数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発*

田 中 伸 厚^{*1}Development of new mesh-free algorithm with a high accuracy
for computational fluid dynamics

Nobuatsu TANAKA

This paper describes a new mesh-free algorithm for computational fluid dynamics. The algorithm is based on CIVA interpolation method, which is the CIP-type cubic interpolation formulated in volume/area coordinates with tetrahedron/triangle unit and can be applicable to such mesh-free methods as the Gridless and Particle methods. The CIVA-based mesh-free methods will make it possible to simulate many kinds of problems having complex geometries and phenomena with a high accuracy, since the methods are based on a tetrahedron/triangle unit and can treat both resting and moving particles (computing points). For achieving high accuracy with the methods, it is also important to correctly evaluate particle movement. The improvement of the evaluating algorithm is another objective in this study.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Mesh-free Method, Particle Method, CIVA, Time Discretization, CIP

1. 緒言

熱流動解析に最も広く使われているメッシュ分割を用いる数値解析法には、有限差分法、有限要素法などがある。特に有限差分法では、そのメッシュに対する制限により、複雑な形状、現象に対しては限界がある。この問題を解決するため、近年では、格子分割を用いないメッシュフリー手法が注目されている。その一例がグリッドレス法[1][2]や粒子法[3][4]である。これら手法は、構造格子や非構造格子の格子とは無関係であり、複雑形状の問題への適用性など非常に魅力的である。

グリッドレス法では、ある点の周りのスカラー分布関数を仮定し、その係数を最小自乗法で与える。そのため、関数近似に伴う数値誤差が発生し、また、与える関数を高次にしても高精度化には単純には結びつかない。また、基本的には中心差分的な方法であるため安定性にも問題がある。

一方、粒子法では移流を計算点の移動により表すが、計算点の粗密の解消や再配置をするためにはデータ補間が必要となる。一般には、その補間は一次精度の補間法が使われるが、そうした低次補間は、グリッドレス法と同様に関数近似に伴う数値粘性を発生させることになる。

このように、従来のメッシュフリー手法では、関数

近似や補間により生ずる数値粘性の発生に問題があり、その低減は困難であった。その原因は、メッシュフリー手法に適用できる、適切で高精度な補間アルゴリズムがないためであった。

一方で、最近では、空間微係数を変数として用いることにより精度・安定性を向上させる計算スキームとしてCIP (Cubic Interpolated Pseudo-particle)法が注目されている[5][6]。従来のCIP法は、長方形や直方体メッシュで3次関数補間を行っているため、そのままメッシュフリー法に適用することは困難である。しかし、同様の方法が三角形要素(二次元の場合)に適用できれば、補間の対象となる位置を含む三角形を決めれば3次補間ができるため、上記のようなメッシュフリー法で高精度補間が実現できる。そもそもCIP法は、付録に示したように空間精度としては3次精度程度であり、差分法などの矩形メッシュを用いた解析ではメモリ増大などの不利な点が多く、それほどメリットはない。しかし、その手法が、矩形メッシュでは取り扱いが困難な問題を対象としたメッシュフリー手法に応用でき、高精度化が達成できれば非常に有用である。三角形メッシュ上でCIP法を使うには、いかに3点で囲まれる領域内の物理量を3次関数で補間するかが問題となる。青木らは、2次の微係数も変数として記憶する方法を提案している[7]が、実際の熱流動解析などに適用する場合、その値の計算方法や境界条件の設定などが問題となると思われる。三角形を基準として3次関数補間す

* 原稿受付 1997年8月13日。

^{*1} 正員, (株)東芝原子力技術研究所 (☎ 210-0862 川崎市川崎区浮島町4-1)。

る場合にこのような改良を必要とするのは、対象となる完全3次多項式の未知係数を決定するための情報が不足しているためである。したがって、別の考え方として、変数を増やすことにより情報量を増加させるのではなく、使用する3次関数の方を調整することにより情報量を変えずに問題を完結させる方法が考えられる。今回提案する、三角形(三次元では四面体)内を効率良く3次関数補間を行うCIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates)法もそうした方法の一つであり、二次元の場合はCAT(Cubic-interpolation in Area coordinates with Triangular unit)法[8][9]と同一である。この手法は、基本形状を三角形や四面体としたことで、その応用範囲は拡大し、グリッドレス法や流れと共に計算点が移動するような粒子法にも適用できる。その適用例として、ここでは、移流問題や移流・拡散問題への応用について説明する。また、CIVA法を用いたグリッドレス法や粒子法では、粒子は物理量だけでなくその空間微係数も輸送するため、粒子の移動も精度良く行う必要がある。そのため、ここでは粒子移動に関する時間積分法についても改良・考察を行う。

2. 新しい高精度補間法 (CIVA法)

2.1 はじめに 従来のメッシュフリー手法では、補間(あるいは関数近似)により生ずる数値粘性の発生に問題があり、その原因は、そうした手法に適用できるような高精度な補間アルゴリズムがないことに起因する。そこで、ここでは、メッシュフリー手法にも対応できる高精度補間方法を提案する。メッシュフリー手法では、対象となる位置の周りの点群のデータを用いて補間を行う。しかし、従来用いられている最小自乗法のような方法では、与える関数を高次にしても高精度化には単純には結びつかず、用いる点群の数を増やしても数値的な誤差を発生させ精度を悪化させかねない。すなわち、そうした手法で高精度補間を実現するには、なるべく少ない点群を用いて高次補間を行う必要がある。また、柔軟性の点から考えてもその点群の形状としては二次元では三角形、三次元では四面体が適切である。しかし、従来の補間方法では、このような形状での補間は一次補間となってしまう、関数近似による誤差が大きい。そこで、ここでは、スカラー量だけでなく、その空間微係数も変数として考慮するCIP型の手法を採用し、3次関数による補間を行う。

2.2 定式化

二次元の場合、三角形を基準として

3次関数補間する場合に問題となるのは、対象となる完全3次多項式

$$f(x, y) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5y + a_6y^2 + a_7y^3 + a_8xy + a_9x^2y + a_{10}xy^2 \quad (1)$$

の未知係数が10個であるのに対し、既知情報は9個しかなく、情報が不足している点である。青木らの提案している方法は、2次の微係数 $\partial^2 f / \partial x \partial y$ も変数として記憶することによって、情報量の不足を補っていると考えられる。しかし、実際の熱流動解析などに適用する場合、その2次の微係数の計算方法や境界条件の設定などが問題となると思われる。

そこで、ここでは、変数を増やすのではなく、用いる3次関数を調整することにより未知係数を減らして問題を完結させることにする。一般に、デカルト座標系のままで対象とする(1)式の3次関数を調整する(項数を減らす)と以下のような問題が生ずる。

- ①関数の対称性が崩れる。
- ②係数に関する連立一次方程式を解く必要があり、計算時間がかかる。
- ③三角形の形状により、②の方程式が特異になる。

特に、③が問題であるが、こうした問題は有限要素法の分野で用いられている面積座標系を利用することにより解決することができる。

いま、簡単のため図1に示すような座標を採用し、 x 座標方向の偏微分を f^x などで表すものとする。

Fig.1 2D-CIVA using triangle and upwinding algorithm

Fig.2 Area coordinates

面積座標系は、三角形に対し正規化された座標系であり、体系内の点 P は、3つの座標値 (L_1, L_2, L_3) によって表される。この座標値は、図2に示す部分三角形と全体の三角形の面積 S の比、

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (2)$$

を表し、以下の式によりデカルト座標と1対1に対応している。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここでは、対称性を考慮し、三角形内のスカラー量に関する3次関数を、面積座標を用いて以下の形におく。

$$\tilde{f}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c L_j L_2 L_3] \quad (4)$$

d は1次補間と3次補間の調節パラメータで、 $d=0$ のとき1次、 $d=1$ のとき3次補間となる。また、 c をどのように設定するかは興味ある問題であり、今後の検討課題である。ここでは有限要素法による構造解析の分野で使用されている $c=1/2$ を用いる。この値は、(4)式で表される3次関数が、体系内の全領域で任意の曲率を与えるように選ばれたものである[10]。このように仮定すると、関数の対称性を損なうことなく未知係数を9個に減らし、(4)式の係数を連立一次方程式を解かずに直接決定できる。いま、

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \quad (5)$$

とおくと偏微分作用素が、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{y_2 - y_3}{J} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{y_3 - y_1}{J} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{y_1 - y_2}{J} \frac{\partial}{\partial L_3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{x_3 - x_2}{J} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{x_1 - x_3}{J} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{x_2 - x_1}{J} \frac{\partial}{\partial L_3} \end{aligned} \quad (6)$$

のように書けることなどを考慮して(4)式の未知係数を求めると以下のような非常に単純なものとなる。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f_i, \\ \beta_{jk} &= f_j - f_k + (x_k - x_j) f_j^x + (y_k - y_j) f_j^y \end{aligned} \quad (7)$$

従って、三角形内の任意の点の座標を面積座標で表し、(4)式に代入することで連立一次方程式を解くことなく、その点のスカラー量を3次補間することができる。微係数も(6)式を用いれば同様に計算可能である。

Fig.3 3D-CIVA using tetrahedron

また、問題が三次元の場合も、図3に示すように、四面体内のスカラー分布を体積座標 (L_1, L_2, L_3, L_4) で表すことにより同様に処理することができる。例えば、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^4 \beta_{jk} [L_j^2 L_k \\ &+ c(L_1 L_2 L_3 + L_2 L_3 L_4 + L_1 L_2 L_4 + L_1 L_3 L_4)] \end{aligned} \quad (8)$$

と仮定すると、この c, d は二次元の場合と同じ意味を持ち、(8)式の係数は以下のように決定できる。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f_i, \\ \beta_{jk} &= f_j - f_k + (x_k - x_j) f_j^x + (y_k - y_j) f_j^y \\ &\quad + (z_k - z_j) f_j^z \end{aligned} \quad (9)$$

以上のように、CIVA法を用いることにより、上記の①②③の問題を解決し、非常に単純な定式化で三角形や四面体内のスカラー分布を3次関数補間することができる。

2.3 グリッドレス法への応用 一般に、熱流動解析において、移流項をいかに精度良く評価するかが計算全体の精度を支配するため重要である。ここでは、計算領域内に適当に計算点を配し、以下の二次元移流方程式の初期値問題を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (10)$$

ここでは、広義な意味でのグリッドレス法として、

格子分割を行わず、計算点を移動させずに流動解析を行う方法と解釈する。従来のグリッドレス法では、(10)式中の微係数を周りの点群の値より最小二乗法により求めて解く[1][2]。一方、ここでは、CIVA法を用いて風上化の方法により移流項を評価するものとする。風上化法では、図1中の点 P_1 における(10)式の解を、流れの時間刻み分だけ風上側の点 Q の値で近似し、その値を補間により求める。このような方法はGodunov法とも呼ばれ、式の上では、(10)式の解を、

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \approx f(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{u}, t) \quad (11)$$

と近似することに相当する。CIP法は(11)式をスカラー量だけでなく、その微係数に対しても用いる点に特徴がある[5][6]。

CIVA法を用いたグリッドレス法でもCIP法と同様の手法を取り、点 Q を含む上流側の三角形 $P_1 P_2 P_3$ から3次関数補間により点 Q でのスカラー値およびその微係数を求めるものとする。すなわち、(3)の関係より点 Q の座標を面積座標で表し、(4)式に代入することで点 Q のスカラー量を求めることができる。微係数は、(6)式等の関係より同様に計算することが可能である。このように、CIVA法とグリッドレス法を組み合わせた方法をCIVA-Gridless法と呼ぶ。

Fig.4 Problem considered (Initial condition of f)

ここでは、図4に示すように、体系中心(0,0)を中心とした一様な角速度 $\pi/5$ (rad/s)の回転場に、 f の初期分布を与え、1回転後(2π)の f の分布を比較した。図5が正解で、図6～8は等間隔格子を用いた有限差分法による結果である。これらの結果から、格子分割数が同数の場合、空間精度としてCIP法は3次精度風上差分法と同程度であることがわかる。これは、付録で示したように、CIP

法は、空間精度としては3次精度程度であるためである。このように矩形メッシュを用いた解析では、CIP法はメモリ増大などの不利な点が多く、それほどメリットはないと思われる。いいかえれば、CIP型の手法は、従来高精度化が困難であったメッシュフリー手法に応用した方が、その真価を発揮できると考えられる。

図9が本解析手法による結果であるが、計算点が同じ場合、3次精度風上差分法やCIP法と同程度の結果が得られている。

Fig.5 Exact solution

Fig.6 Donor-cell ($\alpha=0.1$), $\Delta t=0.002$

Fig.7 3rd upwind (UTOPIA), $\Delta t=0.002$

Fig.8 CIP, $\Delta t=0.02$

Fig.9 CIVA-Gridless, $\Delta t=0.02$

Fig.10 CIVA-Particle, $\Delta t=0.02$

2.4 粒子法への応用 流れと共に計算点(粒子)

流れと共に計算点(粒子)が移動する粒子的解法においては、移流項は計算点の移動によって処理されるため、数値粘性は小さいと考えられている(後述の時間精度を除く)。しかし、一般には、どのような粒子法も、計算点は流れと共に移動するだけでは済まず、粒子密度の不均一性を解消する目的等で計算点の位置の補正や再構成が行われる

[3][4]。そのためには、計算点以外の領域における物理量などを補間して求める必要があり、その際に低次の線形補間等を用いると数値粘性を発生させることになる。この問題を解決するため、上記のCIVA法は、数値粘性を小さく抑えることができ有効であると考えられる。このように、CIVA法と粒子法を組み合わせた方法をCIVA-Particle法と呼ぶ。この考え方は、さまざまな粒子的手法に適用可能であるが、ここではその一例として、以下のような方法によりその有効性を確認した。

まず、計算点を、現在のスカラー量やその微係数と共に流れに従って移動させる。移動した計算点の値より元の位置での値をCIVA法により補間し、計算点は元の位置に戻す(図11)。この方法では、図11に示した三角形 $P_1P_2P_3$ 内のスカラー分布を3次関数で表し、点 P_1 でのスカラー量等を求めることになる。また、移動前の三角形 $P_1P_2P_3$ 内のスカラー分布を3次関数で表し、その3次関数を流れに従って移動させた後、点 P_1 の値を求めることと等価である。この方法では、計算点は流れと共に移動するが、計算上は風上法と同様に固定点として扱える。

ここでは、上述のCIVA-Particle法を2.3節の問題と同じ問題に対して適用し、等間隔計算点により解析を行った。結果を図10に示す。CIVA-Particle法でも、有限差分法で3次精度風上差分法(UTOPIA)やCIP法を用いた場合と同程度の解が得られている。また、計算の安定性に関して、本手法は、UTOPIAの場合の十倍の時間刻みでも安定に計算可能であった。

Fig.11 CIVA-Particle algorithm

次に、より定量的な比較を行う。上記と同様の問題を、Fig.12に示す不規則点(10⁴個)により解析を行った。結果をFig.13に示す。比較のため、100×100の等間隔格子を用いたDonor-cell (2次中心差分+人工粘性)とUTOPIA (3次風上差分法)による差分法の結果も含めた。本手法は、計算点がかなりランダムであるにもかかわらず等間隔格子のUTOPIAと同程度の解が得られている。

Fig.12 A part of computing points

(A) Cross section A

(B) Cross section B

 Fig.13 Comparison of scalar profiles after 2 π rotation

3. 位置評価 (時間積分) 手法の改良

3.1 はじめに 移流項を計算点の移動により評価する粒子型の解法では、粒子の移動を精度良く評価する必要がある。特にCIVA法では、スカラー量と共にその微係数も移動させるためその評価法の重要性は高い。しかしながら、従来の方法ではその精度は低く、いくら空間精度を高めても、解全体としての精度は低くなる。ここでは、それらの手法における位置評価 (粒子移動) に関する時間積分を改善し、さらに、CIP法を含むGodunov型の風上化法へフィードバックを行う。

3.2 粒子法とCNP法 従来の粒子法では、(12)の陽解法や(13)の陰解法が用いられている。

$$x_i^{n+1} \equiv x_i^n + \Delta t u_i^n \quad (12)$$

$$x_i^{n+1} \equiv x_i^n + \Delta t u_i^{n+1} \quad (13)$$

Fig.14 Evaluation of particle movement

しかし、これらの手法は時間に関して共に1次精度で、非一様流れの場合、時間刻みを大きくすると、粒子移動に関する誤差を生みやすい(図14)。この問題を解決するため、ここでは以下のCrank-Nicolson型の粒子移動評価(CNP)法を提案する。

$$x_i^{n+1} \equiv x_i^n + \Delta t \frac{u_i^n + u_i^{n+1}}{2} \quad (14)$$

Fig.15 IAHR benchmark problem[11]

Fig.16 Diffusion model

問題としては、図15に示すIAHRベンチマーク[11]を対象として解析を行う。この問題の支配方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{1}{Pe} \nabla^2 f \quad (15)$$

である。CIVA法を(15)式の解法として使用するため、 f の空間微係数 $f^{(x)}, f^{(y)}$ に関する支配方程式として、CIP法と同様に、以下の式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f^x + \frac{u^x}{Pe} \nabla f^x &= \frac{1}{Pe} \nabla^2 f^x, \\ \frac{\partial f^y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f^y + \frac{u^y}{Pe} \nabla f^y &= \frac{1}{Pe} \nabla^2 f^y \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、(16)式中の、下線(C)が移流、(T)が流れの不均一性による微係数の修正、(D)が拡散を表している。ここで、(C)と(T)の項は2.4節の手順で評価し、(D)の拡散項は越塚らのLaplacianモデル[4]を拡張し、スカラー

と共にその微分量の分配も行うモデルを採用した(図16)。

図17に出口におけるスカラー分布を示す。比較のため、ベンチマーク解[12]、1次精度補間による解、および、CIVA法に従来の陽解法、陰解法を適用した解を含めた。クーラン数 c は代表流速を2.0として計算したものである。Pe数が低い場合は1次と3次補間の結果にそれほど差はないが、高Pe数では、CIVA法の数値粘性が少ないことが確認できる。また、図14から予測される通り、ベンチマーク解と比較すると、解の分布は、陽解法型の方法では回転中心から外側に、陰解法では回転中心方向にずれており、粒子移動に関する時間積分法としてはCNP法が最も優れていることがわかる。

Fig.17 Comparison of scalar profiles at outlet ($c=0.8$)
(A) Upper: $Pe=10$ (B) Lower: $Pe=10^6$

3.3 Godunov型風上法 (CIP法) へのフィードバック

上記の粒子移動に関するCNP法は、CIP法を含むGodunov型の風上化法にも応用できる。Godunov法における移流の評価は、(11)式を正確に書くと、

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - \Delta t u_i^n, t) \quad (17)$$

となる。(17)式中の、風上化による位置の評価 $(x_i - \Delta t u_i^n)$ は、図18に示すような近似的な粒子(擬

似粒子) 移動に基づく方法と解釈することもできる (ただし、上記のCIVA-Particle法とは、①対象となる図形の形状変化の考慮、②補間の対象となる点の位置、の二点で異なる)。

Fig.18 Godunov type upwinding method (left) and the explanation by means of virtual particle movement (right)

Fig.19 Comparison of upwinding methods

従って、Godunov法でもその位置評価 (擬似粒子移動) にCNP法が適用できる (図19)。まず、CIP法でも用いられている(17)式に基づく方法は陽解法型と考えることができる。一方、

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - \Delta t u_i^{n+1}, t) \quad (18)$$

と評価するものが陰解法型となる (図19)。GSMAC-CIP法を用いた池田らの方法[13]はこの形に近い。しかし、これら二つの方法は、粒子法の場合と同様に、時間に関して共に1次精度で、位置評価に関する誤差を生みやすいものと考えられる (図19)。そこで、(14)式と同様のCrank-Nicolson型の評価式

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f\left(x_i - \Delta t \frac{u_i^n + u_i^{n+1}}{2}, t\right) \quad (19)$$

をCNP法と呼び、オリジナルのCIP法に適用した。対象とした問題は3.2節と同様のベンチマーク問題である。

まず、3次精度風上差分法であるUTOPIAとCIP法の比較を行った。クーラン数0.6の場合の結果を図20に示す。CIP法の方が、急勾配位置での勾配はベンチマーク解に近いものの、その位置にはかなりの差が確認される。UTOPIAではオーバーシュートが大きく、勾配は鈍ってしまうものの、そうした位置の差は確認できない。次に、CIP法で、時間刻みを変えて解析を行った。

Fig.20 Comparison of CIP with UTOPIA

Fig.21 Effect of time step on results with CIP

Fig.22 Comparison of results with three different methods in evaluating upwinding position (c=0.6)

結果を図21に示す。ベンチマーク解に近い結果を出すにはクーラン数0.2、あるいは0.02程度まで時間刻みを下げる必要がある。これらの結果は(17)式を用いた陽解法型の方法を用いたものであり、その原因は、上述の位置評価の精度に起因するものと思われる。そのため、図19から予測されるように解の分布が回転中心方向にずれるのである。そこで、ここでは位置評価の精度を上げるため、CNP法をCIP法に導入した。クーラン数は

0.6で、比較のため陰解法型の解析も行った。結果を図22に示す。予測どおり陰解法では解が回転中心から外側にずれている。一方、CNP法では、クーラン数が大きいにもかかわらず、陽解法の $c=0.02$ に近い解が得られており、時間積分精度の向上が確認できる。

4. 結論

三角形形状を基準とし、CIP法の考え方をうけ、面積座標系で定式化する新しい高精度補間方法を提案した。その方法は、三角形を基本としているため、グリッドレス法や粒子法といったメッシュフリー手法に容易に適用できる。移流方程式を対象とした解析結果より、その補間方法に基づくメッシュフリー手法が、数値粘性が小さく安定な手法であることを確認した。

また、メッシュフリー手法で重要となる時間積分法に注目し、それを粒子移動と解釈することにより改良を行った。その手法を用いて移流拡散問題を解き、粒子法にも、CIP法を含めたGodunov法にも適用でき、位置評価の精度を高めて解析精度の向上を図ることができを確認した。

本手法は、三角形を基本とし、計算点の静止/移動にかかわらず利用可能なため、複雑形状、複雑現象など広範囲の問題を精度良く解析することができると考えられる。今後は、本手法に基づく流動解析コードの開発を行う予定である。

参考文献

- [1] Batina, J. T., AIAA Paper 93-0333, 1993.
- [2] 森西, 第8回数値流体力学シンポジウム, 1994.
- [3] 梅垣, 他1名, 数値解析, 43-3, 1992.
- [4] Koshizuka, S., ほか1名, CFD J., 4, 1995.
- [5] Yabe, T., ほか1名, J. Phys. Soc. Japan, 57, 1988.
- [6] Yabe, T., ほか1名, Comput. Phys. Commun., 66, 1991.
- [7] 青木, 他1名, 第8回数値流体力学シンポジウム, 1994.
- [8] 田中, 機講論, 96-25, 1996.
- [9] 田中, 機講論, 97-1, 1997.
- [10] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method (3rd Edn.), McGraw-Hill Co. Ltd., 1977.
- [11] Smith, R.M., 他1名, Numer. Heat Transfer, Vol.5, 1981.
- [12] Schonauer, W., 他2名, Proc. Int. Conf. Numer. Methods in Laminar and Turbulent Flow, Venice, Prineridge, 1981.
- [13] 池田, 他1名, 機講論, 96-25, 1996.

付録 CIP法の精度 (打ち切り誤差) について

CIP法のテイラー展開に基づく打ち切り誤差について考える。一次元一様流速の場合、移流方程式(10)式をCIP法で解くアルゴリズムは、 $c = u\Delta t/\Delta x$ とおくと、

$$f_j^{n+1} = (c-1)^2(2c+1)f_j^n + c^2(3-2c)f_{j-1}^n - \Delta xc(c-1)^2 f_j'^n + \Delta xc^2(1-c)f_{j-1}'^n \quad (\text{A.1})$$

$$f_j'^{n+1} = \frac{6}{\Delta x} c(1-c)f_j - \frac{6}{\Delta x} c(1-c)f_{j-1} + (1-c)(1-3c)f_j' + c(3c-2)f_{j-1}' \quad (\text{A.2})$$

と書ける。ここで、

$$f_{j-1}^n = f_j^n - \Delta x f_j'^n + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_j + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_j - O_1(\Delta x^5) \quad (\text{A.3})$$

$$f_{j-1}'^n = f_j'^n - \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_j - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_j + O_2(\Delta x^4) \quad (\text{A.4})$$

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_j + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_j + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_j + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \Big|_j + O(\Delta t^5) \quad (\text{A.5})$$

を(A.1)に代入し、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -u \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{A.6})$$

等の関係を用いることにより、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_j = -u \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j - u \frac{c(1-c)^2}{24} \cdot \Delta x^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_j + O(\Delta x^4, \Delta t^4) \quad (\text{A.7})$$

従って、CIP法は空間3次、時間4次精度のスキームであることがわかる。同様に、微係数については

$$\frac{\partial f'}{\partial t} \Big|_j = -u \frac{\partial f'}{\partial x} \Big|_j + u \frac{(1-c)(1-2c)}{12} \cdot \Delta x^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x^3} \Big|_j + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (\text{A.8})$$

となる。

ただし、以上の議論は一次元一様流の場合のみであり、本論で検討しているように二次元非一様流の場合、時間精度は悪化する。