加熱円柱まわりの強制対流から自然対流への
遷移におけるヒステリシス現象*鈴木 洋^{*1}, 岩崎 誉志郎^{*2}, 原 健 二^{*3}
PRABOWO^{*4}, 菊 地 義 弘^{*1}Hysteretic Phenomena in Transition from Forced Convection to Natural
Convection around a Heated CylinderHiroshi SUZUKI, Yoshiro IWASAKI, Kenji HARA,
PRABOWO and Yoshihiro KIKUCHI

Two-dimensional numerical computations have been conducted to investigate combined forced and natural convection around a cylinder in a cross flow. Reynolds number, Re , ranged between 75 and 150. Rayleigh number, Ra , was changed from 0 to 7×10^5 . Combined convective heat transfer characteristics cannot be expressed by a simple summation of forced and natural convective heat transfer characteristics. An abrupt decrease of mean Nusselt number, Nu_m , is observed in transition from forced convection to natural convection. A hysteresis occurs in the transition region and Nu_m has two different values which depend on initial conditions. This is attributed to subcritical bifurcation of flow behind the cylinder. Nu_m is higher for unsteady flows than for steady flow in such a transition region.

Key Words: Combined Convection, Convective Heat Transfer, Transition Phenomena, Numerical Simulation, Hysteresis, Bifurcation

1. 緒 言

強制対流と自然対流が共存する流れ場は、排熱の回収や原子炉の崩壊熱除去など、比較的低レイノルズ数下で動作する冷却系に見られる熱流動様式であり、エネルギーおよび地球環境問題を考えるうえで、近年重要性を増しつつある。共存対流下の熱伝達特性に関するこれまでの研究では、純強制対流および純自然対流の単純な重ね合わせが慣例的に行われてきた⁽¹⁾。Kikuchi ら⁽²⁾は最近、加熱円柱まわりの共存対流熱伝達に関する実験的検討を行ったところ、共存対流下の円柱まわりの熱伝達が、必ずしも純強制対流および純自然対流の熱伝達の単純な重ね合わせでは表現できないことを見いだした。すなわち、円柱まわりの平均ヌッセルト数が、レーレー数の増加に対して単調に増加せず、極小あるいは極大値をとる場合があることを指摘した。

そこで、本報では数値計算の手法を用いることによ

って、これまで実験では比較的困難であった広範囲のレーレー数条件下における強制・自然共存対流下に置かれた円柱まわりの流動および熱伝達について詳細に調べることを目的とする。特にレーレー数の増加につれてカルマン渦が消失し、流れが定常化する遷移現象ならびにそれに伴う熱伝達特性を明らかにする。

2. 記 号

a : 温度伝導率 m^2/s
 c : 比熱 $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
 d : 円柱径 m
 g : 重力の加速度 m/s^2
 H : 流路幅 m
 h : 比エンタルピー J/kg
 Nu_ϕ : 局所ヌッセルト数 $= q_w d / (T_w - T_0) \lambda$
 Pr : プラントル数 $= a / \nu$
 q : 熱流束 W/m^2
 Ra : レーレー数 $= g \beta (T_w - T_0) d^3 / a \nu$
 Re : レイノルズ数 $= U_0 d / \nu$
 Re_g : 最小格子幅基準のレイノルズ数
 r, θ : 円筒座標 m, rad
 T : 温度 K
 U, V : x および y 方向速度 m/s

* 原稿受付 1997年5月19日。

^{*1} 正員、広島大学工学部 (☎ 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1)。^{*2} 住友建機(株) (☎ 263 0001 千葉市稲毛区長沼原 731-1)。^{*3} 正員、住友金属鉱山(株) (☎ 792 0011 新居浜市西原町 3-5-3)。^{*4} 准員、広島大学大学院。

U_r, V_θ : r および θ 方向速度 m/s

V_a : V の振幅 m/s

x, y : デカルト座標 m

β : 体膨張率 K^{-1}

λ : 熱伝導率 $W/(m \cdot K)$

ν : 動粘性係数 m^2/s

ρ : 密度 kg/m^3

ϕ : 前方よどみ点からの角度 rad

添 字

F, N : 強制対流, 自然対流

H, L : 高, 低臨界値

m : 時間および周方向平均

w : 円柱壁面

0: 入口

-: 時間平均

3. 計 算 手 法

本計算では、図1に示すような計算領域全体に、主格子としてデカルト直交格子を、円柱まわりに、補助格子として円筒座標系の格子を配し、共有領域で相互にデータ交換を行いつつ計算を進める重合格子(円柱近傍の拡大図: 図2)の手法⁽³⁾を採用した。したがっ

Fig. 1 Computational domain

Fig. 2 Multi grid system

て、本報で用いた基礎方程式は、以下のようなそれぞれの格子系に対応する二次元非定常の連続の式、ブジネ近似を施した運動方程式およびエネルギー式である。

主格子系(デカルト座標系):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{g\beta}{c} (h - h_0) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

補助格子系(円筒座標系):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ &+ \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} \right\} \\ &- \nu \left\{ \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r^2} \right\} + \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{g\beta}{c} (h - h_0) \cos \theta \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ &+ \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right\} \\ &+ \nu \left\{ \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right\} - \frac{U_r V_\theta^2}{r} \\ &+ \frac{g\beta}{c} (h - h_0) \sin \theta \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} &= \frac{\lambda}{\rho c} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

これらの基礎方程式を、拡散項に中心差分、対流項にQUICK⁽⁴⁾、時間方向には陰解法を用いて離散化した。その際の時間刻み幅は、最小で $6.4 \times 10^{-3} d/U_0$ とした。また、圧力計算にはSIMPLE法⁽⁵⁾を用いた。

計算領域の入口($x = -10d$)では、流れは一樣速度 U_0 、一樣温度 T_0 で流入するものとする。直径 d の円柱は幅 H の平行平板間流路の中心軸上に設置され、入口境界より $10d$ 下流に位置する。流れの閉そく比 d/H は 0.2 と固定した。円柱の加熱条件は、等温度条件および等熱流束条件とした。流路の両側面は断熱とし、壁面上の速度条件は、滑りなしの条件とした。また、円柱より $50d$ ($10H$) 下流にある下流側境界の値は、その位置で境界層近似が成り立つものと仮定し、最下流断面の圧力を y 方向に一定とし、一断面上流側の値を用いて境界層近似方程式を解いて与えた。表1に計算条件をまとめて示す。

Table 1 Computational conditions

Reynolds Number, Re	75,100,150
Rayleigh Number, Ra	$0 \sim 7 \times 10^5$

Fig. 3 Grid-effects on local Nusselt number

計算の初期条件として次の3種類の条件を採用した。すなわち、(1) 流路全体に一樣な速度と温度を与え、加熱条件に従って円柱表面の温度条件を設定し、初期条件とするもの、(2) (1) で得られた結果のうち、カルマン渦が観察される低 Ra 条件の解(非定常解)を初期条件とするもの、(3) (1) で得られた結果のうち、流れが定常となる高 Ra 条件の解(定常解)を初期条件とするものである。なお、(1) と (2) の初期条件による計算結果は同一であった。以下の議論では、(1) と (2) を非定常初期条件、(3) を定常初期条件と呼ぶ。

計算の時間進行は、まず円筒座標系の差分式を繰返し計算により解き、主座標系で円柱にもっとも近い点の値を円筒座標より線形補間により求める。次に主座標系の差分式を繰返し計算により解き、円筒座標系の最外郭の境界値を線形補間により与える。この計算を1時間ステップごとに5~10の繰返し計算を行ったのち時間を進行させた。計算は解の時間変化が周期的または定常となるまで進行させた。

4. 結果および考察

4.1 計算手法の妥当性 まず計算結果を議論する前に、本計算手法の妥当性について検討する。図3に計算に用いた最小格子幅を長さ基準にとったレイノルズ数 Re_g の局所ヌッセルト数 Nu_ϕ に及ぼす影響を示す。図3の横軸には円柱前方よみ点からの角度 ϕ をとり、縦軸の Nu_ϕ の値はプラントル数 Pr の0.4乗で除して示した。図3中の結果は、純強制対流の場合であり、円柱は一樣流($Re=120$)中に置かれ、等温度で加熱されている。図3中の実線は、Eckert ら⁽⁶⁾

(a) $Ra=0$ (b) $Ra=1.45 \times 10^5$ (c) $Ra=4.46 \times 10^5$ Fig. 4 Streak lines ($Re=150$)

の実験であり、破線はSchmidt ら⁽⁷⁾により求められた前方よみ点近傍の Nu_ϕ に関する以下の半経験式である。

$$Nu_\phi = 1.14 Re^{0.5} Pr^{0.4} \left\{ 1 - \left(\frac{2\phi}{\pi} \right)^3 \right\}$$

本計算結果は、 Re_g が1程度以下である場合には、互いにほぼ同一の結果となっている。また、その結果は円柱前面においてSchmidt らの結果およびEckert らの結果とよく一致していることから、本計算手法は妥当であると判断できる。ただし、Eckert らの測定はマッハ・ツェンダー干渉写真により温度こう配を算出したものであるが、円柱背面では干渉帯が広がり、また非定常性を考慮していないため測定値に30%程度のばらつきがある。したがって、円柱背面における結果の妥当性を検討するには十分ではない。なお、格子幅の影響は、特に円柱側面において大きく表れているが、この位置は圧力こう配が正から負へと転ずる位置であり、また温度こう配が比較的大きい領域であるので、この領域の計算には、より小さな格子間隔が要求されるものと思われる。本研究では、この結果から Re_g を1程度以下とした格子系を用いて計算を行った。

4.2 流れ形態 まず本計算で見られた流れ形態に関する分類を行っておく。図4に本計算結果から観察された3種類の流れ形態の例を流脈線で示す。いずれの場合も等熱流束加熱条件で計算した結果である。

本計算における Re の範囲では、 Ra が小さい場合には、円柱背面に周期的なカルマン渦が放出される。図4(a)に円柱を非加熱時の例を示した($Ra=0$)。一方 Ra が高い場合には、カルマン渦の放出はなく、図4(c)のような定常な流れとなる⁽⁸⁾。図4(b)は、本計算範囲では3例で観察された流れであり、定常流に近

Fig. 5 One-sided power spectrum

い流れ形態を示すが、円柱後流後端部に揺動が観察されるものである。図5に図4(a), (b)の場合の $x/d=5$ の位置の流路中央における V に関するパワースペクトルを示した。図5のように周期的なカルマン渦が見られる場合には、カルマン渦の放出周波数に対応する $f=0.1$ Hz 近傍にスペクトルが集中しているが、 $Ra=1.45 \times 10^5$ の場合には、いくつかのピークは見られるものの比較的広い範囲にスペクトルが分散している。このことは流れに不規則性を有するカオス現象が生じている可能性があることを示唆している。本研究では、厳密ではないが、本流れ形態を不規則性を有するという意味でカオス的流れとして分類する。

4.3 平均ヌセルト数 図6(a), (b)にそれぞれ等温度加熱を行った場合および等熱流束加熱を行った場合の平均ヌセルト数 Nu_m に対する Ra の影響を示す。Churchill⁽¹⁾ は共存対流熱伝達に関して、以下のような純強制対流熱伝達 Nu_{mF} と純自然対流熱伝達 Nu_{mN} の重ね合わせによる整理法を提案している。

$$Nu_m^3 = Nu_{mF}^3 + Nu_{mN}^3 \quad (1)$$

ここで Nu_{mF} としては壁面での Pr の変化を考慮しない以下のような Zukauskas⁽⁹⁾ の経験式

$$Nu_{mF} = 0.52 Re^{0.5} Pr^{0.37}$$

を参考に閉そく比を考慮し、本計算で $Ra=0$ の場合の Nu_m から得られた関係式(2), (3)を採用した。一方 Nu_{mN} には Churchill-Chu⁽¹⁰⁾ による式(4)を採用した。図6中の線はこのようにして求めた Nu_m である。

強制対流：

$$Nu_{mF} = 0.586 \left\{ \frac{Re}{(1/d/H)} \right\}^{0.5} Pr^{0.37} \quad (\text{等温度条件}) \quad (2)$$

$$Nu_{mF} = 0.684 \left\{ \frac{Re}{(1/d/H)} \right\}^{0.5} Pr^{0.37} \quad (\text{等熱流束条件}) \quad (3)$$

自然対流：

(a) Constant temperature heating

(b) Constant heat flux heating

Fig. 6 Mean Nusselt number

$$Nu_{mN} = \left[0.6 + 0.387 \left[\frac{Ra}{1 + \left(\frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16}} \right]^{1/4} \right]^2 \quad (4)$$

まず、図6(b)に示した Kikuchi ら⁽²⁾ の $Re=150$ の実験結果と比較すると、本計算結果は5%程度低い値を示しているが、これは実験でのスパン方向のダクト幅が有限である($1.33H$)ため、スパン方向の境界層の発達に伴う縮流が影響したものと考えられる。

次に図6(a), (b)の各 Re に対する計算結果を見ると、同じ Ra に対して相異なる Nu_m の得られる遷移領域が存在することがわかる。これは計算の初期条件の違いによって発生するものである。非定常初期条件を用いて計算を行った場合は、比較的高い Ra でも非定常性が失われず、図4(a)と同等な非定常解となった。一方定常初期条件により計算した場合は、比較的低い Ra に対しても定常解が得られた。このよう

な遷移領域における初期条件の違いによるヒステリシス現象については後に詳細な議論をする。なお、単独解のみを示している領域においては初期条件による違いは起こらず、同じ結果となった。

いずれの条件においても流れが非定常である強制対流支配域 ($Re=150$ の等温条件では $Ra < 1.5 \times 10^5$) では、 Nu_m は各 Re における強制対流の値とほぼ同一の値をとる。一方定常解をとる自然対流支配域 ($Re=150$ の等温条件では $Ra > 7 \times 10^4$) では、低 Ra においてほぼ同一の値をとるが、 Ra の増大に伴って徐々に増大し、純自然対流の値に漸近するような挙動となる。また、非定常解と定常解が混在する遷移域においては、つねに非定常解が定常解よりも大きな Nu_m を示す。図 6 中に示した Churchill による共存対流の相関式は、等熱流束加熱条件の非定常初期条件による解には比較的一致しているものの、遷移域で見られる Nu_m の一時的な急減現象を記述できない。この不一致は等温加熱条件の場合、より顕著である。すなわち、Kikuchi ら⁽²⁾ が指摘したように、共存対流下の熱伝達特性は、純強制対流および純自然対流の単純な重ね合わせでは表現できないことが、本計算結果からも明らかとなった。

なお、等熱流束加熱条件の結果では 4・2 節で見たカオスの流れが、 $Re=150$ の $Ra=1.5 \times 10^5$ 近傍の 3 例に現れている。より高い $Ra (> 4.45 \times 10^5)$ およびより低い $Ra (< 5 \times 10^4)$ の定常初期条件による解においてはほぼ完全な定常解が得られており、比較的限られた領域にのみカオスの流れが現れることは非常に興味深い。しかしながら、これらの Nu_m は定常解の曲線上にあり、カオスの揺動が円柱まわりの熱伝達に大きくは影響していない。これは、カオスの揺動が円柱下流の比較的円柱から離れた下流において現れていることによる。

4・4 局所熱伝達特性 4・3 節で Ra の増加に伴って流れが非定常から定常に変化する際に、 Nu_m が一時的に急減すること、および定常化したのちにさらに Ra を増加させると Nu_m が増大することを指摘した。このことに関して考察するために、局所熱伝達特性および円柱近傍の速度場に関して議論する。なお、ここでは流れの定常化に伴う熱伝達の急減が顕著に現れた等温度加熱条件の結果のみを取扱う。

図 7 に円柱まわりの局所ヌセルト数 Nu_ϕ を示す。また、図 8 に円柱近傍の周方向速度 V_θ の分布を、図 9 に流路中心線上の x 方向速度 U の分布をそれぞれ時間平均値で示す。図 7 と図 8 の横軸は図 3 と同様、円柱前方よどみ点からの角度 ϕ とし、図 9 の横軸は円柱

Fig. 7 Local Nusselt number distribution

Fig. 8 Circumferential velocity distribution

Fig. 9 Streamwise velocity distribution

中心からの無次元距離 x/d とした。

図 7 を見ると、円柱前方よどみ点において Nu_ϕ は高い値を示し、円柱表面に形成される境界層が発達するに伴って、下流に向かって徐々に減少することがわかる。 Ra が小さい場合 ($Ra=0$ および 1×10^5) には、 $\phi=2\pi/3 \sim 3\pi/4$ の位置でいったん極小となり、円柱後端まで増加する分布形状となる。一方、 Ra が大きい場合 (7×10^5) には、 Nu_ϕ は円柱後端近傍まで徐々に減少し、後端部近傍で極小値をとり、後端で若干増加する分布形状となる。はく離の生じていない円柱前面から側面においては、 Nu_ϕ は Ra が大きいほど大きい。これは、図 8 からわかるように、円柱表面近傍の流れ

が、浮力の影響によって加速されるためであり、 Ra が大きいほど円柱近傍の $\bar{V}_\theta$ は大きい。このため、 Ra が大きくなるとはく離が生じていない領域において Nu_ϕ は Ra にしたがって大きくなる。また、 Ra が小さい場合に生ずる極小は、図8から明らかなように、そのやや上流で流れがはく離することと関連している。はく離点は Ra が大きいほど加速の影響によって下流に移動し、そのことにより Nu_ϕ の極小点は下流に移動する。円柱壁面に沿う流れは Ra の増大に伴って増大するため、 Ra が十分大きい場合には、はく離が生じなくなる。このため、 Nu_ϕ は後端部近傍まで単調に減少する。

Ra が小さい場合に円柱後端部では比較的高い Nu_ϕ が観察されるが、これは、図9より明らかなように、円柱下流域に生じる逆流による。すなわち、この円柱背面に向かう流れのために、 Nu_ϕ が円柱後端で比較的高い値を示すと考えられる。なお、 $Ra=1 \times 10^5$ の場合、非定常解(○印)と定常解(●印)を比較すると、ほぼ同じ位置($x/d \approx 1$)で極小となっているが、定常解のほうが極小の位置がやや下流であり、また極小値の絶対値が小さいことがわかる。このことにより Ra が同じ場合、円柱後端部の Nu_ϕ は定常解のほうが小さくなる。加えて Nu_ϕ の極小点が下流に移動して Nu_m の減少領域がより長くなるため、 Nu_m の定常解が非定常解より小さい値をとるものと考えられる。

4・5 分岐現象 以上のことから、円柱の熱伝達特性を正確に把握するためには、流れ様式を特定することが重要であることがわかる。そこで同一の Ra に対して二つの解が得られた遷移領域に関してさらに考察することにする。

円柱近傍における速度変動幅が Ra に対してどのように変化するかを図10に示す。 $Re=150$ で等温加熱条件の場合である。縦軸は $x/d=1.5$ の位置の流路中央の位置における V の変動の振幅 V_a を平均速度 U_m で規格化したものである。 Ra が小さい場合($Ra < 4$

Fig. 10 Amplitude of normal velocity fluctuation

$\times 10^4$)には初期条件によらず、周期的なカルマン渦の放出によって、 V_a は比較的大きい値を示す。また Ra が十分大きい場合($Ra > 3 \times 10^5$)には流れは定常となり、 $V_a=0$ となる。非定常初期条件を課した場合は Ra の小さな値から Ra を増加させる計算を行うことに対応するが、 Ra の増加に対して V_a は徐々に減少し、ある臨界値($Ra=3 \times 10^5$: 高臨界点)を超えると突然 $V_a=0$ となる。一方、定常初期条件の場合には、 $Ra < 3 \times 10^5$ の領域においても流れの非定常性は現れず、 $Ra=4 \times 10^4$ (低臨界点)で V_a の値が突然増大して非定常解となる。分岐現象に関する分類による⁽¹¹⁾と、振動の振幅が急激に増減する場合の分岐は亜臨界分岐と呼ばれる。本研究で観察されたヒステリシスは亜臨界分岐が生じたことによると考えられる。

図11(a), (b)にそれぞれ等温条件および等熱流束条件での流れの分類を示す。ここで遷移域は二つの解が得られた領域であり、高低の臨界点 Ra_H と Ra_L で囲まれた陰影部である。図11より遷移域は Re に対して両対数軸上で緩やかな曲線を描きながら増加しているのがわかる。また、Kikuchi ら⁽²⁾の実験において観察された Nu_m が Ra に対して減少する点($\times$ 印)も図11中に示したが、その点は遷移域に関する今回の計算結果の延長上にあり、ほぼこの領域で流動形態の転移が生じたものと考えられる。Churchill⁽¹⁾によってまとめられた実験結果では共存対流域における結果は比較的大きなばらつきを示しているが、分岐現象が

(a) Constant temperature heating

(b) Constant heat flux heating

Fig. 11 Classification of flow pattern

その一因である可能性があり、今後精密な流動および熱伝達の実験を行って確証する必要がある。

5. 結 言

加熱円柱まわりの強制・自然共存対流の流動および熱伝達特性について数値計算を行った結果、以下のことが明らかとなった。

(1) 共存対流熱伝達は、強制対流と自然対流の単純な重ね合わせとならず、流れが非定常から定常に遷移する点において急激に減少することが観察された。これは円柱背面に向かう流れ(逆流)の速度が低下し、背面における熱輸送が減少することによるものである。

(2) 遷移域の数値解には、初期条件の相違によってヒステリシスが存在するが、流れが非定常から定常に遷移するときに生じる亜臨界分岐現象と関連している。

(3) 等熱流束加熱条件で、中間的なレーレー数の限られた範囲でカオスの揺動が観察された。このこと

は流体振動を考えるうえでは興味深い。平均ヌッセルト数が定常解の値の延長上にあることからカオスの揺動はほとんど熱伝達特性に影響を与えない。

文 献

- (1) Churchill, S. W., *AIChE J.*, **10**(1977), 10-16.
- (2) Kikuchi, Y., ほか3名, *Proc. 2nd JSME KSME Therm. Eng. Conf.*, **1**(1992), 89-92.
- (3) 原健二・ほか2名, 機講論, No. 945-1(1994), 123-125.
- (4) Leonard, B. P., *Comput. Method Appl. Mech. Eng.*, **19**(1979), 59-98.
- (5) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transf. and Fluid Flow*, (1980), 113-137, Hemisphere, Washington D. C.
- (6) Eckert, E. R. G. and Soehngen, E., *Trans. ASME*, **74**(1952), 343-347.
- (7) Shimidt, E. and Wenner, K., *Forsch. Ingenieurwes.*, **12**(1941), 65-73.
- (8) 能登勝久・松本隆一, 機論, **50**-460, B(1984), 3015-3023.
- (9) Zukauskas, A., *Adv. Heat Transf.*, **18**(1987), 87-159.
- (10) Churchill, S. W. and Chu, H. H. S., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **18**(1975), 1049-1053.
- (11) 井上良紀・木谷勝編, 乱れと波の非線形現象, (1993), 108-126, 朝倉書店.