応力フラットネス・パラメータの輸送方程式を考慮した 非線形 k - ε - A 三方程式乱流モデルの開発*

須 賀 一 彦^{*1}

Development of a Nonlinear Three Equation Eddy Viscosity Model Coupled with Transport Effects of a Stress Flatness Parameter

Kazuhiko SUGA

This paper describes a development of a new nonlinear three equation eddy viscosity model for capturing two-component turbulence that appears in flows near walls and free surfaces. In a nonlinear k - ε eddy viscosity model, dependence of Lumley's stress flatness parameter: A , has been included by solving its transport equation as the third variable. The proposed nonlinear k - ε - A three equation turbulence model has been tested in fully developed plane channel, open channel and plane Couette-Poiseuille flows as well as several homogeneous strain fields. The results have shown its very encouraging performance in capturing anisotropic turbulence near both wall and shear-free boundaries without any recourse to topographical parameters.

Key Words: Turbulent Flow, Shear Flow, Free Surface Flow, Two-Component Turbulence, Turbulence Model, Nonlinear Eddy Viscosity Model, Stress Flatness Parameter

1. 緒 言

簡便で計算コストの低い渦粘性乱流モデルによってレイノルズ応力の非等方分布、およびそれによって特性づけられるスカラー場の予測を可能とするための方法として、応力-ひずみ関係式に平均速度こう配の高次項を導入する非線形(非等方)渦粘性モデル(または陽的代数応力モデル)が近年再び注目されている^{(1)~(4)}。これらの提案されたほとんどのモデルは二次元流れ場のみを対象としたためか、二次項までの導入で打ち切っている。しかし、最も一般的な応力-ひずみ関係式には三次元流れ場では、Cayley-Hamiltonの定理より独立な五次の速度こう配ひずみテンソルまで含まれる⁽⁵⁾ことから、最近これら独立な項をすべて含んだモデルの構築も試みられるようになった^{(6)~(9)}。

いっぽう、著者らは各高次項のもたらす影響を吟味した結果⁽¹⁰⁾、スワール流れ等の流線曲がりの影響をとらえるために三次項まで含んだ非線形 k - ε モデルを提案した⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。さらに、応力の非等方性の影響を非等方応力の第二不変量(A_2)の輸送式を解くことで積極的

にモデルに反映させ、壁からの距離等の幾何形状変数を完全に排除した k - ε - A_2 モデル⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾に発展させ、遷移流れを含む広範囲の壁乱流においてその有効性を確認した。

ところが、自由表面流れや移動壁上でせん断のない Couette 流れの様なせん断自由流れにおいては、平均速度こう配が消失することからどんな高次のひずみテンソルも0となるため、通常の応力-ひずみ関係式からは常に等方性乱流しか得られない。しかしながら、せん断自由流れでもレイノルズ応力は著しく非等方的で(自由表面上では境界に垂直方向の応力だけが減衰して0になる)、境界面での熱・物質拡散を正しく取り扱うにはこの非等方応力場を精度良く予測する必要がある。また、渦動粘性($\nu_t \approx -\overline{uv}/U_y$)に着目すれば、自由表面に垂直な速度変動 v' へのブロック効果から $\overline{uv}$ も影響を受けるため、図1(a)に示されるように ν_t は自由表面($y=\delta$)近傍でも壁面近傍同様に大きく減衰する。乱流レイノルズ数等の局所変数は自由表面で減衰しないため、通常の渦粘性モデルでは界面からの距離等の汎用性を著しく損なう幾何形状変数の導入なしでは、この ν_t の減衰を考慮することも困難である。

せん断自由境界で A_2 は $2/3$ に漸近するが、特に特徴

* 原稿受付 1997年4月17日。

^{*1} 正員、(株)豊田中央研究所(〒480-11 愛知県愛知郡長久手町大字長瀬字横道41-1)。

Fig.1 (a)Eddy viscosity; (b)Stress flatness parameter:
 $\circ \circ \circ$, Open-channel⁽¹⁵⁾; $\cdots \cdots$, Open-channel⁽¹⁶⁾;
 $---$, Couette⁽¹⁷⁾; $---$, Channel ($Re = 2800$)⁽¹⁸⁾;
 $- \cdot - \cdot -$, Channel ($Re = 6875$)⁽¹⁹⁾.

のある挙動をするわけではないので、著者らの k - ε - A_2 モデル⁽¹⁴⁾(CLS)においてもせん断自由乱流をとらえることは困難である。そこで本研究では、Lumley⁽²⁰⁾の応力フラットネス・パラメータ ($A \equiv 1 - 9/8(A_2 - A_3)$) に着目した。図 1(b)に示されるように、 A は壁乱流、自由表面乱流のようないわゆる二成分乱流で 0 に減衰する不変量であるため、壁乱流やせん断自由な乱流をとらえるパラメータとして有効であると考えられる。したがって、以下に提案するモデルはせん断自由な非等方性乱流の予測も可能とするため、CLS モデルを基礎として A_2 の代りに A の輸送方程式を導入してモデルの再構成を行ったものである。

記号

- a_{ij} : 非等方応力テンソル, $\equiv \overline{u_i u_j} / k - 2/3 \delta_{ij}$
 A, A_s : 輸送方程式および予測された流れ場から得た Lumley の応力フラットネス・パラメータ
 A_2, A_3 : $a_{ij} a_{ij}$ または式 (11), $a_{ij} a_{jk} a_{ki}$
 k, k^+ : 乱流エネルギーおよび k/u_τ^2
 l : 乱れの長さスケール, $\equiv k^{1.5}/\varepsilon$
 $R_t, \hat{R}_t$: 乱流レイノルズ数, $\equiv k^2/(\nu \varepsilon), k^2/(\nu \hat{\varepsilon})$
 Re : レイノルズ数, $\equiv U_b \delta / \nu$
 $\hat{S}$: ひずみ不変量, $k/\hat{\varepsilon} \sqrt{S_{ij} S_{ij}/2}$
 S_{ij} : 平均速度ひずみテンソル, $\equiv U_{i,j} + U_{j,i}$

- u_i, U_i : 変動速度成分および平均速度成分
 u_τ : 摩擦速度, $\equiv \sqrt{\tau_w / \rho}$
 u'^+, v'^+, w'^+ : $\sqrt{u^2}/u_\tau, \sqrt{v^2}/u_\tau, \sqrt{w^2}/u_\tau$
 $\overline{u_i u_j}, \overline{u_i u_j}^+$: レイノルズ応力 および $\overline{u_i u_j} / u_\tau^2$
 U_b : バルク速度
 x_i : デカルト座標
 y^+ : $u_\tau y / \nu$
 δ : チャンネル半幅 (平行平板), チャンネル深さ (オープンチャンネル) またはチャンネル幅 (クエット流れ)
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
 $\varepsilon, \varepsilon^+, \hat{\varepsilon}$: k の散逸率, $\nu \varepsilon / u_\tau^4, \varepsilon - 2\nu(k^{1/2})_{,k}(k^{1/2})_{,k}$
 ν : 動粘性係数
 τ : 乱れの時間スケール, $\equiv k/\varepsilon$
 τ_w : 壁面せん断応力, $\equiv \mu \partial U / \partial y|_w$
 $\tilde{\Omega}$: 渦度不変量, $k/\hat{\varepsilon} \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}/2}$
 Ω_{ij} : 渦度テンソル, $\equiv U_{i,j} - U_{j,i}$

2. 非線形 k - ε - A 三方程式モデル

今回提案するモデルにおいても近年の UMIST のモデル開発要件⁽¹³⁾ である (1) 境界面からの距離等の幾何形状変数の導入の禁止、(2) 乱流レイノルズ数 R_t の効果を粘性低層に限定、を満たすことをモデルの構築の条件とした。

2.1 非線形渦粘性表式 CLS モデルで提案された非線形渦粘性表式は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & -c_\mu \tau S_{ij} + c_1 \tau^2 (S_{ik} S_{kj} - 1/3 S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) \\
 & + c_2 \tau^2 (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) \\
 & + c_3 \tau^2 (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - 1/3 \Omega_{ik} \Omega_{ik} \delta_{ij}) \\
 & + c_4 \tau^3 (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li}) S_{kl} \\
 & + c_5 \tau^3 (\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} \\
 & \quad - 2/3 S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij}) \\
 & + c_6 \tau^3 S_{ij} S_{kl} S_{kl} + c_7 \tau^3 S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} + c_a A_{ij} \cdots \cdots (1)
 \end{aligned}$$

ここで $c_a A_{ij}$ はせん断自由な乱流を表現するために今回導入された付加項 (詳細は後述) である。CLS モデルでは渦粘性の $\hat{R}_t$ 依存度を壁面近傍の粘性低層に限定する目的で c_μ を $\hat{S}$ の増加に回答して減衰する関数とし、粘性低層でのみ $\hat{R}_t$ および $\hat{\varepsilon}/\varepsilon$ の関数によってその挙動が補正されるようにモデル化されている。さらに緩衝領域での減衰効果を補足する目的で A_2 の依存度が c_μ に導入されている⁽¹⁰⁾。しかし、その機構では自由表面近傍の渦粘性の減衰を記述できないので、本モデルでは c_μ のモデルを大きく変更し、

$$c_\mu = 0.09 c_{\mu A} c_{\mu R_t} c_{\mu S} \cdots \cdots (2)$$

と表し、各パラメータからの寄与を以下のようにモデル化した。

$$c_{\mu_A} = \min[1.05, 1.2 \{1 - \exp(-A - (A/0.6)^a)\} + 0.18 \{1 - \exp(-10A)\}^{1/2}] \dots\dots\dots (3)$$

$$c_{\mu_{R_t}} = 1 + 2A \exp(-R_t^2/8100) \dots\dots\dots (4)$$

$$c_{\mu_s} = \min[1.0, 1.2/(1 + 0.06\eta)] \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \eta &= \max(\hat{S}, \hat{\Omega}) r_\eta \\ r_\eta &= 1 + 0.9 \left\{ 1 + 0.4\beta \exp\left(-\frac{R_t}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \right\} \exp\left\{-\left(\frac{A}{0.7}\right)^2\right\} \\ \alpha &= 1 + 2.6\min[1, R_t/200], \quad \beta = \min[10, \max(0, \hat{S} - 5)] \end{aligned}$$

である。渦動粘性 ($\nu_t = c_\mu k \tau$) は前述のように二成分乱流の自由表面および壁面近傍で減衰しなければならないので c_μ の主たる減衰効果が A とともに 0 に減衰する関数 c_{μ_A} より得られるようにした。そうすることによって、 η による減衰関数 c_{μ_s} への依存度が小さくなり、さらに R_t に依存しなくても ν_t の壁面漸近挙動のモデル化が可能となった。したがって、 R_t の寄与を表す関数 $c_{\mu_{R_t}}$ には低レイノルズ数乱流域での補正効果のみを与え、減衰効果は与えていない。

せん断自由な乱流のための付加項 $c_a A_{ij}$ は A のこの配から構成される項、

$$\begin{aligned} A_{ij} &= c'_a \tau^2 \left(\sqrt{A k_{,i}} \sqrt{A k_{,j}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sqrt{A k_{,k}} \sqrt{A k_{,k}} \right) \dots\dots (6) \\ c_a &= -(8/3)^{1/2} f_a / \{1 + 2(A_{ij} A_{ij})^{1/2}\} \end{aligned}$$

$$c'_a = 1 / \{1 - \exp(-\hat{R}_t/30)\}, \quad f_a = \exp\{-(\hat{S}/2.2)^2\}$$

とした。この付加項によってせん断自由境界でのレイノルズ応力の漸近値、

$$a_{11}(=c_a A_{11}) = 1/3, \quad a_{22}(=c_a A_{22}) = -2/3$$

を満たすことができる。(ここで x_2 は境界に垂直方向を表す。)

表 1 に示したモデル定数及び関数は CLS モデルを実質的に踏襲している (式 (1) の表現が文献⁽¹⁴⁾ と異なるため、少し表記に違いがある。また c_μ のモデルの変更にともない高次項の挙動が結果的に CLS モデルと同等となるように f_q, f_c は表現が修正されている。) が、二次のテンソル ($c_1 \sim c_3$ 項) の効果と付加項の効果が必要以上に重ならないように f_q は $(1 - f_a)$ との積になっている。

2.2 応力フラットネス・パラメータの輸送方程式
厳密な輸送方程式は A の定義より容易に導けて以下のように表すことができる。

$$\frac{DA}{Dt} = - \underbrace{\frac{9}{8k} (3/2 A_3 D_{kk} + 2a_{ij} D_{ij} - 3a_{jk} a_{ki} D_{ij})}_{P_A}$$

Table 1 The empirical coefficients.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
$-0.05f_q$	$0.11f_q$	$0.42f_q \frac{\hat{S}}{\hat{S} + \hat{\Omega}}$	$-0.8f_c$	0	$-0.5f_c$
c_7	f_q		f_c		
$0.5f_c$	$\frac{2/3r_\eta^2(1-f_a)}{(1+1.8\eta)(1+0.0086\eta^2)^{1/2}}$		$\frac{2/3r_\eta^2}{(1+1.8\eta)(1+0.45\eta^{2.5})}$		

$$\begin{aligned} & - \underbrace{\frac{9}{8k} (3/2 A_3 P_{kk} + 2a_{ij} P_{ij} - 3a_{jk} a_{ki} P_{ij})}_{P_A} \\ & - \underbrace{\frac{9}{8k} (3/2 A_3 \Pi_{kk} + 2a_{ij} \Pi_{ij} - 3a_{jk} a_{ki} \Pi_{ij})}_{\Pi_A} \\ & + \underbrace{\frac{9}{8k} (3/2 A_3 \varepsilon_{kk} + 2a_{ij} \varepsilon_{ij} - 3a_{jk} a_{ki} \varepsilon_{ij})}_{\varepsilon_A} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで D_{ij}, P_{ij}, Π_{ij} そして ε_{ij} は各々 $\overline{u_i u_j}$ の拡散項、生成項、圧力相関項、散逸率である。この中で生成項、

$$P_{ij} \equiv -(\overline{u_i u_k} U_{j,k} + \overline{u_j u_k} U_{i,k}) \dots\dots\dots (8)$$

のみは式 (1) を代入して求まるのでこれ以上のモデル化を必要としないが、その他の項については Craft & Launder⁽²¹⁾ の最新のレイノルズ応力方程式モデルを参考にモデル化を行った。

2.2.1 圧力相関項 Π_{ij} のモデリング
Craft & Launder⁽²¹⁾ は、 Π_{ij} は以下のように分離して扱う方がモデル化しやすいとした。

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij}^* + \Pi_k \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \dots\dots\dots (9)$$

ここで Π_k は k の圧力相関項であり、 ϕ_{ij}^* は

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij1}^* + \phi_{ij2}^* + \phi_{ij}^{inh}$$

のように分離される。ここで Craft & Launder⁽²¹⁾ は、 $\phi_{ij1}^*, \phi_{ij2}^*$ には圧力ひずみ相関項の *slow* 項と *rapid* 項の非線形モデル⁽²²⁾ を適用し、 ϕ_{ij}^{inh} を加えることで壁面の影響を考慮した。本研究でも彼らの手法にならない Π_A 項をモデル化する。Craft & Launder⁽²¹⁾ の手続きを Π_A 項に代入すれば結局 $P_A + \Pi_A$ は、

$$\begin{aligned} P_A + \Pi_A &= \frac{9\bar{\varepsilon}}{8k} \left\{ (\tilde{c}_1 + f_{A2})(2A_2 - 3A_3) \right. \\ & \quad \left. + \tilde{c}_1 c'_1 (2A_3 - 0.5A_2^2) \right\} \\ & \quad + \frac{A}{k} \{ 0.45c'_2 a_{ij} P_{ij} - (0.6 + 0.3c'_2) P_{kk} \} \\ & \quad - \frac{9}{8k} (3/2 A_3 \phi_{kk}^{inh} + 2a_{ij} \phi_{ij}^{inh} - 3a_{jk} a_{ki} \phi_{ij}^{inh}) \dots\dots (10) \end{aligned}$$

と表せる。ここで忠実に ϕ_{ij}^{inh} 項を代入した場合も検討したが、結局今回対象とした流れ場では ϕ_{ij}^{inh} 項と c'_2 を含む項がおそ相互に相殺することがわかったので、簡易化のために $\phi_{ij}^{inh} = 0$ として以下に示すようにモデル定数、関数を最適化した。

$$\tilde{c}_1 = 3.1\min(A_2, 0.5)f_A f_{R_t}, \quad c'_1 = 1.1, \quad c'_2 = 0$$

$$f_{Rt} = \min(R_t/160, 1.0)$$

$$f_A = \begin{cases} (A_s/14)^{\frac{1}{2}} & A_s \leq 0.05 \\ A_s/0.7^{\frac{1}{2}} & 0.05 < A_s < 0.7 \\ A_s^{\frac{1}{2}} & A_s \geq 0.7 \end{cases}, \quad f_{A2} = A_s^3$$

ここで A_s は計算されたレイノルズ応力場から本来の定義式から単純に求めた応力フラットネス・パラメータであり, A_2 は以下に記すようにモデル輸送方程式から得られる A と計算された応力場から得られる A_3 を使って再定義する.

$$A_2 = A_3 + 8/9(1 - A) \quad (11)$$

2.2.2 散逸率テンソル ε_{ij} のモデリング Craft & Launder⁽²¹⁾ はせん断自由境界と壁境界に対する漸近挙動⁽²³⁾ を満たす新しい ε_{ij} モデルを提案した. しかしながら, 彼らのモデルをいくらか簡略化したモデル,

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}) / D + 2/3 f_\varepsilon \varepsilon \delta_{ij} \quad (12)$$

でも今回テストした範囲の流れ場ではそんな色のない結果が得られた. ここで非等方項は

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij} &= \left[2\nu f'_\varepsilon k^{\frac{1}{2}}_{,m} \left(k^{\frac{1}{2}}_{,i} \frac{\overline{u_j \overline{u_m}}}{k} + k^{\frac{1}{2}}_{,j} \frac{\overline{u_i \overline{u_m}}}{k} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\nu f'_\varepsilon k^{\frac{1}{2}}_{,k} k^{\frac{1}{2}}_{,m} \frac{\overline{u_k \overline{u_m}}}{k} \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i \overline{u_j}}}{k} \varepsilon \right] \\ \varepsilon''_{ij} &= \varepsilon \left(2 \frac{\overline{u_k \overline{u_l}}}{k} d_k^A d_l^A \delta_{ij} - \frac{\overline{u_i \overline{u_l}}}{k} d_j^A d_l^A - \frac{\overline{u_j \overline{u_l}}}{k} d_i^A d_l^A \right) f_R \end{aligned}$$

$$D = (\varepsilon'_{kk} + \varepsilon''_{kk}) / 2\varepsilon$$

である. このうち ε'_{ij} 項は CLS モデルを踏襲するが, 新たに ε''_{ij} 項を Craft & Launder⁽²¹⁾ にならい, 彼らの *inhomogeneity indicator*:

$$d_i = N_i / [0.5 + (N_k N_k)^{\frac{1}{2}}], \quad N_i = l_{,i} \quad (13)$$

$$d_i^A = N_i^A / [0.5 + (N_k^A N_k^A)^{\frac{1}{2}}], \quad N_i^A = (l A^{\frac{1}{2}})_{,i} \quad (14)$$

を用いて導入した. したがって, 結局 ε_A は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{9}{8k} \left[(3A_3 - 2A_2) f_\varepsilon \varepsilon + (1 - f_\varepsilon) \nu f'_\varepsilon / D \left\{ \right. \right. \\ &\quad (16/3 - 12A_2) a_{ij} k^{\frac{1}{2}}_{,i} k^{\frac{1}{2}}_{,j} - 4(A_2 + A_3) k^{\frac{1}{2}}_{,k} k^{\frac{1}{2}}_{,k} \left. \left. \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2(1 - f_\varepsilon) f_R \varepsilon / D \left\{ (1.5A_2 + 4/3) a_{ij} d_i^A d_j^A \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2A_2 - A_3) d_k^A d_k^A \right\} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$D = 1 + 5f'_\varepsilon \nu / \varepsilon \left(a_{ij} k^{\frac{1}{2}}_{,i} k^{\frac{1}{2}}_{,j} + 2/3 k^{\frac{1}{2}}_{,k} k^{\frac{1}{2}}_{,k} \right)$$

$$+ 2f_R (a_{ij} d_i^A d_j^A + 2/3 d_k^A d_k^A)$$

と表記される. モデル関数は,

$$f_R = (1 - A) \min[(R_t/80)^2, 1.0]$$

$$f_\varepsilon = \begin{cases} A/0.15^{\frac{1}{2}} & A \leq 0.15 \\ A^{\frac{1}{2}} & 0.15 < A \end{cases}, \quad f'_\varepsilon = \{1 - \exp(-R_t/5)\}^{1/2}$$

のように最適化されている. なお, このモデル式でも少なくとも壁境界に対する漸近挙動は満たしている.

2.2.3 拡散関連項 $\mathcal{D}_A$ のモデリング $\mathcal{D}_{ij}$ に対しての GGDH 拡散モデル⁽²⁴⁾,

$$\mathcal{D}_{ij} = \left\{ \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) \overline{u_i \overline{u_{j,l}}} \right\}_{,k} \quad (16)$$

を適用すると, $\mathcal{D}_A$ は結局以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A &= \left\{ \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) A_{,l} \right\}_{,k} \\ &\quad + \frac{1}{k} \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) (k_{,k} A_{,l} + k_{,l} A_{,k}) \\ &\quad - \frac{9}{8} \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) (6a_{ij} a_{jm,k} a_{mi,l} - 2a_{ij,k} a_{ij,l}) \quad (17) \end{aligned}$$

この表式はこれ以上モデル化する必要はないが, 右辺第二, 三行に現れる非拡散項が計算の不安定要因となる場合が経験されたことから, 粘性に関わる部分を残しこれらを省略した.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A &= \left\{ \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) A_{,l} \right\}_{,k} + \frac{2\nu}{k} k_{,k} A_{,k} \\ &\quad - \frac{9}{8} \nu (6a_{ij} a_{jm,k} a_{mi,k} - 2a_{ij,k} a_{ij,k}) \quad (18) \end{aligned}$$

ここで係数は応力方程式モデル等で標準的に用いられている値 $c_s = 0.22$ とした.

2.3 乱流エネルギーの輸送方程式 通常 k 方程式は以下のように書ける.

$$\frac{Dk}{Dt} = \mathcal{D}_k + \Pi_k + P_k - \varepsilon \quad (19)$$

生成項は $P_k = P_{kk}/2$ であり, 式 (8) より求められるのでモデル化が必要な項は拡散項 $\mathcal{D}_k$ と圧力相関項 Π_k である. この中で $\mathcal{D}_k$ には A 方程式同様 GGDH モデルを適用する.

$$\mathcal{D}_k = \left\{ \left(\nu \delta_{kl} + c_s \overline{u_k \overline{u_l}} \frac{k}{\varepsilon} \right) k_{,l} \right\}_{,k} \quad (20)$$

CLS モデルでは圧力相関項の寄与を GGDH モデルの係数を関数化することで組み込んだが, 本モデルでは以下のように Craft & Launder モデル⁽²¹⁾ の Π_k に 0.7 倍の係数を掛けて用いた.

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{1}{2} \left[(0.35d_k + 0.77d_k^A) (\nu \varepsilon A A_2 k)^{\frac{1}{2}} \left\{ c_{pd1} A_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{pd2} R_t^{-\frac{1}{4}} \exp(-R_t/40) \right\} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

$$c_{pd1} = 1 + 2 \exp(-R_t/40), \quad c_{pd2} = 0.4$$

2.4 乱流散逸率の輸送方程式 本モデルでも CLS モデル同様壁面境界条件が $\varepsilon|_w = 0$ と簡便に与えられることから, ε を解くべき変数として採用した. そこで ε のモデル方程式は以下のように表す.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \mathcal{D}_\varepsilon + c_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + P_{\varepsilon 3} + S_{\varepsilon 1} + S_{\varepsilon 2} \quad (22)$$

ここで $P_{\varepsilon 3}$ は *gradient production* 項であり, $S_{\varepsilon 1}$, $S_{\varepsilon 2}$ は今回導入した付加項である. 拡散項 $\mathcal{D}_\varepsilon$ にはここでも GGDH モデルを適用した.

$$\mathcal{D}_{\varepsilon} = \left\{ \left(\nu \delta_{kl} + c_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \right) \varepsilon_{,l} \right\}_{,k} \dots \dots \dots (23)$$

係数値は応力方程式モデル等で標準的な値 $c_{\varepsilon} = 0.18$ とした。また係数 $c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}$ は以下のように CLS モデルを踏襲する。

$$c_{\varepsilon 1} = 1.0 + 0.15(1 - A), \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92 / (1 + 0.7 A_d A_2^{1/2})$$

$$A_d = \max[0.2, A] (R_t / 20)^2 / \{1 + (R_t / 20)^2\}$$

$P_{\varepsilon 3}$ 項についても CLS モデルにならない、

$$P_{\varepsilon 3} = c_{\varepsilon 3} \nu \nu_l U_{i,kj} U_{i,kj} + c_{\varepsilon 4} \nu \frac{\nu_l}{k} k_{,k} U_{i,j} U_{i,j} \dots \dots \dots (24)$$

とし、わずかに修正した係数 $c_{\varepsilon 3} = 1.3, c_{\varepsilon 4} = 1.0$ を用いた。

付加項 $S_{\varepsilon 1}$ は粘性拡散項の壁面近傍の挙動を補正するために導入した項であり、

$$S_{\varepsilon 1} = -(\varepsilon - \hat{\varepsilon})(\hat{\varepsilon} - P_k) / k \dots \dots \dots (25)$$

と表す。第二付加項 $S_{\varepsilon 2}$ は、Craft & Launder⁽²¹⁾ がせん断自由境界で精度をあげるために導入した項を以下のように変形させ導入した。

$$S_{\varepsilon 2} = (1 - A) \hat{\varepsilon} (c_{\mu} A k)^{1/2} A_{,k} (L A^{1/2})_{,k} \dots \dots \dots (26)$$

(なお、衝突流れ等にモデルを適用する場合、CLS モデルが導入した長さスケールのこの配からなる項の追加がさらに必要である。)

3. 計算結果および考察

3.1 一様ひずみ乱流 最初に今回提案したモデルの性能を平面ひずみ、軸対称収縮、軸対称膨張流れ、一様せん断流れ等の一様平均ひずみ場で検討した。ここでいう平面ひずみ流れとは、 $U_{1,1} = -U_{2,2}$ のひずみ変形を一様に与えた流れのことを言うのに対し、主流を U_1 とした時 $U_{1,1} = -U_{2,2}/2 = -U_{3,3}/2$ の一様ひずみを与えかつ $U_{1,1} > 0$ の時、軸対称収縮流れ、 $U_{1,1} < 0$ の時、軸対称膨張流れとそれぞれいう。また一様せん断流れは $U_{1,2}$ のせん断が一様にかかった流れ場のことである。

図 2 は平面ひずみ流れにおける乱流諸量の時間発展を CLS モデルと代表的な線形モデルである Launder-Sharma モデル⁽²⁵⁾(LS) とともに DNS⁽²⁶⁾ の結果と比較したものである。比較したケースは等方性乱れ状態 (無次元時刻、 $t^* = 0$) から $S_0^* = 1.0$ のいわゆる *slow* な変形を加えた場合である。ここで、

$$S^* \equiv \frac{\overline{u_k u_k}}{\varepsilon} \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}, \quad t^* \equiv t \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}$$

である。図 2(a),(b) から本モデルの k および ε の時間発展様式は、CLS モデルや LS モデルより明らかに DNS によく一致していることがわかる。ところが、図 2(c) に示されるように本モデルでは A が DNS の結果より早く発達する。CLS モデルや本モデルのようなレイノル

Fig.2 Time evolution of turbulent quantities during plane strain, $S_0^* = 1.0$: symbols, DNS; —, present; ---, CLS; - · -, LS.

ズ応力を速度ひずみにより陽的に代数表記するモデルは、変形が生じた時点でレイノルズ応力の非等方性を与えるため、図 2(d) に示すように $t^* = 0$ の時点で既に非等方な分布となっている。このことが A の発達を早める一つの要因になっていると考えられる。

このように、導出の際 $D\overline{u_i u_j} / Dt = 0$ を仮定していることになる非線形渦粘性モデルは応力の時間発展の予測には本来そぐわない。しかし、ここで比較するような緩やかな (*slow*) 変形の場合にはある程度の比較は可能で、特定のひずみに対するモデルの応答特性を検討しておくことは定常場でのモデル特性を知るためにも有意義である。図 2(d) より本モデルは変形初期以外でも

DNS と異なる挙動を示す部分はあるものの、CLS モデルに比べればレイノルズ応力の非等方性を妥当に表現していることがわかる。また発達していても垂直応力の値が負になることはない。なお CLS モデルの非等方性があまり強くないのは、 R_t の範囲がこのテストケースの場合 9.8 ~ 17.3 (チャンネル乱流の $y^+ \approx 4$ 相当) と低く、導入されている ν_t に対する R_t の減衰関数により非等方性が減衰されているためである。(試験的に CLS モデルの R_t による減衰関数を取り除けば予測結果は改善された。) しかしながら、本モデルの場合には R_t による減衰効果を ν_t の中に含まないためその影響を受けていない。

図 3 は図 2(d) と同様の比較をその他の一様ひずみ流れ場 (軸対称収縮, 軸対称膨張流れ, 一様せん断流れ) で行ったものである。これらから本モデルの予測傾向は平面ひずみ流れ場の時と同様にほぼ妥当であることがわかる。なお、図 3(c) の一様せん断流れにおいては壁面近傍に匹敵する強いせん断を与えた場合のモデルの応答を知るために $S_0^* = 33.5$ の DNS⁽²⁷⁾ を比較対象に選び、

Fig.3 Time evolution of Reynolds stresses in homogeneous strain fields: symbols, DNS; —, present; - - -, CLS.

ある程度発達した $t^+ = 4$ から比較計算をした。これは前述のように代数応力表記をするモデルは急激に過大な (rapid) 変形ひずみを与えた直後の非定常解析には適切ではないためである。(ただ A のさらなる依存性を導入すれば、改善できる可能性は考えられる。) 図 3(c) から明らかなように、CLS モデル、本モデルとも発達した段階からであるがせん断ひずみが強い場合でも応力の非等方分布を妥当に表現することがわかる。そしてこれは、このケースの DNS データが $R_t = 130 \sim 600$ (チャンネル乱流の $y^+ > 13$ 相当) であることから、 R_t がある程度以上大きな領域であれば両モデルが同等の挙動を示すことを示している。

3.2 壁乱流およびせん断自由乱流 次に壁乱流とせん断自由乱流の予測に観点をおいて、モデルの予測性能を完全に発達したチャンネル流れ、オープンチャンネル流れ、そして移動壁上でせん断のない平面 Couette 流れについて検討した。計算は UMIST で開発された研究用の放物形コード PASSABLE⁽²⁸⁾ を用い、格子依存性がないよう十分に配慮して流れに垂直方向に領域を不等間隔に 100 分割した格子上で行った。せん断自由境界 (チャンネル流では対称面) $y = \delta$ で与えた境界条件はそれぞれ表 2 の通りである。

図 4 から本モデルと DNS^{(16)~(19)} の平均速度分布の予

Table 2 The boundary conditions used at $y = \delta$.

flow case	U	k	ϵ	A
Plane Channel	$U_{,y} = 0$	$k_{,y} = 0$	$\epsilon_{,y} = 0$	$A_{,y} = 0$
Open Channel	$U_{,y} = 0$	$k_{,y} = 0$	$\epsilon_{,y} = 0$	$A = 0$
Plane Couette	$U_{,y} = 0$	$k = 0$	$\epsilon = 0$	$A = 0$

Fig.4 Mean velocity: symbols, DNS^{(16)~(19)}; lines, present.

Fig.5 Turbulent shear stress distributions: key as Fig.4.

測結果が満足な一致を示していることがわかる。(Kuroda ら⁽¹⁷⁾の平面 Couette 流れは移動壁上のせん断は十分小さいものの完全にせん断自由ではない。)したがって、図5に示されるように、乱流せん断応力 $-\overline{uv}$ の予測結果も十分満足な一致を見せている。図6に本モデルで予測されたレイノルズ垂直応力の RMS 値を各流れ場においてそれぞれ DNS と比較した。結果はそれぞれの流れ場でほぼ満足な一致を見せており、特にオープンチャンネルの自由表面近傍で表面と垂直方向の成分 v' だけが減衰する特徴が本モデルでよくとらえられている。以上のように平均流や乱流せん断応力は各流れ場において大差はないが、せん断自由境界近傍のレイノルズ垂直応力分布は大きく異なるのがこの三種の流れ場の特徴であり、本モデルはこれをよくとらえている。

図7は本モデルの輸送方程式から得られた A の分布を DNS の結果と比較したものである。全体的にはほぼ妥当な予測結果を示しているが、高乱れの領域で本モデルによる予測値が DNS を下まわる傾向にある。この理由の1つは拡散関連項 D_A のモデル化にあると考えられる。実際、式(18)ではなく式(17)を用いた方がよりよい結果が得られることがあった。図8から A の予測挙動に伴い、 A が主たる減衰パラメータとして組み込まれている ν_t も改善の余地はまだあるが、ほぼ妥当な予測傾向にあることがわかる。最後に図9に平面 Couette 流の DNS による壁面近傍の ε の分布を、本モデルが正しく再現できることを示した。

4. 結 言

本研究では、応力フラットネス・パラメータの輸送方程式を組み込んだ非線形 $k-\varepsilon-A$ 三方程式モデルの開

Fig.6 Turbulent intensities: key as Fig.4.

発を行った。この新しく提案されたモデルは以下の特徴を持っている。

- (1) 壁や境界からの距離等の幾何形状変数を完全に排除しているので、複雑な流れ場形状等に容易に適用できる。また、局所乱流レイノルズ数の影響を粘性低層に限定した上で、極力排除しているので極低レイノルズ数乱れの非等方性もよく予測できる。
- (2) 応力フラットネス・パラメータ A の輸送方程式は Craft & Launder⁽²¹⁾による最新のレイノルズ応力方程式モデルの知見を用いてモデル化され、そのとき圧力相関項中の壁面反射項等の複雑な項は用いられていない。
- (3) A の依存性を導入した結果、既存の渦粘性モデルではとらえられない自由表面乱流を含む、二成分乱流の特徴をとらえることができる。
- (4) せん断自由界面近傍で渦粘性やレイノルズ応力の挙動特性を妥当に予測できるので、熱・物質輸送問題を精度良く取り扱うための条件を満たしている。

本研究を行うにあたり、UMIST の B.E. Launder 教授と Dr. T.J. Craft から貴重な助言を受けたことを記し

Fig.7 Stress flatness parameter: key as Fig.4.

Fig.8 Eddy viscosity: symbols: data as Fig.1(a); lines: present.

て謝意を表する。第三変数として輸送方程式から A を得、 $k-\varepsilon$ モデルに組みこむことは著者が UMIST に在学中に Launder 教授から示唆されていたことを付記しておく。

文 献

- (1) Nisizima, S., and Yoshizawa, A., *AIAA J.*, **25**-3 (1987), 414-420.
- (2) Speziale, C.G., *J. Fluid. Mech.*, **178** (1987), 459-475.
- (3) 明・笠木, 機論 **56**-531, B(1990), 94-100.
- (4) 安倍・近藤・長野, 機論 **61**-585, B(1995), 126-133.
- (5) Pope, S., *J. Fluid Mech.*, **72** (1975), 331-340.
- (6) Taulbee, D.B., *Phys. Fluid A*, **4**-11 (1992), 2555-2561.

Fig.9 Turbulent dissipation in the Couette flow: key as Fig.4.

- (7) Gatski, T.B., and Speziale, C.G., *J. Fluid Mech.*, **254** (1993), 59-78.
- (8) Speziale, C.G., and Abid, R., *AIAA J.* **33**-10 (1995), 1974-1977.
- (9) Wall, K.M., and Taulbee, D.B., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **17** (1996), 116-123.
- (10) Suga, K., PhD thesis, UMIST, Manchester, U.K. (1995).
- (11) Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., *Proc. 5th Int. Symp. Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Presses Ponts et Chaussees, Paris (1993), 125-132.
- (12) Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **17** (1996), 108-115.
- (13) Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., *Proc. 10th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Penn State Univ (1995), 23/19-23/24.
- (14) Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, K., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **18** (1997), 15-28.
- (15) Nezu, I., and Rodi, W., *J. Hydraulic Eng.*, **112** (1986), 335-355.
- (16) Lombardi, P., De Angelis, V., and Banerjee, S., *Phys. Fluids*, **8**-6 (1996), 1643-1665.
- (17) Kuroda, A., Kasagi, N., and Hirata, M., *Turbulent Shear Flows 9*, (ed. F. Durst et al.) (1995), 241-257, Springer.
- (18) Kim, J., Moin, P., and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, **177** (1987), 133-166.
- (19) Kim, J., (1989), personal communication.
- (20) Lumley, J.L., *Adv. in Applied Mech.*, **18** (1978), 123-176.
- (21) Craft, T.J., and Launder, B.E., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **17** (1996), 245-254.
- (22) Launder, B.E., and Li, S.-P., *Phys. Fluids*, **6**-2 (1994), 999-1006.
- (23) Launder, B.E., and Reynolds, W.C., *Phys. Fluids*, **26** (1983), 1157-1158.
- (24) Daly, B.J., and Harlow, F.H., *Phys. Fluids*, **13** (1970), 2634-2649.
- (25) Launder, B.E., and Sharma, B.I., *Letters in Heat Mass Transfer*, **1** (1974), 131-138.
- (26) Lee, M.J., and Reynolds, W.C., Stanford Univ. Tech. Rep., TF-24 (1985).
- (27) Lee, M.J., Kim, J., and Moin, P., *J. Fluid Mech.*, **216** (1990), 561-583.
- (28) Leschziner, M.A., UMIST Mech. Eng. Rep., TF/82/11 (1982).