 - 5) \quad (17)$$

$$y = \frac{a}{6} \sin 2\theta (1 - a^2) + \frac{a}{3} \sin \theta (a^2 - 4) \quad (18)$$

ここで θ は解をフーリエ分解したときの周波数を示している。クーラン数 $a = 1, 0.75, 0.5, 0.25$ に対する式(14)のスキームと Lax-Wendroff スキームの増幅率を図1に、位相誤差を図2に示す。それぞれ実線は式(14)のスキームの結果であり、破線は Lax-Wendroff スキームの結果である。また、位相誤差は解析解の位相誤差で除した値をプロットしている。図1より、式(14)のスキームはクーラン数1以下において安定なスキームであることがわかる。また増幅率、位相誤差ともに式(14)のスキームは Lax-Wendroff スキームの傾向とよく似ているが、増幅率は Lax-Wendroff スキームに比べ、特にクーラン数が0に近くなるに伴い、高周波成分がやや減衰しやすくなる傾向があり、また、位相誤差は全クーラン数に渡って Lax-Wendroff スキームよりも少なくなるが、クーラン数 0.75 では高周波成分が加速される傾向があると言える。

次に、保存形の変形システム方程式に拡張することを考慮し、式(14)のスキームを数値流束の形で書き直す。いま、その数値流束を $\tilde{f}^{LW4}$ と呼ぶことにすると $\tilde{f}^{LW4}$ は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^{LW4} = & \frac{1}{24}(a^2 - 1)(a + 2)f_{i-1} \\ & - \frac{1}{24}(3a^3 + 2a^2 - 15a - 14)f_i \\ & + \frac{1}{24}(3a^3 - 2a^2 - 15a + 14)f_{i+1} \\ & - \frac{1}{24}(a^2 - 1)(a - 2)f_{i+2} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、時間レベルの添字 n は省略した。またこの数値流束は例えば Roe スキーム⁽⁶⁾のような一次精度風上スキームの数値流束に一種の補正項を加えた形に書き直すことができ、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^{LW4} = & \tilde{f}_{i+1/2}^{1uw} + \frac{1}{24}(a^2 - 1)(a + 2)f_{i-1} \\ & - \frac{1}{24}(3a^3 + 2a^2 - 15a - 2)f_i \\ & + \frac{1}{24}(3a^3 - 2a^2 - 15a + 2)f_{i+1} \\ & - \frac{1}{24}(a^2 - 1)(a - 2)f_{i+2} \\ & + \frac{1}{2}|c|\Delta u_{i+1/2} \end{aligned} \quad (20)$$

Fig.1 Amplitude errors.
solid line: Fourth order centred scheme eq.(14)
dashed line: Lax-Wendroff scheme

Fig.2 Phase errors.
solid line: Fourth order centred scheme eq.(14)
dashed line: Lax-Wendroff scheme

Fig.3 Numerical results for equation(2)
(Sinusoidal wave, $a = 0.9$).
Black circle: Lax-Wendroff scheme
White circle: Beam-Warming scheme
Black square: Fourth order centred scheme eq.(14)
Solid line: Analytical solution

ここで $\tilde{f}_{i+1/2}^{1uw}$ は 1 次精度風上スキームの数値流束

$$\frac{1}{2}(f_i + f_{i+1} - |c|\Delta u_{i+1/2}) \quad (21)$$

である。また、 Δu は離散点間の u の変分量を表し、 $\Delta u_{i+1/2} \equiv u_{i+1} - u_i$ と定義される。さらにまとめると $\tilde{f}_{i+1/2}^{LW4}$ は Δu の関数として表現することができて、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^{LW4} = & \tilde{f}_{i+1/2}^{1uw} - \frac{c}{24}(a^2 - 1)(a + 2)\Delta u_{i-1/2} \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{c}{12}(2a^3 - 14a) + |c| \right] \Delta u_{i+1/2} \\ & - \frac{c}{24}(a^2 - 1)(a - 2)\Delta u_{i+3/2} \end{aligned} \quad (22)$$

このスキームを用いて定係数線形波動方程式 (2) を解いた例を図 3 に示す。図 3 は初期値として一周期の sin 波を与え、クーラン数 0.9 で 200 ステップ計算した結果である。図中には比較のため、Lax-Wendroff スキーム、風上型である Beam-Warming スキームの二つの時間空間二次精度のスキームによる結果も示す。実線が解析解、黒丸が Lax-Wendroff スキームの結果、白丸が Beam-Warming スキームの結果、そして黒四角が式 (14) のスキームの結果である。式 (14) のスキームの結果は精度が向上しているため、他二つのスキームに比べ、より解析解に一致している。

3. 四次精度非振動中心差分スキーム

式 (22) に示された四次精度のスキームは一次精度風上スキームと補正項の線形結合の形で示されているので、既存の TVD スキームの考え方から、流れの状態によって式 (22) 右辺の u の変分量 Δu を制限することで非振動解を得ることができると考えられる。すなわち制限関数を L として制限関数を含めた形で式 (22) を書き直すと次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^{LW4} = & \tilde{f}_{i+1/2}^{1uw} + \frac{1}{2} \left[\frac{c}{12}(2a^3 - 14a) + |c| \right] L2_{i+1/2} \\ & - \frac{c}{24}(a^2 - 1) [(a + 2)L1_{i-1/2} + (a - 2)L3_{i+3/2}] \end{aligned} \quad (23)$$

制限関数 $L1$ 、 $L2$ 、 $L3$ は Δu の関数であり、さまざまな形が考えられるが、既存の二次精度 TVD スキームに用いられる制限関数^{(7),(8)}を利用することを考慮し、数値実験を行った結果、ここでは以下の制限関数を用いる。
 $c \geq 0$

$$\begin{aligned} L1_{i-1/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i-1/2}, \text{LIM}(\Delta u_{i+1/2}, \Delta u_{i+3/2})) \\ L2_{i+1/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i+1/2}, \Delta u_{i-1/2}) \\ L3_{i+3/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i+3/2}, \text{LIM}(\Delta u_{i-1/2}, \Delta u_{i+1/2})) \end{aligned} \quad (24)$$

$c < 0$

$$\begin{aligned} L1_{i-1/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i-1/2}, \text{LIM}(\Delta u_{i+1/2}, \Delta u_{i+3/2})) \\ L2_{i+1/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i+1/2}, \Delta u_{i+3/2}) \\ L3_{i+3/2} &= \text{LIM}(\Delta u_{i+3/2}, \text{LIM}(\Delta u_{i-1/2}, \Delta u_{i+1/2})) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、LIM は既存の二次精度 TVD スキームに用いられる制限関数^{(7),(8)}である。上記の制限関数は LIM の形に関わらず、スキームに対して流れの滑らかなところ、すなわち Δu の変化が限りなく微小であれば四次精度を維持させ、解の極値においては一次精度風上スキームに切り替えるもので、風上を意識した形になっているが定係数線形波動方程式を陽的に解く場合においては $-1 \leq a \leq 1$ の全てのクーラン数で安定的である。

4. 圧縮性オイラー方程式への拡張

いままでに考えてきたスキームは既存の方法を用いることで圧縮性オイラー方程式に適用することができる。すなわち、保存則差分法を定義し、セル間での物理量の決定には近似リーマン解法を用い、また、方程式を固有ベクトル系に展開することで本スキームを圧縮性オイラー方程式に適用することができる。ここでは次式の一次元オイラー方程式に対してスキームを適用する。二次元、三次元の方程式に対しても手順は同様である。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{bmatrix}$$

ここで、 ρ 、 u 、 p 、 e はそれぞれ密度、速度、圧力、全エネルギーである。このオイラー方程式に対する本スキームの数値流束は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} [E_i + E_{i+1} + R_{i+1/2} \phi_{i+1/2}] \quad (27) \\ \phi_{i+1/2} &= \psi(\lambda_{i+1/2})(L2_{i+1/2} - \alpha_{i+1/2}) \\ &\quad + \frac{\lambda_{i+1/2}}{6}(a^3 - 7a)L2_{i+1/2} \\ &\quad - \frac{\lambda_{i+1/2}}{12}(a^2 - 1)(a + 2)L1_{i-1/2} \\ &\quad - \frac{\lambda_{i+1/2}}{12}(a^2 - 1)(a - 2)L3_{i+3/2} \\ \alpha_{i+1/2} &= R_{i+1/2}^{-1} \Delta Q_{i+1/2} \\ a &= \lambda_{i+1/2} \cdot \Delta t / \Delta x \end{aligned}$$

ここで、 α 、 a はそれぞれ固有ベクトル系に展開された際の保存量、クーラン数であり、 R 、 R^{-1} はそれぞれ右

固有ベクトル行列、左固有ベクトル行列、 λ は固有値である。 R 、 R^{-1} 、 λ の具体的な定式は例えば文献(4)、(9)を参照されたい。また、 ψ は非物理的な不連続解を除去するエントロピコレクタであり、文献(4)によれば、次式のように与えられる関数である。

$$\psi(x) = \begin{cases} |x| & |x| > d \\ \frac{x^2+d^2}{2d} & |x| \leq d \end{cases} \quad (28)$$

ここで d は正の小さな数とされている。制限関数 $L1$ から $L3$ の形は定係数線形波動方程式の場合に用いた式(24)、(25)と同様であるが、ここでは α の関数となつて次式のようになる。

$$\lambda_{i+1/2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} L1_{i-1/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i-1/2}, \text{LIM}(\alpha_{i+1/2}, \alpha_{i+3/2})) \\ L2_{i+1/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i+1/2}, \alpha_{i-1/2}) \\ L3_{i+3/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i+3/2}, \text{LIM}(\alpha_{i-1/2}, \alpha_{i+1/2})) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda_{i+1/2} < 0$$

$$\begin{aligned} L1_{i-1/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i-1/2}, \text{LIM}(\alpha_{i+1/2}, \alpha_{i+3/2})) \\ L2_{i+1/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i+1/2}, \alpha_{i+3/2}) \\ L3_{i+3/2} &= \text{LIM}(\alpha_{i+3/2}, \text{LIM}(\alpha_{i-1/2}, \alpha_{i+1/2})) \end{aligned} \quad (30)$$

5. 数値計算例

前節までで作成した非 MUSCL 型の時間空間四次精度非振動中心差分スキームの数値計算例として、非定常衝撃波の反射問題を取り上げる。流れは二次元非定常流れを仮定し、基礎方程式に二次元圧縮性オイラー方程式を用いる。また、気体は非粘性、非熱伝導の完全気体(比熱比 1.4)を仮定する。計算領域を図 4 に示す。初期条件として、垂直面に対しある斜角 θ を持つ衝撃波マッハ数 M_S の垂直衝撃波 I を与え、その垂直衝撃波が反射壁に入射する様子を仮定している。これは斜角 θ の斜面に垂直衝撃波が入射する場合と同等な流れ場である。境界条件は底辺上の一部を反射条件とし、他辺は全て開空間とし、流入、流出条件を与えた。計算格子は離散点を水平方向に 300 点、垂直方向に 100 点とした正方形均一格子とした。

テストケースとして、衝撃波マッハ数 M_S 、斜角 θ はそれぞれ、 $M_S = 4.0$ 、 $\theta = 40(\text{deg})$ とした。この条件下では衝撃波は二重マッハ反射という反射形態を示す。典型的な二重マッハ反射における密度の不連続線の様子を図 5 に示す⁽¹⁰⁾。ここで、 I は入射衝撃波、 R は反射

Fig.4 Computational domain for a shock wave impinging to inclined wall.

Fig.5 Typical configuration of density discontinuities in a double Mach reflection.

Fig.6 Numerical results ($\alpha = 0.3$).

- A: Yee second order upwind TVD scheme with the Superbee limiter.
- B: Roe FDS with MUSCL(Third order biased upwind).
- C: Roe FDS with MUSCL(Third order biased upwind, Fourth stage-second order Runge-Kutta time integration).
- D: Present scheme with the Superbee limiter.

衝撃波、 M はマッハステム、 $T1$ は第一三重点、 $T2$ は第二三重点、 $2S$ は $T2$ から伸びる衝撃波、また $S1$ 、 $S2$ は滑り線である。

図 6 に計算結果を示す。図は計算結果を 50 本の等密度線で図示したものである。縦軸、横軸は無次元距離を示

している。比較のため、本スキームの結果に加えて、三つの典型的な TVD スキームによる結果も示した。ケース A は Yee による二次精度風上型 TVD スキーム⁽⁴⁾の結果であり、制限関数に最も圧縮的とされる Superbee 関数を用いている。ケース B は、有限体積法に Roe による流束差分法 (FDS)⁽⁶⁾を MUSCL 法で三次精度に高次精度化したスキームを適用した結果である。流束制限の際の圧縮係数は 2 とした。ケース C はケース B が一次の時間精度しか持たないため、四段階二次精度の Runge-Kutta 法により時間積分を行ったものである。ケース D が本スキームによる結果である。Yee 法と本スキームは空間方向に時間分割法を用いており、一時間積分は次式のように三段階の一次元計算に分割されている。

$$Q^{n+1} = L_x(\Delta t/2)L_y(\Delta t)L_x(\Delta t/2)Q^n \quad (31)$$

ここで L_x 、 L_y はそれぞれ x 、 y 方向の差分計算を表す演算子、添字 n は時間ステップである。また全ケースとも近似リーマン解法として Roe 平均⁽⁶⁾を用いており、時間積分は陽的で、クーラン数 α は 0.3 で固定した。

各ケースの結果を見ると、入射衝撃波、反射衝撃波に対する解像度は全ケースでほぼ同じである。しかし、滑り線の解像度については各ケースで若干の違いが見られる。ケース A と B の滑り線の解像度は同程度であるが、ケース B は、全体的な解の安定性がよくない。これはケース B が一次の時間精度であることが原因と考えられる。ケース A は大域的に二次の時間精度を持つ。ケース B の時間精度を向上させ解の不安定を改善した結果がケース C である。ケース C の時間精度は二次であり、ケース B と比較して安定性がかなり改善されている。しかしながら、滑り線に対する解像度はケース A、B と比べほんの少し低い。ケース D は本論で提案したスキームによる結果であり、ケース C と非常によく似た解の傾向を示しているが、滑り線についてはケース A、B と比較して若干ではあるが高解像となっている。次に各ケースの計算時間を比較する。計算には 297MIPS のシングル CPU 計算機 (ビジュアル・テクノロジー VT-Alpha 300AXP) を用いており、全ケースにおいて、ベクトル化等、特にプログラムのソースコードに依存するような最適化は一切施していない。計算に要した CPU 時間を表 1 に示す。表 1 中の括弧内の数値は Yee 法の CPU 時間を 1.00 とした時の相対値である。本スキーム (ケース D) は Yee 法 (ケース A)、単段階時間積分を行った場合の FDS-MUSCL 法 (ケース B) とだいたい同じ計算時間であり、ケース B の結果の安定性を改善したケース C と比較すれば格段

case	CPU time (sec)	
case A	1090	(1.00)
case B	1350	(1.23)
case C	4800	(4.40)
case D	1241	(1.13)

Table.1 CPU time for calculations.

 Fig.7 Numerical results(600 × 200 discretized, $\alpha = 0.8$).

A: Yee Second order upwind TVD scheme with the Superbee limiter.

B: Present scheme with the Superbee limiter.

に早く、かつケース C と同程度、またはそれ以上の解像度、安定性を有する結果を得ることができると言える。

また、MUSCL 法が陽解法に適用する場合において、TVD 安定を得るために最大クーラン数が 1 未満に抑えられるのに対し、本スキームは解析的には最大クーラン数を 1 までとることができ、陽解法における実問題への応用に際してはさらに高効率になるものと思われる。

実際にクーラン数を 0.8 として本テスト問題を解いた例を図 7 に示す。比較のため、Yee 法による結果も示す。上段に示されるケース A が Yee 法による結果であり、下段のケース B が本スキームの結果である。離散点数は上記のテストの 4 倍の 600 × 200 点で計算した。また図は 120 本の等密度線で図示している。

不連続に対する解像度は両ケースで同程度であるが、滑り線 S2 に対してはややケース B の結果が解像度がよい。また、解の安定性もややケース B の方がよい。また滑り線の巻き上がりによる渦の捉えられかたに違いが見られた。結果はオイラー方程式の結果であるので渦または渦近傍の流れについて議論することはできないが、捉えられかたの違いはスキームの空間、時間精度の違いが現れたものと思われる。

6. 結 言

本論では Lax-Wendroff スキームの考え方を拡張した時間空間四次精度のスキームに制限関数を導入することで、大域的時間空間四次精度の非振動スキームを作成し、二次元圧縮性流れの解析に適用して、その解を、他の一般的によく用いられている高次精度 TVD スキームの解と比較した。その結果、高解像な結果を比較的よい安定性を保ち、かつ多段階時間積分法を用いた MUSCL 法と比較して効率的に得ることができた。無論、二次精度の単段階時間積分を用いる TVD スキームと比べ、数値流束の計算という局所を見れば、確かにやや多くの演算が必要になるが、本スキームは大域的には時間、空間ともに四次精度を維持できるスキームであり、多段階時間積分を必ずしも必要とせず、本論で述べた数値計算結果においては、若干ではあるが二次精度スキームよりも精度のよい解を得ることができた。

非定常流れはどちらかといえば陰解法の適用が難しいため、未だ陽解法で解かれることが多い。その際、一般的には多段階時間積分を用いる MUSCL 法は非 MUSCL 型のスキームと比べ計算時間が多くなり、三次元計算のように多くの離散点を扱う場合は特に非 MUSCL 型のスキームが有利であると考えられる。そのような数値解析においては、さらに、解適合格子法など、効率的な方法と組み合わせれば、より本スキームの利点を活かすことができると思われる。

文 献

- (1) Harten A., On a Class of High-Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes, (1984), *SIAM J.* 21(1), 1-12.
- (2) van Leer B., Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V, A Second-Order Sequel to Godunov's Method", *J. Comput. Phys.* 32 (1979), 101-136.
- (3) 山本悟, 大宮司久明, 石坂浩一, 「非定常圧縮性オイラー方程式の四次精度 MUSCL 差分スキーム」, 機論 59-557, B (1993), 43-48.
- (4) Yee H.C., "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods", *NASA Technical Memorandum* 101088 (1989).
- (5) Davis S.F., "TVD Finite Difference Schemes and Artificial Viscosity", *ICASE Report* No.84-20 (1984).
- (6) Roe P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.* 43 (1981), 357-372.
- (7) Sweby P.K., "High Resolution TVD Schemes Using Flux Limiters", *Lecture in Applied Mathematics* vol.22 (1985), 289-309.
- (8) Hirsch C., "Numerical Computation of Internal and External Flows vol.2", (1990), JOHN WILEY and SONS.
- (9) 藤井孝蔵, 「流体力学の数値計算法」, (1994), 東京大学出版会.
- (10) Ben-Dor G., "Shock Wave Reflection Phenomena", (1991), Springer-Verlag, New-York.