円柱はく離せん断層に発達する不安定波の Wavelet 解析*

大田 黒 俊 夫^{*1}, 下 出 新 一^{*2}Wavelet Analysis of the Instability Wave
Developing in the Separated Shear Layer from a Circular Cylinder

Toshio OTAGURO and Shin'ichi SHIMODE

The instability wave developing in the separated shear layer from a circular cylinder is investigated by using continuous wavelet transform with Gabor wavelet. The instability wave is recognized as short, intermittent wave packets. Each wave packet is successfully captured with a tuned Gabor function. Setting an appropriate threshold level for the amplitude of the wave packets gives interval, duration, intermittency and intensity information. The results reveal quantitatively that the instability wave develops along the separated shear layer and that its activity is strongly correlated to the intensity of the mean shear.

Key Words: Instability Wave, Shear Layer, Separation, Circular Cylinder, Wavelet, Gabor Wavelet

1. 結 言

非定常流体力, 空力音, 熱伝達など乱流を特徴づける現象には大規模渦構造が強く寄与しており, これを制御することの工学的意義は大きい。しかし発達した大規模渦構造の制御は容易でないため, できる限り発達初期の段階でこれを制御することが望ましい。一方物体からはく離する流れに関しては, 大規模渦構造に先立ちはく離せん断層内に高周波の不安定波が発達することが知られている。この不安定波の作る速度変動は大規模渦構造の発達に強い影響をもつと予想されている⁽¹⁾。この不安定波は微少な乱れから線形不安定により成長するため, 受容性の研究が進んだ今日, その制御は大規模渦構造の直接制御に比べれば容易であろうと期待される。不安定波は力学的に線形系として振る舞うため, 制御理論との整合性もよい。すなわち, より上流でより小さなエネルギーとより単純な制御系をもって, 下流のより強い大規模渦構造を制御できる可能性が開ける。以上のことから不安定波の挙動を詳

細に調べることは, 大規模渦構造を制御するための重要な情報を与えると予想される。

本論文は研究の対象を円柱からはく離せん断層とする。層流のはく離せん断層には強い速度こう配によって変曲点形の不安定波が発生する。これに関しては Bloor⁽²⁾ による先駆的な研究がその端緒を開き, 1980年代に入り Wei-Smith⁽³⁾, Unal-Rockwell⁽⁴⁾, Filler, Marston-Mih⁽⁵⁾ らによって急速な進展を見た。これら一連の研究によって, 不安定波が変曲点形の不安定性によって発生していることが確認され, その周波数 f_{SL} はく離せん断層の運動量厚さ θ に反比例することから, f_K を Karman 渦列周波数, Re を円柱直径を代表長さにとったレイノルズ数としたときに $f_{SL}/f_K \propto Re^{1/2}$ なる関係式が成り立つことが示された。これに対して Prasad-Williamson⁽⁶⁾ は過去の実験データと自らの実験データとを合せて再検討し, $f_{SL}/f_K \propto Re^{0.67}$ という回帰式を示した。彼らははく離せん断層の遷移点がレイノルズ数の増大とともに移動する分を考慮に入れ, $f_{SL}/f_K \propto Re^{0.7}$ というモデルも提案している。

この不安定波の際立った特徴の一つは発生が間欠的であるという点である。この間欠性に対してはその原因をはく離の三次元性に帰すもの, はく離点位置の主流方向への時間的な変動によると考えるものなどがあ

* 原稿受付 1997年10月7日。

^{*1} 正員, (株)日立製作所機械研究所(〒300-0013 土浦市神立町502)。^{*2} (株)日立製作所機械研究所。

り、決定的なことはわかっていない。間欠性を特徴づける最も基本的な量は間欠係数(不安定波の持続時間の合計が全時間に占める割合)であるが、最近Prasad-Williamson⁽⁶⁾はレイノルズ数に対する間欠係数の変化を示した。彼らは間欠係数の算出を Karman 渦 25 周期分の波形について行ったと述べているが、不安定波の存在割合をどのようにして計算したのか明らかではない。実際に熱線風速計の波形を見ると、不安定波の始まりと終わりの判定は容易ではない。

本論文は、この間欠的に発生する不安定波の時間軸上の特徴、すなわち、発生頻度、持続時間、強度などの統計量をできる限り客観的な基準で解析することを目的とする。従来、このような間欠的な現象に対して客観的な統計量を求めるためのツールは少なかった。最も素朴には目視による波形観察があった。しかし乱流の速度変動波形のような複雑かつ膨大な長さの波形から、目視によって現象を特定しその性質を抽出することは、定性的な解釈に限定すれば可能ではあっても、定量的な解析を行ううえでは事実上不可能に近い。一方、非定常の波形から特徴的なパターンを抽出して定量的な解析を行おうとする試みは数多く行われてきたが、それらはいずれもある特定の現象に固有のパターンに特化して開発された傾向が強いためにはん用性に乏しかった。周波数領域の解析に関しては、短時間 Fourier 解析が広く用いられ実用化も進んでいるが、時間窓の幅が固定という欠点をもつために、信号が本来もっている情報をすべて抽出することができず、高周波域では時間分解能が悪く、低周波域では周波数分解能が悪いという欠点があった。

本研究で取り上げる Wavelet 解析^{(7)~(11)}は、信号を時間-周波数平面に展開して局所相似(周波数)解析を行うための新しい数学的ツールで、信号処理における時間と周波数の不確定性関係⁽¹²⁾に整合しつつ、信号のもつ情報をすべて取り出すことができる。また直交 Wavelet 変換という方法を用いれば、信号を時間-周波数平面で正規直交分解できるという画期的なツールでもある。本論文では連続 Wavelet 変換を用いて不安定波を速度変動波形から抽出し、その統計量を客観的に解析することを試みる。

2. 実験装置および方法

円柱後流の測定には、断面が 500 mm×500 mm の正方形で長さが 2 000 mm の測定部をもつ小形風洞で行われた。測定に用いられた一様流風速 U_0 は 5.0 m/s であり、風速の非一様性の rms 値は 0.2% 以下、乱れ強さの rms 値は 0.5% 以下である。風洞と一体と

なった三次元トラバース装置が測定部外に置かれている。各軸は独立したステッピングモータにより駆動され、確度 100 分の 1 mm 以下の磁気スケールにより位置を検出してフィードバック制御されている。

測定部入口から 250 mm 下流の測定部断面の中心を座標軸の原点にとり、主流方向を x 軸、断面内水平方向を y 軸、垂直方向を z 軸と定義した。実測直径 d が 6.02 mm のステンレス製パイプを y 軸に一致させて取り付け、測定対象の円柱とした。この円柱のスパン方向が y 軸、クロスフロー方向が z 軸となることに注意されたい。円柱の両端近く、側壁境界層厚さよりもわずかに主流側に直径 $4d$ の円盤状の端板を取付けた。これらの数値から計算される円柱のアスペクト比は 73 となり、一様流速度と円柱直径から計算されるレイノルズ数は約 2 000 である。このレイノルズ数領域では、大規模渦の形成距離、円柱の背圧、ストローハル数などがレイノルズ数によらずほぼ一定であることがわかっている^{(3)~(5)}。

速度波形の測定には、プローブ軸を x 軸方向に向けた単線の I 形熱線プローブを定温度形の熱線アンプとともに用いた。粗い線形化を経た熱線アンプのアナログ出力は、これをカットオフ周波数 2 kHz のローパスフィルタに通した後、12 bit の A-D 変換器を用いて 10 kHz でサンプルした。各測定点でのサンプル数は 204 800 個(20.48 s)であり、統計量をとるのに必要十分な長さである。測定直前に風速と気温に対する熱線出力の校正を行い、測定時には波形を計測用コンピュータに取り込んだ後、多項式による精密な線形化を行ってその後のデータ処理に供した。DC 成分の情報を含む波形データはすべてファイルとして格納され、測定後に種々のデータ処理を行った。

熱線プローブのトラバースは図 1 に示すように、 x 方向に $0.75 \leq x/d \leq 2.00$ の範囲の 6 位置、 z 方向に $0.4 < z/d < 0.8$ の 17 位置、合計 102 点の非一様の矩形メッシュによって行った。

3. Wavelet 解析

3.1 連続 Wavelet 変換 Wavelet 解析の基本

Fig. 1 Traversing mesh

的なツールには連続 Wavelet 変換⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾と直交 Wavelet 変換⁽⁸⁾⁽⁹⁾とがある。前者は後者に対して一次従属の過剰な系による展開であるために展開係数が互いに独立ではないという欠点をもつが、解析したい時間や周波数の位置を連続的に選ぶことができるという利点がある。本研究では間欠的な現象の時間軸情報を得るために連続 Wavelet 変換を用いることとした。さて連続 Wavelet 変換は次式(1)で定義される変換である。

$$T(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \Psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad a > 0, \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $g(t)$ は調べたい信号、 $\Psi(t)$ は Wavelet と呼ばれる積分値が零となる関数、 a は時間軸の伸縮を制御する正のパラメータ、 b は時間軸の平行移動を制御する実数、 $*$ は複素共役を表す。これはスケールの尺度 a が可変の相互相関であり、信号波形 $g(t)$ と Wavelet 関数 $\Psi(t)$ との相関を時間軸上を移動しながら求めていくことに相当する。しかも変換後も時間軸情報 b を失わずにもっているところが特徴である。左辺を Wavelet 変換係数と呼び、横軸に b 、縦軸に a をとった平面上の等高線で表現することが多い。これによって各時刻における信号のスケールごとの相関強さが表示され、局所周波数解析が可能となる。Wavelet 関数の選び方には任意性があるが、局所周波数解析を行う関係上、一般には時間、周波数の両領域で局在化した台をもつ関数を用いられている。また Wavelet 変換では低周波域では周波数分解能が高く、高周波域では時間分解能が高くなるが、それが不確定性関係に自然に整合していることも特徴の一つである。

3.2 Gabor Wavelet 本研究では Wavelet 関数としては次式(2)、(3)に示す Gabor 関数を用いた。

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \left(\frac{\omega_0}{\sigma} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\sigma} \right)^2 t^2 + j\omega_0 t \right], \quad \sigma > 0, \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\hat{\Psi}(\omega) = \sqrt{2\pi}^{1/4} \left(\frac{\sigma}{\omega_0} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega_0} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2 \right]. \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\hat{\Psi}(\omega)$ は $\Psi(t)$ の Fourier 変換、 j は虚数単位である。この関数の最大の特徴は明確に定義された中心周波数 ω_0 をもっていることであり、これが Fourier 解析の補完手段として局所周波数解析を行う際の最大の利点となっている。またこの関数は時間、周波数の両領域で Gaussian 形をしているため、両領域での局所性の考察が容易であること、時間-周波数の不

Fig. 2 Gabor Wavelet ($\sigma = 2\pi/\sqrt{\ln 2}$)
Real part: solid line, Imaginary part: dotted line

確定性が最小であるという利点⁽⁹⁾⁽¹¹⁾ももっている。この関数は図2に示すように、時間領域では $t=0$ の近傍で有限な値をもち、振動しながら遠方で急速に減衰する波形をしているが、減衰を決めるパラメータ σ の選び方には自由度がある。すなわち、 σ を小とすれば減衰は速く、時間分解能は高いが周波数分解能は低くなる。逆に σ を大とすれば減衰は遅く、時間分解能は低いが周波数分解能は高くなる。このように時間と周波数の分解能のトレードオフ点をスケールパラメータ a とは独立に調整することができることも Gabor Wavelet の利点の一つである。

3.3 周波数分解能 ところで Wavelet に課せられた積分値が零という条件(Admissible Condition)は $\hat{\Psi}(0)=0$ と等価であるが、これは Gabor Wavelet の場合は近似的にしか満たされない。式(3)に $\omega=0$ を代入し主要項を取り出すと $\exp(-\sigma^2/2)$ が十分に小さくなくなればならないことがわかる。したがって、 σ の選び方には制限がある。また減衰の速さを決めるには $\Psi(2\pi/\omega_0)$ の値が $\Psi(0)$ の値と比べて単純な比になっているほうが見通しがよい。一般に、

$$\Psi(2\pi/\omega_0) = \Psi(0)/p, \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる σ は

$$\sigma = \sqrt{2} \pi / \sqrt{\ln p}, \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり、このとき

$$\exp(-\sigma^2/2) = \exp(-\pi^2/\ln p), \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。一方周波数空間での Gabor Wavelet の分解能を考えてみる。 $\hat{\Psi}(\omega)$ は $\omega=\omega_0$ のときに最大値をとるから

$$\hat{\Psi}(\omega') = \hat{\Psi}(\omega_0)/q, \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる ω' は

$$\omega'/\omega_0 = 1 \pm \sqrt{2 \ln q} / \sigma. \quad \dots\dots\dots (8)$$

である。この式に(5)を代入して

$$\omega'/\omega_0 = 1 \pm \sqrt{\ln p \ln q}/\pi, \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。これを考慮して半値幅に対応する $q=2$ といくつかの p の値に対して, Gabor Wavelet の Admissible Condition と周波数分解能に関して表1を得る。

これから例えば $p=2^{1/2}$ のときには Admissible Condition は十分よく成立し, 周波数領域では片側半値幅が中心周波数の 15.6% となっていることがわかる。これは Fourier 変換に比べれば相当悪い分解能, すなわち不確かさであり, 変換係数の解釈時には注意を要する。より小さな p をとれば Admissible Condition も周波数分解能も向上するが, その分時間分解能は低下し, また $\Psi(t)$ が長い裾をひくために数値計算量が増大する。逆に p を大きくとれば計算コストは減少し時間分解能は向上するが, Admissible Condition や周波数分解能には悪影響を与える。したがって用途に応じてある種の妥協をしなければならないことがわかる。

3・4 時間分解能 次に Gabor Wavelet の時間分解能について考察する。ステップ状に振動を始める関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(j\omega_1 t) & (t \geq 0) \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

を中心周波数 ω_0 をもつ Gabor Wavelet で連続 Wavelet 変換したときに, 展開係数の時刻情報はどのような不確かさをもつのだろうか。変換式(1)に代入すると

$$T(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{\omega_0}{\sigma} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 \left(a \frac{\omega_1}{\omega_0} - 1 \right)^2 + j b \omega_1 \right] \int_{-b/a}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\sigma} \right)^2 \left\{ t - j \omega_0 \left(\frac{\sigma}{\omega_0} \right)^2 \left(a \frac{\omega_1}{\omega_0} - 1 \right)^2 \right\} \right] dt,$$

となるが, 右辺の絶対値は $f(t)$ と Wavelet の中心周波数が同調する $a = \omega_0/\omega_1$ のときに最大となるので, 一般性を失わずに $a = \omega_0/\omega_1$ とおき, さらに誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \dots\dots\dots (11)$$

を用いることにすれば,

$$\begin{aligned} T(\omega_0/\omega_1, b) &= \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_1}{\sigma} \right)^{-1/2} \left[1 + \operatorname{erf} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_1}{\sigma} \right) b \right\} \right] e^{j b \omega_1}, \\ &\dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

という式が得られる。ここで右辺の $e^{j b \omega_1}$ は b とともに振動する部分であり, 誤差関数を含む項が b とともに滑らかに変化する振幅の部分を表す。展開係数の漸近的性質は

$$|T(\omega_0/\omega_1, b)| \rightarrow \begin{cases} 0, & (b \rightarrow -\infty) \\ \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}} (\sigma/\omega_1)^{1/2}, & (b=0) \\ \sqrt{2} \pi^{1/4} (\sigma/\omega_1)^{1/2}, & (b \rightarrow \infty) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

Table 1 Admissible condition and frequency resolution

p	σ	$\exp(-\sigma^2/2)$	$ \omega'/\omega_0 - 1 $ for $q = 2$ (-6dB)
$2^{1/4}$	$2\sqrt{2}\pi/\sqrt{\ln 2}$	1.8×10^{-25}	0.1103
$2^{1/2}$	$2\pi/\sqrt{\ln 2}$	4.3×10^{-13}	0.1560
2^1	$\sqrt{2}\pi/\sqrt{\ln 2}$	6.6×10^{-7}	0.2206
2^2	$\pi/\sqrt{\ln 2}$	8.1×10^{-4}	0.3120
2^3	$\sqrt{2}/3\pi/\sqrt{\ln 2}$	8.7×10^{-3}	0.3822

となり, $b=0$ のときに振幅がステップの前後の midpoint をとること, すなわち位相遅れがないことがわかる。これは Gabor Wavelet の Fourier 変換である式(3)が実数であることから当然予想されたことである。ここで重要なことは展開係数が誤差関数の速さの時定数をもっていることであり, 例えば $|T(\omega_0/\omega_1, b)|$ が $|T(\omega_0/\omega_1, \infty)|$ の 90% に飽和するのは $b \approx 1.28(\sigma/\omega_1)$ のときである。前述の $\sigma = 2\pi/\sqrt{\ln 2}$ の場合には $b \approx 9.66/\omega_1$ のときであり, これは振動周期の 1.5 倍程度に相当する。

本論文では主題である不安定波の検出に対して, 前述の $p=2^{1/2}$ すなわち $\sigma = 2\pi/\sqrt{\ln 2}$ という値を用いる

Fig. 3 Normalized mean velocity

Fig. 4 Normalized mean shear

こととした。これは p の値を変えて試行錯誤を繰返した結果、不安定波を検出するときの時間と周波数の不確かさのトレードオフに対しての妥協点として得られたものである。

4. 実験結果および考察

図3にははく離せん断層の無次元化された平均速度分布 U/U_e の等高線を、図4には無次元化された平均速度こう配 $\partial(U/U_e)/\partial(z/d)$ の等高線を示す。円柱断面が $(x/d, z/d)=(0, 0)$ の位置に中心をもつ半径0.5の円であることを考慮すると、はく離せん断層の外側では流れが加速されていること、はく離せん断層には非常に強い速度こう配があることがわかる。ただし図3において z/d が約0.5よりも小さな領域では、逆流が生じていたり速度の絶対値が極端に小さいこともあるので、熱線風速計の感知する速度の信頼性は低い。

次に一様流速度 U_e で無次元化された乱れ強さの rms 値の等高線を図5に示す。図3, 4と比較すると乱れ強さと速度こう配は強い相関があることがわかり、乱れは薄いはく離せん断層に沿って発生していることがわかる。図5に示した z/d の範囲が2.4 mmであることを考慮すると、せん断層の厚さは1 mmの程度である。

次にはく離せん断層外縁で層流域の速度変動スペクトルの典型例を図6に示す。カルマン渦列の周波数 f_K 約170 Hz とその2倍の高調波 $2f_K$ 、そしてそれら

よりも高周波で広帯域のピーク f_{SL} がはっきりと認められる。この f_{SL} 成分の周波数は約800 Hz 程度であるが、広帯域のピークをもつことが大変特徴的である。これは変動周波数が時間的に変調されているか、変動が間欠的に発生していることを示している。

実際に図7に示すように長時間の時間波形を丹念に調べると、Karman 渦による緩やかな速度変動に混じって、間欠的に強い高周波の速度変動が発生していることがわかる。この変動はランダムに発生し、持続時間は Karman 渦周期の1, 2倍と短く、しかし振幅はかなり強く peak-to-peak で U_e の30~50%にも達するという特徴をもっている。今後、個々の高周波変動を wave packet と呼ぶことにする。

図7中矢印で示した wave packet を拡大したものを図8に、またその波形を Gabor Wavelet により連続 Wavelet 変換し、得られた変換係数 $T(a, b)$ の実

Fig. 7 Velocity waveform at $(x/d, z/d)=(1.000, 0.731)$

Fig. 5 Normalized turbulence intensity

Fig. 6 Power spectrum of velocity fluctuation at $(x/d, z/d)=(1.000, 0.731)$

Fig. 8 Single wave packet

Fig. 9 Wavelet coefficient (positive real part)

部で正の部分の等高線を図9に示す。図8, 9には Karman 渦による周期的な速度変動成分も現れていることに注意されたい。図8の時間波形と図9の局所周波数解析の結果を詳細に観察すると、一つの wave packet の中では変動の周波数はほぼ一定であり約 800 Hz 程度であることがわかる。他の wave packet について調べても同様であり、これから図6に見られた広帯域のピークは間欠的に発生する高周波の wave packet によるものであることがわかる。詳細は示さないが、はく離直後のせん断層の計測を行ってその運動量厚さを求め、Michalke⁽¹³⁾に従い線形安定性理論から最大増幅率をもつ周波数を計算すると、約 900 Hz という値が得られる。これは観察される周波数 800 Hz に非常に近い。さらに f_{SL} と f_K との比をとり $Re^{1/2}$ と比較すると、Filler, Marston-Mih⁽⁵⁾が示した関係式 $f_{SL}/f_K = 0.095 Re^{1/2}$ がほぼ成り立っており、高周波の wave packet ははく離せん断層に発生する変曲点形の不安定波であると結論づけられる。

さて、次にこの wave packet の統計的性質を調べることにする。間欠的にしか発生しない現象の統計をとるために、Wavelet 変換係数の絶対値 $|T(a, b)|$ を利用する。まず変換係数のなかで wave packet の周波数を検出するようにスケールパラメータ a を一つ選び、それを a_m として $|T(a_m, b)|$ を b に対してプロットしたものを図10に示す。これは $|T(a, b)|$ の等高線を周波数が 800 Hz に等しい平面で切った断面形に相当する。これを見ると wave packet が存在する時刻では変換係数の絶対値が有限の値をもち、3・3節と3・4節で述べた周波数と時刻の不確かさを除いては wave packet の振幅変化を表していると考えてよい。ところでこの wave packet は間欠的に発生し、その強さや持続時間、発生間隔もまちまちである。そこで図10に示すようにあるしきい値(閾)値を設けて、 $|T(a_m, b)|$ がしきい値を超えた場合にのみ、そこに wave packet が存在するとしてそのピーク値、持続時間、発生間隔などの統計量を計算することにする。

ここでしきい値の設定は重要である。しきい値が大

Fig. 10 Temporal variation of wavelet coefficient

きすぎると強い wave packet のみから成る母集団の統計をとることになり、統計的に偏った結果が得られる。またしきい値が小さすぎると、単独の wave packet として認識できない高周波の乱れ成分をも統計計算に加えてしまう恐れがある。そこでいくつかの代表的な測定点でしきい値を変化させたときの wave packet の検出数を調べてみた。その結果を両対数表示で図11に示す。しきい値が 0.2 より大きな大振幅の場合を除くと、いずれの位置においても検出数はしきい値に対して右下がりの直線であり、そのこう配はほぼ一定である。これは wave packet に代表的な振幅が存在しないことを示している。したがってしきい値の選び方には自由度があるといつてよい。本論文ではしきい値を 0.15 と比較的大きな値にとることとし

Fig. 11 Detected packets vs threshold level

Fig. 12 Normalized frequency of occurrence

Fig. 13 Histogram of interval
at $(x/d, z/d) = (1.251, 0.698)$

た。その理由は、目視によって高周波の乱れと明確に区別できる程度の振幅の wave packet を対象にして統計量の空間分布を議論したいためである。実際にはしきい値を変化させて目視との比較を行いつつ予備検討を行った結果この値に決定した。以後このしきい値を用いて統計処理を行った結果を示して議論を進める。

図 12 は wave packet の発生頻度(または発生間隔の逆数)の平均値を Karman 渦の発生周波数 f_K で無次元化したものである。図 4 と比較することにより高せん断層に沿って不安定波が発達していること、その発生頻度は Karman 渦発生周波数に対して数分の 1 のオーダーであり、流れ方向に増加していくことがわかる。図 13 ははく離せん断層の外縁に近く発生頻度が比較的低い評価点 $(x/d, z/d)=(1.251, 0.698)$ について発生間隔の頻度分布を調べたものである。定量的な分布形が得られており、発生間隔は大部分 Karman 渦周期の 25 倍以内に分布していること、発生間隔が短いものほど数が多いことがわかる。

図 14 には wave packet の平均持続時間を Karman 渦周期で無次元化したものの分布を示す。等高線が滑らかでないため見にくい、ほぼせん断層に沿う形で持続時間が長くなっていること、またその持続時間は Karman 渦一周期の 1/2 のオーダーであることがわかる。また図 15 には図 13 と同位置における持続時間のヒストグラムを示す。これから wave packet の大部

分についてその持続時間は Karman 渦一周期以内に幅広く分布していることがわかる。持続時間がごく短いものは少ないが、これはしきい値を設定することによって小振幅の wave packet を除外したためであろう。

平均発生頻度と平均持続時間がわかれば、それらの積をとることによって間欠係数(全時間中に wave packet が占める割合)を求めることができる。その結果を図 16 に示す。図 4 を参照しつつ観察すると、図 16 は不安定波がはく離せん断層に沿う形で下流方向に発達していることを大変明瞭に示している。また間欠係数の絶対値が 0.1-0.3 のオーダーであることもわかる。Prasad-Williamson⁽⁶⁾ はレイノルズ数が増大するにつれて間欠係数も増加し、レイノルズ数が 10 000 のオーダーでは間欠係数はほとんど 100% に達すると述べている。彼らのデータには本論文で対象としたレイノルズ数 2 000 程度のものは含まれていないが、データを外挿して求めると間欠係数は 0.2 程度となり、本論文の結果は彼らのデータと整合性がとれてい

Fig. 16 Intermittency factor

Fig. 17 Peak amplitude

Fig. 14 Duration of wave packet

Fig. 15 Histogram of duration
at $(x/d, z/d)=(1.251, 0.698)$ Fig. 18 Histogram of peak amplitude
at $(x/d, z/d)=(1.251, 0.698)$

ることがわかる。

次に図 17 には wave packet の振幅のピーク値の平均値を示す。等高線が滑らかではないが、この統計量においてもはく離せん断層に沿って不安定波が発達していることがわかる。特に注意すべきことはせん断層の上流側で振幅のピーク値が大きいことで、これは図 4 からわかるように上流側でせん断が強く、不安定波の発生が顕著であることの結果であると考えられる。

同様に固定した評価点 $(x/d, z/d) = (1.251, 0.698)$ における振幅ピーク値のヒストグラムを図 18 に示す。これによればピーク値はほとんど 0.4 以下に分布しており、特に小さな値への偏りが強いことがわかる。ここで注意しなければならないのは、しきい値を定めた影響として 0.15 よりも小さな値はとらえられていないということである。実際には 0.15 よりも小さな振幅ピーク値をもつ wave packet は存在するが、しきい値を小さくすればするほど、対象とする不安定波とせん断層内に発達してくる高周波の乱れとの区別が困難になる。本論文では振幅のピーク値が 0.15 よりも大きな wave packet の母集団を対象に統計量を求めている。という点に注意されたい。

最後に従来行われてきた Fourier 解析によって不安定波の空間分布を表現したものを図 19 に示す。図 19 は f_{SL} の前後合計 200 Hz の帯域に含まれる変動成分の rms 値を一樣流速度 U_e で無次元化したものである。図 19 からは素朴な方法によっても不安定波がある程度とらえられるように見える。しかし広帯域の変動強さを見ているだけでは、それがせん断層の不安定による wave packet に由来するものか、せん断層が揺らいだり乱流遷移したりして広帯域の高周波成分が発生したことによるのかは判定は大変困難である。本論文の Wavelet 変換に基づく方法は、従来の Fourier 変換によるスペクトル解析を補完し、より多くの情報量を得るのに適した方法であることを強調したい。

ただし本論文の方法といえども基本的には局所周波数解析であり、 f_{SL} の周波数帯域の変動強度の時間変化のパターンを追跡しているにすぎない。本質的にせ

Fig. 19 Normalized rms power of f_{SL}

ん断層の wave packet と広帯域の高周波成分とを区別できるわけではない。そのため本論文の解析は、まず時間波形を観察し、層流のせん断層の中に間欠的に強い不安定波が発生している領域に限って行った。除外した領域、例えばせん断層の内縁近傍では、鋭いスパイク状の波形が頻出しそれが広帯域の高周波の変動成分を発生させる。また例えば下流の後流軸近傍では、後流が乱流遷移して広帯域の乱れが発生しており、乱れた波形の中に不安定波を認識することは極めて困難である。このような状況下では、上流で発生した不安定波が周囲の強い乱れの中でその個性を保っているかどうかの判別はほとんど不可能といってよい。上記の疑問に答えるにはさらに高度な波形パターンの識別方法を開発する必要があるが、Wavelet 変換は時間-周波数平面での局所的な情報を取り出すのに適しているため、将来何らかの貢献をするものと期待される。

本論文では不安定波が大規模渦構造にどのような影響を与えるのかについての考察を行うことができなかった。これは上記の波形認識の困難も理由の一つであるが、Chyu-Rockwell⁽¹⁾が行ったように、制御可能な不安定波を人工的に導入することが、研究手法として必要不可欠と判断したためであり、その遂行は今後の課題としたい。

5. 結 論

円柱後流の大規模渦構造に先立ってより上流のはく離せん断層に発達する不安定波を連続 Wavelet 変換によって抽出し、不安定波の統計をとってその性質を明らかにすることを試みた。そのために以下の数学的準備を行った。

(1) 局所周波数解析に適するように Gabor Wavelet のパラメータを最適化した。

(2) Gabor Wavelet を用いた連続 Wavelet 変換の時間、周波数それぞれの不確かさをあらかじめ解析的に求めた。

さらに円柱直径を代表長さにとったレイノルズ数約 2000 の円柱後流の速度変動波形を対象に上記 Wavelet 解析を適用し、以下の結論を得た。

(3) 不安定波の発生間隔、持続時間、振幅のピーク値などの空間分布と頻度分布を求めた。

(4) 不安定波ははく離せん断層の平均速度こう配と強い相関をもって発達していることが示された。

さらに今後の課題としては以下のものがあげられる。

(5) 乱れの強い流れ場の中でも不安定波を追跡できる波形解析手法を開発し、広い範囲で統計量を求め

る。

(6) 人工的に不安定波を導入し、大規模渦構造へ与える影響を評価する。

文 献

- (1) Chyu, C. K. and Rockwell, D., *J. Fluid Mech.*, **322** (1996), 21-49.
- (2) Bloor, M. S., *J. Fluid Mech.*, **19**(1964), 290-304.
- (3) Wei, T. and Smith, C. R., *J. Fluid Mech.*, **169**(1986), 513-533.
- (4) Unal, M. F. and Rockwell, D., *J. Fluid Mech.*, **190** (1988), 491-512.
- (5) Filler, J. R., Marston, P. L. and Mih, W. C., *J. Fluid Mech.*, **231**(1991), 481-499.
- (6) Prasad A. and Williamson, H. K., *J. Fluid Mech.*, **333** (1997), 375-402.
- (7) 山口昌也・ほか7名, 数理科学, 354(1992), 5-51.
- (8) 榑原進, ウェーブレットビギナーズガイド, (1995), 2-28, 東京電機大学出版局.
- (9) Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, (1992), 17-52, Philadelphia.
- (10) 佐藤雅昭, 日本音響学会誌, **47**(1991), 405-415.
- (11) 佐藤雅昭, 日本音響学会誌, **47**(1991), 416-423.
- (12) Papoulis, A., *The Fourier integral and its applications*, (1962), 53-79, McGraw-Hill, New York.
- (13) Michalke, A., *J. Fluid Mech.*, **23**(1965), 521-544.