軸対称ノズルからの適正膨張超音速層流噴流の構造*
(ピトー全圧に及ぼすレイノルズ数の影響)樫谷 賢士^{*1}, 宮里 義昭^{*2}, 益田 光治^{*2}
矢野 栄宜^{*2}, 松尾 一泰^{*2}Structure of a Correctly Expanded Supersonic Laminar Jet
from Axisymmetric Nozzles
(Effect of Reynolds Number on Pitot Impact Pressure)Masashi KASHITANI, Yoshiaki MIYAZATO, Mitsuharu MASUDA,
Hidenobu YANO and Kazuyasu MATSUO

Theoretical and experimental investigations were performed on the structure of a correctly expanded supersonic laminar jet from axisymmetric nozzles. A small perturbation method was used in the theoretical calculation, and the effect of the Reynolds number Re_{De} at the nozzle exit on the Pitot impact pressure on the jet center line is discussed. A low-density wind tunnel was used for the experiments with the Mach number M_e at the nozzle exit of about 2.9 and Re_{De} from 1 000 to 1 800. The axial and radial Pitot impact pressure profiles were measured, and it was found that the Pitot impact pressure distributions on the jet center line correlate quite well with the parameter $x/(D_e Re_{De})$, where x is the downstream distance from the nozzle exit and D_e is the nozzle exit diameter. The present theory suggests that the length of the jet potential core increases linearly with the increase in Re_{De} , and this result is found to agree quantitatively well with the results of the experiment.

Key Words: Compressible Flow, Axisymmetric Flow, Supersonic Flow, Laminar Jet, Pitot Impact Pressure, Potential Core Length

1. ま え が き

軸対称ノズルから流出する超音速噴流は、ノズル出口圧力 p_e と背圧 p_b の比 p_e/p_b が 1 より小さい場合、等しい場合、および大きい場合でそれぞれ過膨張噴流、適正膨張噴流、不足膨張噴流として大別される⁽¹⁾。これらの超音速噴流は、ノズル出口直径 D_e を代表長さとするレイノルズ数 Re_{De} が、3 000 程度で層流から乱流へ遷移すると考えられている⁽²⁾。したがって、これまでのロケットノズルからの過膨張噴流^{(3)~(6)}や、ガスアトマイゼーションに関連する超音速噴流⁽⁷⁾⁽⁸⁾、騒音に関連して研究が行われてきた超音速噴流^{(9)~(18)}などは、いずれも超音速乱流噴流である。

一方、超音速層流噴流に関する研究として、噴流騒音を熱線風速計により調べることを目的とした報告⁽¹⁹⁾や、高温物質の性質を調べるために、乱れの影響がない超音速層流噴流を使って、試験物質を安定的に空中浮揚させる、ALFR(Aerodynamic Levitation Flow Reactor)に関する報告⁽²⁰⁾がある。特に、後者の研究では、試験物質の壁面からの空中浮揚高さは、試

験物質表面での衝突全圧であるピトー全圧に依存するため、ピトー全圧の流れ方向分布や、ピトー全圧とレイノルズ数 Re_{De} の関係が重要となるが、これらの問題に関して、これまでほとんど研究がなされておらず、過膨張、適正膨張、不足膨張のいずれの噴流に対しても、ピトー全圧に及ぼす Re_{De} の影響は、まったくわかっていない。

本研究では、低レイノルズ数領域(Re_{De} = 約 1 000~1 800)における、軸対称ノズルからの適正膨張超音速層流噴流の構造について、理論解析を行うとともに、低密度風洞を用いピトー全圧管による噴流中心軸上と、それに直角方向の全圧分布とマッハ数分布を求め、レイノルズ数がピトー全圧に及ぼす影響を明らかにした。

2. 理 論 解 析

2・1 基礎方程式と境界条件 図1に示すように、軸対称ノズル上流のよどみ室において圧力 p_0 、温度 T_0 をもつ完全気体が、静止した同じ気体で占められる領域(圧力 p_b 、温度 T_b)に噴出する流れを考える。本解析では、ノズル出口からの流れはノズル中心軸に平行な速度 u_e 、マッハ数 M_e をもつ一様流で、ノズル出口圧力 p_e は背圧 p_b に等しい。すなわち、ノズルか

* 原稿受付 1997年2月7日。

^{*1} 正員、九州大学大学院(〒816 春日市春日公園6-1)。^{*2} 正員、九州大学総合理工学研究科。

Fig. 1 Flow field schematic for correctly expanded supersonic laminar flow from axisymmetric nozzle

らの噴流は適正膨張超音速層流噴流と仮定する。また、噴流中の任意の点における静圧 p は背圧 p_b に等しいと仮定する。

ノズル出口面(ノズル出口直径 D_e)の中心を原点とし、その位置からの軸方向距離、半径方向距離をそれぞれ x と r で示し、 x 方向と r 方向の噴流の速度分布の変化を模式的に図 1 の x 軸の上半分の領域に示す。ノズル出口で矩形の速度分布をもつ超音速噴流は、周囲の気体とせん断層を形成しながらしだいに周囲の状態(速度零、温度 T_b)に近づいていく。このとき噴流のせん断層は、ノズル出口($x=0$)から十分下流までつねに層流で、 x 方向の熱伝導は、 r 方向の熱伝導に比べて無視できると仮定する。

以上の仮定により、噴流に対する基礎式は、以下に示すように一般によく知られた境界層方程式と同様な形となる。すなわち連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v r) = 0 \quad (1)$$

ただし、 u と v は、それぞれ x 方向と r 方向の速度で、 ρ は密度である。 x 方向および r 方向の運動方程式は

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

ただし、 p は静圧、 μ は粘性係数で、式(2)には乱流粘性は含まれておらず、式(2)は層流に対する式である。エネルギー式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u r \left(C_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho v r \left(C_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(u \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

ただし C_p は定圧比熱、 T は静温度、 λ は熱伝導率である。上式も式(2)と同様、層流噴流のみ適用が可能である。また、気体定数を R とすると完全気体の状

態方程式は

$$p = \rho R T \quad (5)$$

以上の式(1)~(5)が基礎式となる。境界条件は、ノズル出口($x=0$)において

$$u = u_e (0 < r < D_e/2), u = 0 (D_e/2 < r) \quad (6)$$

また、2・2 節の式(17)で示すように、プラントル数 $Pr = 1$ と仮定すれば T は u のみの関数となるから、 T に関する境界条件は u を使って表される。すなわち、ノズル出口($u = u_e$)と噴流周囲($u = 0$)においてそれぞれ

$$T = T_e(u = u_e), T = T_b(u = 0) \quad (7)$$

2・2 微小じょう乱法による理論解 u, v, ρ, μ, x, r を次式のようにノズル出口の状態で無次元化する。

$$\begin{aligned} \bar{u} & \equiv \frac{u}{u_e}, \bar{v} \equiv \frac{v}{u_e}, \bar{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_e}, \bar{\mu} \equiv \frac{\mu}{\mu_e}, \bar{x} \equiv \frac{x}{D_e}, \\ \bar{r} & \equiv \frac{r}{D_e} \quad (8) \end{aligned}$$

上式を式(2)に代入し整理すると

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{Re_{De}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu} \bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (9)$$

ただし、 $Re_{De} \equiv \rho_e u_e D_e / \mu_e$ である。粘性係数にマクスウェル・レイリーの関係⁽²¹⁾、すなわち $\mu / \mu_r = (T / T_r)^n$ (n は気体によって定まる定数、添字 r は基準状態を示す)を用い、ノズル上流から出口までの流れを等エントロピー流れと仮定すると、 Re_{De} はノズル上流の状態量を使って次のように表せる。

$$\begin{aligned} Re_{De} & = \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \left(\frac{T_r}{T_0} \right)^n \frac{p_0 M_e D_e}{\mu_r} \\ & \times \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right]^{n - [(\gamma + 1) / (2 (\gamma - 1))]} \quad (10) \end{aligned}$$

ここで γ は気体の比熱比である。

式(9)は、非線形項を含むためこのままでは解析が困難である。そこで微小じょう乱法によって式(9)を線形方程式に変形する⁽²²⁾。すなわち、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\rho}, \bar{\mu}$ を次式で表し、 $\bar{u}', \bar{v}', \bar{\rho}', \bar{\mu}'$ は 1 より十分小さいと仮定す

る。

$$\bar{u}=1+\bar{u}', \bar{v}=\bar{v}', \bar{\rho}=1+\bar{\rho}', \bar{\mu}=1+\bar{\mu}' \cdots (11)$$

上式を式(9)に代入し、二次以上の微小項を消去して整理すると

$$Re_{De} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \cdots \cdots \cdots (12)$$

上式を解き、境界条件の式(6)を用いると

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{r}) &= \frac{u}{u_e} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty J_0(\bar{r}\xi) J_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{Re_{De}} \bar{x}\right) d\xi \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (13)$$

ただし、 J_0, J_1 は、それぞれ第1種のゼロ次、および一次のベッセル関数である。上式をベッセル関数についての公式⁽²³⁾⁽²⁴⁾を用いて変形すると、噴流中心軸上($r=0$)の速度 u_c は次式で表される。

$$\bar{u}_c(\bar{x}) = u_c/u_e = 1 - \exp[-Re_{De}/(16x/D_e)] \cdots \cdots \cdots (14)$$

次に、エネルギー式(4)の左辺において $u^2 + v^2 \approx u^2$ とおき、同式を式(1)を用いて変形し、さらに式(2)の両辺に u を掛けた式を辺々引くと

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial}{\partial x} (C_p T) + \rho v \frac{\partial}{\partial r} (C_p T) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (15)$$

上式を解析的に解くために、 T は u のみの関数と仮定⁽²⁵⁾して上式を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dT}{du} \frac{\partial}{\partial r} \left[(Pr-1) \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ = \left(\lambda \frac{d^2 T}{du^2} + \mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (16)$$

ここでプラントル数 $Pr = C_p \mu / \lambda = 1$ と仮定すると⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾、次式が得られる。

$$\lambda \frac{d^2 T}{du^2} + \mu = 0 \cdots \cdots \cdots (17)$$

上式を積分し、境界条件の式(7)を用いると

$$\begin{aligned} T = T_b + T_e \left(1 - \frac{T_b}{T_e} + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \frac{u}{u_e} \\ - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 T_e \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (18)$$

上式に式(13)を代入すれば、 T が x と r の関数として求まり、音速 $a = (\gamma RT)^{1/2}$ とマッハ数 $M = u/a$ の関係から M も x と r の関数として求まる。なお本解析結果の適用範囲については、4・2節の実験結果との比較で述べる。

2・3 ピトー全圧に及ぼすレイノルズ数の影響

2・2節で導いた解析結果をもとにピトー全圧 p_i (Pitot impact pressure)に関する関係式を導く。ここで p_i は、噴流中にピトー管を挿入したときに測定さ

れる全圧を意味する。また本解析では $T_b/T_0=1$ の場合の流れを考える。このとき、式(18)と $T_b/T_e = T_0/T_e = 1 + (\gamma-1)M_e^2/2$ の関係から、噴流の任意の x と r の位置におけるマッハ数は

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{u_e} \frac{u_e}{a_e} \frac{a_e}{a} = \frac{\frac{u}{u_e} M_e}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 \right]}} \cdots \cdots \cdots (19)$$

p は流れ方向にも半径方向にも一定と仮定しているから、 p_i は流れが超音速 ($M > 1$) のときには、垂直衝撃波の関係式を考慮して

$$\frac{p_i}{p_0} = \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \cdots \cdots \cdots (20)$$

流れが亜音速 ($M < 1$) のときには

$$\frac{p_i}{p_0} = \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{2 + (\gamma-1)M_e^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \cdots \cdots \cdots (21)$$

気体の比熱比 $\gamma=1.4$ とし、出口マッハ数 $M_e=3.0$ からの適正膨張超音速層流噴流について、式(14)、(19)～(21)より計算したノズル中心軸上のピトー全圧 p_{ic} と、ノズル上流の全圧 p_0 の比 p_{ic}/p_0 の x 方向分布を、 Re_{De} をパラメータとして図2に示す。 $M_e=3.0$ に対する垂直衝撃波の下流と上流の全圧比は0.328で、この値を図2中に破線で示してある。図2より、 p_{ic}/p_0 は x/D_e の増加とともに単調に減少し、 Re_{De} が小さいほど減少が著しい。なお、計算結果と実験値との比較については4・2節で述べる。

2・4 ポテンシャルコアの長さ 図1に示したように、ノズル出口からの超音速噴流のポテンシャルコアは流れ方向に徐々に細まり、ある距離で消滅する。本論文では、ノズル軸上の速度 u_c がノズル出口速度

Fig. 2 Effect of Reynolds number on Pitot impact pressure along nozzle axis ($\gamma=1.4, M_e=3.0$)

Fig. 3 Experimental setup

u_e の 99% になった位置までの、ノズル出口からの軸方向距離をポテンシャルコアの長さ x_{core} と定義する。この定義と式(14)より、 x_{core} は次式で表される。

$$x_{core} = D_e Re_{De} / 73.68 \dots \dots \dots (22)$$

ポテンシャルコアの終了点におけるマッハ数 $M_c(x)_{x=x_{core}}$ とピトー全圧 $p_{ic}(x)_{x=x_{core}}$ は、 $u_c = 0.99u_e$ の関係を式(19)と式(20)に代入すると、次式で与えられる。

$$M_c(x)_{x=x_{core}} = 0.99 M_e / \sqrt{1 + \frac{0.0199(\gamma-1)}{2} M_e^2} \dots \dots \dots (23)$$

$$\frac{p_{ic}(x)_{x=x_{core}}}{p_0} = \left[\frac{(\gamma+1) M_c^2(x)_{x=x_{core}}}{2 + (\gamma-1) M_e^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \times \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_c^2(x)_{x=x_{core}} - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \dots \dots \dots (24)$$

噴流中心軸上のピトー全圧 p_{ic} あるいはマッハ数 M_c の x 方向分布を測定し式(23)あるいは式(24)を使えば、 x_{core} を実験的に求めることができる。この結果については、4・3 節で述べる。

3. 実験装置と方法

3・1 実験装置 実験装置として使用した低密度風洞の概要を図3に示す。作動気体には窒素を用いた。高圧貯気槽(最高圧力 15 MPa)内の窒素ガスは、自動調圧弁で 0.3 MPa に減圧されたのち、浮子式流量計を通り手動減圧弁で減圧されて、直径 155 mm、長さ 380 mm のプレナム室でよどみ状態になる。その後、気体は 3・2 節で述べる軸対称超音速ノズルで加速され、超音速自由噴流として測定部(長さ 1 000 mm、奥行き 600 mm、高さ 700 mm の直方体)に噴出される。本装置の排気系は、メカニカルブースターポンプ(19 000 ℓ /min)と、ロータリポンプ(3 000 ℓ /min)で構成されている。

(a) Pitot impact tube

(b) Axisymmetric nozzle

Fig. 4 Schematic of Pitot impact tube and test nozzle

測定部の上面には、ピトー全圧管を図3の x 方向と r 方向に移動可能な二次元トラバース装置が備えられている。トラバース範囲は、ノズル出口中心を原点として x 方向に $-30 \sim +225$ mm、 r 方向に ± 95 mm である。

3・2 ピトー全圧管と供試ノズル 本実験で使用したピトー全圧管および供試ノズルを図4(a)、(b)に示す。ピトー全圧管は、外径 1.0 mm、内径 0.9 mm のニッケル管で、その他の寸法は図4(a)のとおりである。供試ノズルは、スロート直径 D_{th} が 4.0 mm で出口直径 D_e が 8.3 mm、設計マッハ数 M_d が 3.0 の軸対称超音速ノズルである。ノズル出口には、適正膨張圧力比のとき超音速噴流が出口で平行流となるように、長さ 4 mm の平行部が設けてある。なお、ノズル内の末広部と平行部はなめらかに接合されており、この位置から発生する斜め衝撃波は極めて弱く、4・1 節で述べるように、この斜め衝撃波がノズル出口からの噴流構造に及ぼす影響は検知されなかった。

3・3 実験方法 本実験では、ピトー管による噴流中の全圧 p_i とプレナム室内圧力(よどみ圧 p_0)、お

よび測定部の静止気体圧力(背圧 p_b)を、電磁バルブを切り換えることにより、キャパシタンスマノメータ(アルバック社製 CCM-100)を使って測定した。また、 p_b と p_0 は手動減圧弁とゲートバルブの調節により、ノズルからの超音速噴流が適正膨張の条件となるように設定した。適正膨張の条件については4・1節で詳細に述べる。また本実験では、プレナム室の圧力 p_0 を変化させて、適正膨張超音速層流噴流中のピトー全圧に及ぼすレイノルズ数 Re_{De} の影響を調べた。ピトー管による全圧測定は、 x 方向に約5 mm 間隔で、 r 方向には中心から8 mm までは約1 mm 間隔、その後は約2 mm 間隔で測定した。

4. 実験結果と考察

本実験におけるクヌッセン数⁽²⁷⁾は $Kn=1.253\gamma^{1/2} \times M_e/Re_{De}=0.004$ 以下であり流れは連続体と考えられる。また、Morrison ら⁽¹⁹⁾ が適正膨張超音速噴流の軸方向の乱れを、熱線風速計を使って調べた例によると、 $M_e=1.4$ で $Re_{De}=3700$ のとき、ノズル出口直径の20倍程度まで流れは層流である。本研究における超音速噴流のピトー全圧測定範囲は、レイノルズ数が最大で1800であり層流噴流であると考えられる。以下、2章の解析結果と本実験結果を比較検討し考察する。

4・1 適正膨張の条件 本実験では供試ノズルの適正膨張状態を次のようにして求めた。まず、供試ノズル出口の中心位置にピトー管の先端を一致させ、ノズル上流の全圧 p_0 を一定に保った状態でゲートバルブを全開にして、ノズルからの噴流を不足膨張状態として出口におけるピトー全圧を求める。その測定結果と垂直衝撃波の関係式、および p_0 とノズル出口静圧

p_e の間の等エントロピー流れの関係を用いると、ノズル出口マッハ数 M_e と適正膨張時のノズル出口圧力 p_e が得られる。

本実験では、真空排気系の性能の関係から、 p_0 として1.75, 2.50, 3.25 kPaの3種類について実験を行った。これらの場合の適正膨張状態の p_e を求めると、それぞれ0.057, 0.077, 0.098 kPaであった。適正膨張状態におけるノズル中心軸上の、ノズル出口前後1 mmの範囲におけるピトー全圧 p_i と p_0 の比、およびマッハ数 M_e の分布を図5(a), (b)に示す。これらの状態はそれぞれ、レイノルズ数 $Re_{De}=1003, 1395, 1801$ に対応する。

図5(a)より p_i/p_0 は x 方向に徐々に減少し、これに対応して図5(b)のマッハ数 M は x 方向にゆるやかに増加している。したがって、ノズル内の接合部で衝撃波は発生していないか、発生していても極めて弱く、ノズル出口からの流れはほぼ一様な超音速流れである。なお詳細に考察すると、レイノルズ数が大きいとピトー全圧は若干小さく、したがってマッハ数は若干大きい。これは、レイノルズ数が大きくなると、ノズル内の境界層排除厚さが薄くなるためと思われる。Rott ら⁽²⁸⁾ は、非圧縮性層流境界層に用いられるカル

(a) Pitot impact pressure (b) Mach number

Fig. 5 Pitot impact pressure and Mach number distributions at the nozzle exit

(a) Effect of Reynolds number on Pitot impact pressure

(b) Comparison of experiment and calculation

Fig. 6 Pitot impact pressure distributions along jet axis

マン・ポールハウゼンの近似解法を、圧縮性層流境界層の解析に利用できるように改良している。この解析によると、本供試ノズルにおける排除効果を考慮したノズル出口マッハ数は2.95で、本ノズルの設計マッハ数 $M_d=3.0$ より若干小さい。また、図5(b)の $x=0$ におけるマッハ数 M_e は、 $Re_{De}=1003$ のとき $M_e=2.88$ 、 $Re_{De}=1395$ のとき $M_e=2.92$ 、 $Re_{De}=1801$ のとき $M_e=2.93$ で、ほぼ $M_e=2.90$ とみなすことができる。

4.2 噴流中心軸上のピトー全圧分布とマッハ数分布
噴流中心軸上のピトー全圧 p_i の測定結果と p_0 の比 p_{ic}/p_0 をノズル出口からの無次元距離 x/D_e に対して図6(a)に示す。図6(a)の横軸に平行な破線 $p_{ic}/p_0=0.358$ は、 $M_e=2.90$ に対する垂直衝撃波下流と上流の全圧比で、 $p_{ic}/p_0=0.032$ は $M_e=2.90$ に対する適正膨張状態の背圧とノズル上流全圧の比である。また、●は $Re_{De}=1003$ 、○は $Re_{De}=1395$ 、▲は $Re_{De}=1801$ のときの結果で、いずれの Re_{De} の場合も、ノズル出口から $x/D_e=10\sim 20$ の範囲の p_{ic}/p_0 は、ほぼ0.36の一定に保たれる。この領域は図1に示すポテンシャルコア領域に対応しており、その長さは出口マッハ数が同じでも、 Re_{De} が大きいほど長い。ポテンシャルコア領域の下流では、噴流と周囲気体とのせん

断作用による粘性の影響が噴流中心軸に達し、 p_{ic}/p_0 は x/D_e の増加とともに単調に減少する。

次に式(22)を参考にして x を $D_e Re_{De}$ で無次元化し、 p_{ic}/p_0 を $x/(D_e Re_{De})$ に対して図6(b)に示す。このように図示すれば、図6(a)の3種類の実験点は、 Re_{De} に関係なく1本の曲線にプロットされる。また、図6(b)の実線は2章で述べた方法による計算結果である。図6(b)よりノズル出口から $x/(D_e Re_{De})=15\times 10^{-3}$ 程度(ポテンシャルコア終了点近く)までは、本実験結果は計算結果と極めてよく一致する。これより下流では、実験結果は計算結果よりわずかに小さい。よって、本方法による解析結果がポテンシャルコア領域において実験結果とよく一致することから、ポテンシャルコア内では式(11)の仮定が十分満足されると考えられる。

次に、ピトー全圧 p_{ic} の測定結果より得られた噴流中心軸上のマッハ数 M_c の分布を図7(a)に、その実験結果と計算結果との比較を図7(b)に示す。図7(a)、(b)の横軸は、それぞれ図6(a)、(b)と同じである。なお p_{ic} から M_c を求める際、背圧と噴流中の静圧は等しいと仮定して計算した。図6(a)、(b)

(a) Effect of Reynolds number on Mach number

(b) Comparison of experiment and calculation

Fig. 7 Mach number distributions along jet axis

Fig. 8 Potential core length

Fig. 9 Relationship between Reynolds number and Mach number ($\gamma=1.4$, $R=296.8 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, $T_r=273.2 \text{ K}$, $\eta=0.67$, $D_e \tan 8.3 \text{ mm}$, $T_0=289 \text{ K}$, $\mu_r=16.63\times 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$)

と同様に、図7(a)の結果は図7(b)のように整理すれば、レイノルズ数に無関係に一つの曲線上にプロットされる。また、図7(a)よりノズル出口直径の25倍を過ぎても、噴流中心軸上のマッハ数は1より大きく、流れは超音速である。

4.3 ポテンシャルコアの長さ 適正膨張超音速層流噴流のポテンシャルコアの無次元長さ x_{core}/D_e をレイノルズ数 Re_{De} に対して図8に示す。図8の実線は式(22)による計算結果で、本実験のレイノルズ数 $Re_{De}=1\,003, 1\,395, 1\,801$ の結果をそれぞれ●, ○, ▲で示す。本実験は同一条件で4回行い、その誤差範囲も図8中に示してある。図8より計算結果は、 $Re_{De}=1\,003$ と $1\,395$ の実験結果とかなりよく一致する。また、 $Re_{De}=1\,801$ の実験結果は、本計算結果より若干小さい。その理由は現在のところ不明である。また、 x_{core}/D_e はレイノルズ数 Re_{De} のみで整理でき、 Re_{De} が増加すると x_{core}/D_e は単調に増加する。なお、式(10)より明らかなように、 Re_{De} は M_e, p_0, T_0, D_e および気体の種類(γ, T_r, μ_r および n は気体によって定まる定数である)に依存する。一例として、気体を窒素ガス($\gamma=1.4, T_r=273.2\text{ K}, \mu_r=16.63 \times 10^{-6}\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2, n=0.67$)とし、 $D_e=8.3\text{ mm}, T_0=293\text{ K}$ の場合の M_e と Re_{De} の関係を p_0 をパラメータとして図9に示す。図9には本実験条件を●, ○, ▲(これらの記号は図8の記号と同じ)で示している。図9より、 Re_{De} は M_e が一定であれば、 p_0 が大きいほど大きい。また、 p_0 が一定の場合、 M_e が約1.2より大きければ、 M_e が大きいほど Re_{De} は小さくなる。

4.4 半径方向のピトー全圧分布とマッハ数分布
レイノルズ数 $Re_{De}=1\,395$ の場合の噴流について $x/D_e=1.7, 10.0$ および 25.3 で測定したピトー全圧 p_i とノズル上流全圧 p_0 の比 p_i/p_0 の噴流半径方向 r/D_e

Fig. 10 Pitot impact pressure distributions along radial direction ($M_e=2.9, Re_{De}=1\,395$)

の分布を図10の○印で示す。図10の実線は2章で述べた方法による計算結果である。図10(a)と図10(b)では実験結果と計算結果はかなりよく一致しているが、図10(c)の実験値は計算値と若干ずれている。これは微小じょう乱の仮定が下流に行くほど成り立たなくなるためと思われる。

次に図7(a), (b)と同様に、図10(a)~(c)に示したピトー全圧 p_i の測定値からマッハ数 M を求め、その分布を図11(a)~(c)に○印で示す。実線は計算結果である。図11(a)と図11(b)のポテンシャルコア内では、計算結果は実験値とよく一致しているが、図11(c)の実験値は図10(c)と同様の理由により計算値は実験値とわずかに異なる。

5. 結 論

適正膨張超音速層流噴流のピトー全圧 p_i とマッハ数 M の分布に及ぼす、ノズル出口直径 D_e を代表長さとするレイノルズ Re_{De} の影響を、微小じょう乱法により解析した。また、低密度風洞を用いて、ノズル出口マッハ数 $M_e=2.9$ で Re_{De} 約 $1\,000 \sim 1\,800$ の範囲の適正膨張超音速層流噴流の p_i と M の分布に及ぼす Re_{De} の影響を実験的に調べた。その結果を要約すると以下のとおりである。

(1) 本理論解析より、適正膨張超音速層流噴流の噴流中心軸に沿う流れ方向速度とノズル出口速度の比は式(14)で表され、 Re_{De} のみの関数である。

(2) ノズル中心軸上のピトー全圧 p_{ic} とノズル上流の全圧 p_0 の比 p_{ic}/p_0 の計算値は、ノズル出口からの軸方向距離 x とともに、単調に減少し、 Re_{De} が小さいほど減少が著しい。

(3) ポテンシャルコアの長さ x_{core} は式(22)で表される。すなわち x_{core}/D_e は Re_{De} のみで整理でき、

Fig. 11 Mach number distributions along radial direction ($M_e=2.9, Re_{De}=1\,395$)

Re_{De} と比例関係にある。式(22)は本実験値とよく一致する。

(4) $x/(DeRe_{De})$ に対する p_c/p_0 とノズル中心軸上のマッハ数 M_c の実験値は、それぞれ図 6 (b) および図 7 (b) に示すように、 Re_{De} に無関係に一つの曲線上にプロットされ、 $x/(DeRe_{De})=15 \times 10^{-3}$ 程度までは本計算結果と定量的によく一致する。

(5) 噴流半径方向の p_i/p_0 と M の分布の実験値は、ノズル出口近傍では本計算結果とよく一致し、ノズル出口より離れると計算結果と若干ずれてくる。

最後に、本研究における実験装置の製作には、近藤信昭技官と大学院学生田中淳哉君の助力を得たことを記し、ここに感謝の意を表します。

文 献

- (1) 松尾一泰, 圧縮性流体力学, (1994), 82-85, 理工学社.
- (2) Masuda, M., ほか 3 名, *Prog. Astronaut. Aeronaut.*, **117** (1989), 149-156.
- (3) Sunley, H. L. G., ほか 2 名, *J. R. Aeronaut. Soc.*, **68** (1964), 808-817.
- (4) Chow, W. L. and Chang, I. S., *AIAA J.*, **13**-6 (1974), 762-766.
- (5) 永井實, 機論, **48**-430, B(1982), 998-1007.
- (6) Chen, C. L., ほか 2 名, *AIAA J.*, **32**-9 (1993), 1836-1843.
- (7) See, J. B., ほか 2 名, *Metall. Trans.*, **4** (1973), 1029-1039.
- (8) Klar, E. and Fesco, J. W., *Metals Handbook*, 9th ed., (1984), 25, American Society for Metals Park, Ohio.
- (9) Tam, C. K. W., *J. Fluid Mech.*, **46**-4 (1971), 757-768.
- (10) Tam, C. K. W., *J. Fluid Mech.*, **51**-1 (1972), 69-95.
- (11) Fisher, M. J., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **28**-3 (1973), 563-585.
- (12) Lau, J. C., *J. Fluid Mech.*, **105** (1981), 193-218.
- (13) Tam, C. K. W. and Tanna, H. K., *J. Sound Vib.*, **81**-3 (1982), 337-358.
- (14) Norum, T. D. and Seiner, J. M., *AIAA J.*, **20**-1 (1982), 68-73.
- (15) Seiner, J. M. and Yu, J. C., *AIAA J.*, **22**-9 (1984), 1207-1215.
- (16) Tam, C. K. W., *J. Sound Vib.*, **116**-2 (1987), 265-302.
- (17) Tam, C. K. W., *J. Sound Vib.*, **121**-1 (1988), 135-147.
- (18) Samimy, M., ほか 2 名, *AIAA J.*, **31**-4 (1993), 609-619.
- (19) Morrison, G. L. and McLaughlin, D. K., *AIAA J.*, **18**-7 (1980), 793-800.
- (20) Nordine, P. C. and Atkins, R. M., *Rev. Sci. Instrum.*, **53**-9 (1982), 1456-1464.
- (21) 生井武文・井上雅弘, 粘性流体の力学, (1978), 5, 理工学社.
- (22) Pai, S. I., *Q. Appl. Math.*, **10** (1952), 141-148.
- (23) 森口繁一・ほか 2 名, 数学公式, III (1959), 200, 岩波書店.
- (24) スピーゲル(氏家勝巳訳), 数学公式・数表ハンドブック, (1968), 140, マグロウヒル.
- (25) Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, (1979), 331, McGraw-Hill.
- (26) Shapiro, A. H., *Compressible Fluid Flow*, **II** (1954), 1043, Ronald Press.
- (27) 西川兼康・藤田恭伸, 伝熱学, (1982), 208, 理工学社.
- (28) Rott, N. and Crabtree, L. F., *J. Aeronaut. Sci.*, **19** (1952), 553-563.