格子渦法における粘性拡散に関する研究*

薦 原 道 久^{*1}, 木 村 雄 吉^{*2}
小 川 和 彦^{*2}, 細 川 泰 宏^{*3}

A Study of Viscous Diffusion in Lattice Vortex Method

Michihisa TSUTAHARA, Takeyoshi KIMURA,
Kazuhiko OGAWA and Yasuhiro HOSOKAWA

The Lattice vortex method (LVM) by introducing virtual vortices has been proposed by the authors. This paper has focused on the treatment of viscous diffusion of vortices. From the result of calculation of a convection diffusion equation, giving a vorticity distribution of one vortex by the Gauss distribution offered good accuracy in the calculation of vortex diffusion and this method made the limitation of the Courant number relaxed. In the flow analysis by the LVM, the convection of vortices was calculated by secondorder area weighting scheme. It was found that the combination of this scheme and vorticity distribution determined by Gaussian distribution offered good result. Moreover, the result of cavity flow analysis turned out to be having sufficient accuracy by comparing with the result of the finite difference method. Therefore, LVM can be used for inner flow that the conventional vortex method is not so used.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Vortex, Viscous Flow, Vortex Diffusion, Vortex Method, Cavity Flow

1. 緒 言

いわゆる離散渦法は、高レイノルズ数の流れに適用され、その簡便さから広く用いられてきた。しかし外部流れにおいては、時間発展とともに渦の数が膨大なものとなり、ピオ・サバル則からの誘導速度の計算に対する計算機の負荷が極めて大きくなるという問題があった。これを解決する手段として、領域に格子をとり、各格子点での渦度から二次元であれば、流れの関数をポアソン方程式から求め、これから各渦の移動速度を計算して時間発展を進めるVIC法⁽¹⁾⁽²⁾がある。また近年は離散渦法の適用の範囲が中間レイノルズ数あるいは低レイノルズ数の流れと広がってきている。しかしここで問題になるのは、渦の拡散をいかに計算に取り入れるかである。基本的には渦にコアをもたせる方法、また離散渦を渦度拡散に見合うように移動させる方法が必要である。

著者らは前報⁽³⁾⁽⁴⁾において、格子として正方形格子を用い毎時間ステップに渦を格子点に再配置する手法

を提案し(ここでは格子渦法と呼んでおく)、従来離散渦法が苦手としていた内部流れにも適用し、正方形キャビティ流れにおいても十分な精度で計算が可能なることを示した。しかし、前報では渦の移流の問題に話を限っており、粘性拡散については中心差分によって計算を行っていた。また、提案した手法と一般の差分法との相違についても言及はしたが、まだ検討すべき点が多いように思われる。

そこで、本論文では粘性拡散として、前述の手法のうち後者のみ、すなわち渦を適当な方法で移動させることによる手法のいくつかをこの格子渦法に適用して問題点を明らかにし、より適切な手法を提案する。また粘性拡散をも含めた議論で、この手法をあくまでラグランジェ的に渦を移動させていることを述べ、差分法との相違を明らかにするとともに、いわゆる移動拡散問題での陽的な解法において遭遇する、いわゆるCFL条件、あるいは拡散数による制限について、今回の方法がこれらの制限を緩和する可能性があることについても考察する。

2. 一次元拡散方程式についての考察

一次元拡散方程式は

* 原稿受付 1997年4月30日。

^{*1} 正員, 神戸大学自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)。

^{*2} 正員, 神戸大学工学部。

^{*3} 神戸大学大学院。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1)$$

と表される。ここでは、従来の離散渦法で用いられている拡散速度による方法およびランダムウォーク法について、格子渦法に用いた場合の問題点を検討し、新しい手法の基礎となる考え方について説明する。計算精度の比較については式(1)をFTCS(時間前進差分, 空間中心差分)で離散化し陽解法で解いたもので、拡散数 $D = \nu \Delta t / \Delta x^2$ は0.01としており厳密解との差はほとんどないとみなせる結果を基準としている。

2.1 粘性拡散速度による検討 大上・赤松⁽⁵⁾, 新谷⁽⁶⁾によれば式(1)は式(2)のように変形される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (u + u_d) \omega \} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ただし

$$u_d = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

u_d はちょうど速度の次元をもっており、これは粘性拡散速度あるいは渦拡散速度とよばれ、二次元の場合移流による速度にこの速度を加えたもので渦点を移動させることにより、粘性による拡散を計算に取り入れ得るとしている。

この項はたしかに渦の拡散による循環の移動量であるが、式(2)第1項のオイラー的な単位体積あたりの

渦度の変化に対応するのは、この項を空間的にもう一度微分した2階微分である。特に問題になるのは式(2)を離散化したときで、例えば中心差分を用いた場合、後述するような空間的に滑らかな極大値をもつような場合、2階微分は有限であるのに、1階微分は零となってこの部分は渦の拡散がないことになる。片側差分を用いると前後非対称な拡散となるばかりか、本来の拡散の物理的なメカニズムが失われることになる。

図1および図2に式(2)の粘性拡散速度の式を用いて解析した結果を次に示す。粘性拡散速度による渦度の移流については、著者らが前報で述べた面積配分法によって計算しており、図1, 2中においてDVM(1)は一次精度の面積配分法, DVM(2)は二次精度の面積配分法による結果を示す。図1は最初に渦度が一つのセルにあるものとし、それが拡散した場合の結果であるが、上述のように最初に渦度を分布させた $x=0$ のセルでは1階微分が零となるため、DVM(1)およびDVM(2)のいずれも $x=0$ の渦度がまったく拡散していないことがわかる。また図2は二つのセルにまたがって渦度を分布させてその拡散を解析した結果であり、図1の場合と比べて若干は改善されるが、図2(b)のようにある時間が経過すると二次精度の解が振動していることがわかる。このように粘性拡散速度による解析方法は、離散渦法では計算負荷の少ない簡

(a) $t=10$

(b) $t=40$

Fig. 1 Diffusion Velocity Method (Vorticity distributes on one cell at the beginning of the analysis)

(a) $t=10$

(b) $t=40$

Fig. 2 Diffusion Velocity Method (Vorticity distributes on two lattice at two cells at the beginning of the analysis)

便な方法であるが、やはりこう配のとり方や初期条件によって解析が困難となる場合のあることがわかった。

2.2 ランダムウォーク法による検討 ランダムウォークは連続体近似により移流拡散を表すフォッカー・プランク方程式となることがわかっており、拡散方程式のシミュレーションとして有効なものである。難点はノイズの大きいことであるが、また今回のように渦を格子に時間ステップごとに再配置する場合の数値拡散についても不明であるのでこれらについて検討した。

図3に拡散数 $D=0.01$, 時刻 $t=10$ の場合の結果を示す。渦の移動は2.1節と同じ面積配分法によるもので、図3中のRWM(1)は一次精度の面積配分法、RWM(2)は二次精度の面積配分法による結果を示す。図3(a)は渦を分割しない場合、(b), (c)はそれぞれ渦を10個および100個に分割した場合の結果

(a) $t=10, N=1$

(b) $t=10, N=10$

(c) $t=10, N=100$

Fig. 3 Random Walk Method (t : time, N : Number of vorticity elements)

を示す。なお FDM は差分法による結果である。渦の分割を増加させると精度が向上することは明らかであり、また渦の再配置については一次精度の面積配分法では渦の分割数を増加させても数値拡散が大きいため解の精度は向上しないが、二次精度の面積配分法では差分法と同等の解が得られることがわかる。

2.3 提案する渦拡散手法 2.2節で示したように、ランダムウォークは粒子(ここでは渦点)の数を増やすことにより精度が増すことがわかる。大数の法則によるランダムウォークによる粒子の分布は、粒子の数が増加した極限で正規分布となることがわかっているから、今回のように格子に渦を再配置する場合、拡散のシミュレーションとしては最初から正規分布となるように、渦を配分すればよい。この配分は式(3)を初期条件とする拡散方程式(1)の基本解式(4)

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & (-\Delta x/2 \leq x \leq \Delta x/2) \\ 0 & (x < -\Delta x/2, \Delta x/2 < x) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta x/2 - x}{2\sqrt{vt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta x/2 + x}{2\sqrt{vt}} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

からあらかじめ求めることができる。しかし、すぐにわかるように理論的には渦度は流れ場全体に広がり、ほとんどの領域では無視できるほど小さな値であるにもかかわらず、これらをすべての格子点に配分するのは極めて計算の効率が悪い。一方、中心差分を考慮すると、渦度は両隣の格子点に配分されるのみであるが、 D を小さく選べば十分な精度で計算することができる。

そこで本手法ではこの渦度の拡散する領域を有限の範囲に限ることにし、以下の考察に基づいて渦拡散手法を提案する。いま、拡散方程式を FTCS で離散化した場合の、演算のプロセスを考えると、

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + D(\omega_{i-1}^n - 2\omega_i^n + \omega_{i+1}^n) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで $D(=v\Delta t/\Delta x^2)$ は拡散数である。時間ステップが一つ進むと、この格子点では渦度が $2D\omega_i^n$ だけ減少し、近接した2格子にそれぞれ $D\omega_i^n$ だけ配分されることになる。

FTCS におけるノイマンの収束判定では $D < 1/2$ で計算は安定であるということであるが、1格子でのみ渦度が集中しているような初期値問題を考えると $D > 1/3$ において振動する解となり、これでは中心差分が成り立つために必要な条件である解の滑らかさが保てない。また $D=1/2$ の場合、初期に渦度が集中していた格子では、渦度が零となることは明らかである。実際にはある点での渦度は時間が無限大になるまで零になることはないはずである。すなわち FTCS では、

D が大きいとき、安定条件を満たしていても、この格子での渦度の減少が大きすぎることをわかる。これは、差分の精度を上げてても基本的に同じである。このように1時間ステップ後の差分では拡散数 D の制約が強いため、そこで次のように2時間ステップ後の差分を検討した。

式(5)の場合、前述のように注目した渦度 ω_i^n が拡散すると、その格子では $2D\omega_i^n$ だけ流出して渦度が減少し、隣接の左右の格子では渦度がそれぞれ $D\omega_i^n$ だけ増加する。次の時間ステップすなわち2時間ステップ後では、注目した格子には隣接の2格子からそれぞれ $D \times D\omega_i^n$ だけ流入してくる(渦度が戻ってくる)ので、注目した格子の渦度は $(1-2D+2D \times D)\omega_i^n$ となる。また注目した格子の両隣の格子は同様に考えると $(D-2D \times D)\omega_i^n$ の渦度、さらにその隣の格子は $(D \times D-2D \times D \times D)\omega_i^n$ の渦度となる。このような考え方で2時間ステップ後の渦度分布を与えると解はいくぶん滑らかになる。このような渦度分布を1時間ステップで与えることにすると、拡散による渦度分布が同じ D に対してより正規分布に近い形となるのは、明らかである。以上のような渦拡散手法の精度について、3章で検証していく。

3. 一次元移流拡散方程式への適用

格子渦法を線形の一次元バーガス方程式(6)に適用した結果は前報においても報告したが、前報では拡散は中心差分により行っていた。本論文では、2章において提案した渦拡散の手法と、前報で提案した移流に対する二次精度の手法を用いて計算を行った。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

3.1 計算の手順 本計算法では、移流と拡散とを交互に行うので、一般の演算子の分割手順⁽⁷⁾⁽⁸⁾により、

$$LD(\Delta t/2)LC(\Delta t)LD(\Delta t/2)$$

として時間ステップ Δt を進めることとする。ここで、 LD は拡散の計算、 LC は移流の計算を示す。すなわち1ステップ進めるのに始めと終わりに拡散の計算を1/2ステップ行うのである。

また前報でも述べたように、本手法での計算には、格子点はラグランジェ的に移動させる渦の時間ステップごとの再配置に用いられるのであって、差分法あるいは有限体積法のように、オイラー的な変数を離散化するために用いられるものと異なっている。したがって渦は1セル以上超えて移動することも可能であり、いわゆる CFL 条件も本質的には存在しない。

(a) Initial condition $[\omega(x)=1(x<0), \omega(x)=0(0<x)]$, $t=10$

(b) Initial condition $[\omega(x)=1(-5 \leq x \leq 5), \omega(x)=0, (x < -5, 5 < x)]$, $t=10$

Fig. 4 Comparison of the theoretical results with the results of LVM method

Fig. 5 Comparison of the theoretical result and the results of LVM method (—Initial value, ———theoretical result,LVM)

3.2 計算結果 3.1節に述べた方法により、一次元の場合について計算した結果を図4および図5に示す。ただし移流速度を $u=1$ 、格子間隔を $\Delta x=1$ とした。

図4(a), (b)は共に格子レイノルズ数 $R(=u \cdot \Delta x / \nu)$ を1に固定し、時間ステップ Δt のみを変化させた場合を解析したものであり、(a)はステップ状の初期値 $[\omega(x)=1(x \leq 0), \omega(x)=0(0 < x)]$ が移流拡

散していく場合、(b)は柱状の初期値 [$\omega(x)=1, (-5 \leq x < 5), \omega(x)=0, (x < -5, 5 < x)$] が拡散していく場合である。時間ステップ Δt を大きくしてクーラン数を2.0のように極端に大きくすると解がステップ状になり誤差が生じているが、一段階の FTCS において安定に計算できる限界に達しているためと考えられる。しかし図4(a), (b)の結果が共に理論解とよく一致しており、差分法などと違ってクーラン数、拡散数を比較的大きくとれることがわかる。

また図4(a)の場合について、格子レイノルズ数 R を変化させて解析した結果を図5に示す。この結果も理論解とよく一致している。

よって前報⁽²⁾で提案した渦度の面積配分法を用いた格子渦法に加えて、ここで提案した粘性拡散の手法を導入することにより、安定性の高い計算が可能となる。

4. 二次元正方形キャビティ流れ

4.1 拡散項の計算 3章では一次元での格子渦法の精度を検討したが、次に二次元の流れにおけるベンチマークテストとして、正方形キャビティ流れの解析を行う。二次元における拡散は次のように計算した。

二次元の場合も2.3節と同様に2時間ステップ後の渦度を与えるものとし、例えば注目した格子の渦度は $(1-4D+4D \times D)\omega_i^n$ となる。隣接の格子も同様な考え方で渦度分布を与えていく。ただし3.1節で述べた

Fig. 6 Streamlines and Velocity Distribution by Finite Difference Method

ように、微小時間 Δt の間に移流と拡散を同時に行うため、移流か拡散のいずれかを $\Delta t/2$ ずつに分けて2ステップの計算を行い、それぞれの時間ステップで上記のような考え方で周囲の格子に渦度が配分されるものとして解析することにした。移流項については前報で述べた二次精度の計算法に基づいて行った。

4.2 解析結果 計算条件については、格子数は 40×40 とし、レイノルズ数 $Re=100$, 格子間隔 $\Delta x =$

(a) $\Delta t=0.2, t=8$, Method-1

(b) $\Delta t=1.0, t=8$, Method-1

(c) $\Delta t=2.0, t=8$, Method-1

Fig. 7 Results of Lattice Vortex Method ($Re=100$)

Fig. 8 Comparison of Velocity Distribution of FDM with that of LVM

(a) $\Delta t=0.5$, $t=40$, Method-2 (b) $\Delta t=1.0$, $t=40$, Method-2 (c) $\Delta t=2.0$, $t=40$, Method-2Fig. 9 Streamlines and Velocity Distributions by Lattice Vortex Method ($Re=1000$)

1とした。

まず比較の対象として、差分法(定常解, Denis-CHang法)⁽⁹⁾によって二次元キャビティ流れを解析した結果を図6に示す。格子渦法による解析結果は、 $t=8$ での結果を図7に示す。図6および図7の速度分布はキャビティ中央の鉛直線上の速度分布を示したものである。なお、Method-1は壁面からはみ出した仮想渦を壁面のすぐ内側の格子に重ねるように処理を行ったことを示しているが、壁面での仮想渦の処理については次の節で述べる。差分法と格子渦法の結果から、流線の様子はよい一致を示している。また鉛直線上の速度分布を比較したものが図8であり、格子渦法の結果は差分法の結果とよく一致している。

4.3 壁面での仮想渦の処理について 図6～8に示した Method-1の方法では、速度と時間ステップの関係で流れ場からはみ出した渦(仮想渦)は、本来流れ場からはみ出すことなく、キャビティ内に保存されるはずであると考え、格子のすぐ内側の渦格子にはみ出した仮想渦を重ねている。しかしながら、格子渦法では流れ場のすぐ外側に渦格子を一つとり、時間ステ

(a) $Re=100$ (b) $Re=1000$

Fig. 10 Comparison of the Results of FDM and LVM (Method-2)

ップを進めるたびに、キャビティのすぐ内側の格子の渦と外側の格子の渦の大きさを境界条件を満たすように計算し直して配置する。そのためキャビティの外にはみ出した仮想渦の影響が無視されることになる。そこで壁面からはみ出した渦を壁面のすぐ内側ではなく、もう一つ内側すなわち壁から2番めの渦格子を重ねて渦度を保存させることも検討した。図9は $Re=1000$ の場合の解析結果であり、Method-2はこのような方法によって解析したことを示しており、差分法とほぼ一致した流線が得られた。また図10に示した速度分布も比較的良好な結果が得られている。

Method-1とMethod-2については、他の流れに対して系統的に調べてはいないので、現在これらの優劣を判断するには至っていない。また、 $Re=100$ の流れにおいてキャビティ底部の二次渦の流線が、本方法による結果と差分法による結果が大きく異なっているように見えるが、この領域では流れはよどんでおり、流れ関数の値そのものが小さく、流速が大きな領域に比較して誤差が大きいわけではない。

5. 結 論

本研究では、一次元の場合について格子渦法による解析精度を検討した結果、移流項については二次精度の面積配分法によって渦を移流させ、粘性項については正規分布を近似するように渦度分布を決定すれば良好な結果が得られることが明らかとなった。また、二

次元の場合も同様な方法によりキャビティ流れを解析した結果, 差分法と同等な結果が得られることがわかった。さらに渦格子は渦度の再配分にのみ用い, 渦の移動はラグランジュ的に行う格子渦法は, 差分法に比べて拡散数およびクーラン数が大きくとれる長所も有することがわかった。

文 献

- (1) Sarpkaya, T., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **111** (1989), 5-52.
- (2) Leonard, A., *J. Comput. Phys.*, **37**-3 (1980), 289-335.
- (3) 葛原道久・ほか3名, 機講論, No. 96-9 (1996), 219-221.
- (4) 葛原道久・ほか3名, 機論, **63**-614, B(1997), 3209-3215.
- (5) 大上芳文・赤松映明, 機論, **54**-505, B(1988), 2283-2290.
- (6) 新谷昌孝・白石裕之・赤松映明, 機論, **60**-572, B(1994), 1110-1117.
- (7) MacCormack, R. W., *AIAA J.*, **20**-9 (1982), 1275-1281.
- (8) 例えば, 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, (1994), 141-142, 東京大学出版会.
- (9) 日本機械学会編, 数値シミュレーション, (1988), 89-93, コロナ社.