2次元移流拡散方程式による CIP 有限要素法の検証*

榎 原 孝 文*¹, 棚 橋 隆 彦*²Verification of CIP Finite-Element Method
by 2D-Advection Diffusion Equations

Takafumi MAKIHARA and Takahiko TANAHASHI

The conventional shape function for the finite-element method (FEM) is a linear one, which is inadequate for analyzing numerically complex flows for high Reynolds numbers. In the present study, we suppose CIP-FEM scheme using 3rd order shape function which requires continuity of the value of the function and its first space derivative in whole space and is formulated a finite element method for the cubic interpolated pseudo-particle (CIP) method which was developed in the field of finite difference method. The CIP method is used to analyze Advection equations with high accuracy. We verify the effectiveness of this new scheme by 1-D and 2D- Advection Diffusion equations which have the exact solution. The numerical results of these problems are good agreement with each of exact one we could confirm the effectiveness of CIP-FEM scheme.

Key Words: CIP Method, Finite Element Method, Newton-Raphson Method, Burgers' Equation, Advection Diffusion Equation

1 緒言

有限要素法は複雑形状に適し、解析領域の境界条件を取り込みやすいという特徴を持っており、この点に関して有限差分法や有限体積法に比べて有利である。この利点を生かし、流体解析においても有限要素法を用いた解析例が増えつつある⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、有限要素法による支配方程式の離散化は2次精度の中心差分に一致し、そのまま高レイノルズ数流れに適用すると数値振動を引き起し、安定に解析できない。構造格子の場合には高次精度化に対する離散化ステンシルがとりやすいが、有限要素法では非構造格子を前提としているために離散化ステンシルがとりにくく、有限差分法や有限体積法に比べて支配方程式中の非線形項(対流項)に対して高次精度化(上流化)が困難なためである。非線形項の取り扱いが数値流体力学において根本的かつ最も重要な問題である。

近年、有限差分法に遅れをとっていた有限要素法においても高次精度化に対して多くの研究がなされている。その主な方法として指数関数型 Petorv-Galerkin

法⁽³⁾, SUPG(Streamline Upwind/Petorv-Galerkin)法⁽⁴⁾や定常移流拡散方程式の局所厳密解を用いた Chen による FAM(Finite Analytic Method)⁽⁵⁾を有限要素法に拡張した Hybrid 型上流化有限要素法⁽⁶⁾などがあるが、いずれも極限はたかだか1次風上であり、精度が充分であるとはいえない。これは1次風上の数値粘性が大きくなるためである。そこで著者らは移流方程式に対して高精度でかつ安定に解析を行える CIP (Cubic Interpolated Pseudo-particle) 法に着目している。

矢部らによって差分法で開発された CIP 法⁽⁷⁾の特徴は、節点での関数値の分布を連続関数と想定し、その連続関数を節点での関数値とその一階微分を用いて3次関数(スプライン関数)で表し、その関数の形状を崩さずに移流することにある。この CIP 法を改良し、有限要素法で定式化した従来の線形形状関数と任意の2次関数の積をとる3次形状関数を誘導し、この形状関数を用いた CIP-FEM の線形移流方程式による検証によって、その精度が有限差分法の3次風上差分以上であることを示した⁽⁸⁾。これにより有限要素法による高精度解析手法を提案したわけであるが、さらに本論文では非線形方程式である Burgers 方程式によって CIP 法の様々な検証を行い、さらに2次元移流拡散方程式に拡張し、CIP-FEM の有効性を検討する。

* 原稿受付 1997年5月19日。

*¹ 准員, 慶應義塾大学大学院(☎223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員, 慶應義塾大学理工学部。

2 1次元移流拡散方程式

2.1 厳密解 1次元移流拡散方程式は Burgers 方程式と呼ばれる非線形方程式であり, Navier-Stokes 方程式のモデル方程式として解析スキームの検証に用いられることが多い。この Burgers 方程式は無次元で以下のように記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ただし, u は流速, ν は拡散係数で一定である。Navier-Stokes 方程式との違いは圧力項がないことである。この方程式に領域 Ω , 初期条件 I.C., 境界条件 B.C. を

$$\{\Omega\} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2)$$

$$\{\text{I.C.}\} \quad u(x, 0) = \sin \pi x \quad (3)$$

$$\{\text{B.C.}\} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (4)$$

で与えると, 厳密解が以下のように求まる⁽⁹⁾。

$$u(x, t) = 4\pi\nu \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n I_n \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) \sin(n\pi x) \exp(-\nu n^2 \pi^2 t)}{I_0 \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) \cos(n\pi x) \exp(-\nu n^2 \pi^2 t)} \quad (5)$$

ここで, I_0, I_n は第1種変形 Bessel 関数である。この厳密解をスキームの評価に用いる。

2.2 CIP 法による時間進行 式(1)を次のように書くことにする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g \quad (6)$$

ただし,

$$g = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

である。CIP 法を用いる場合, 後述するように補間関数の中に関数値の微係数を含むため, 基礎方程式(6)だけでなく空間の一階微分式

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u \frac{\partial u_x}{\partial x} = -u_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \quad (8)$$

が必要になる。ただし, 下添え字 x は微分を表す。そして, CIP 法では式(6), (8)をそれぞれ移流フェーズと非移流フェーズに分離して解く。解法には Fractional Step 法を導入し, 移流フェーズ, 非移流フェーズをつぎの順序で解く。その結果時間進行は以下のようになる。

・移流フェーズ

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{u}_x - u_x^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u_x^n}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

・非移流フェーズ

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = \tilde{g} \quad (11)$$

$$\frac{u_x^{n+1} - \tilde{u}_x}{\Delta t} = -\tilde{u}_x \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \tilde{g}_x \quad (12)$$

ここで, 上添え字 n は時間ステップ数を表し, $\tilde{g}, \tilde{g}_x$ はそれぞれ式(11), (12)の右辺において予測子 $\tilde{u}, \tilde{u}_x$ を用いたものを表す。

2.3 移流フェーズの定式化 式(9), (10)で表される移流フェーズ(移流方程式)対しては, CIP 法を用いる。

スカラー ϕ に対する移流方程式(一般的にベクトル形で書くことにする)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \phi) = 0 \quad (13)$$

の解は微小増分時間 dt に対して

$$\phi(\mathbf{x}_i, t) \sim \phi(\mathbf{x}_i - \int \mathbf{v} dt, t - dt) \quad (14)$$

と書ける。ただし, $\mathbf{x}_i$ は節点を表し, ϕ は節点上で与えられている。すなわち, 出発点 $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_i - \int \mathbf{v} dt$ での値が次の時間ステップの節点での値になる。ここで, 移流距離 $\Delta \mathbf{x}$ は流線に沿って求められなければならないが, 厳密に求めることは困難である。ただし, 着目要素内で

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_* = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{v} dt = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^{n+1} + \mathbf{v}_*^n) \Delta t \quad (15)$$

と計算すればよい近似を与える。この概念を用いて $\mathbf{x}_*$ での値を節点の値を用いて3次スプライン関数で補間するのが CIP 法である。CIP 法は差分の分野で発展してきたため, 構造格子が前提である。本論文では CIP 法を任意形状の非構造格子に対して拡張された, 3次形状関数を用いた CIP 有限要素法を用いる⁽⁸⁾。この場合出発点は物理空間の $\mathbf{x}_*$ ではなく, 計算空間での $\mathbf{x}_{\xi}^*$ として求められる必要がある。1次元の場合の3次形状関数は式(9)に対して, 以下のように書ける。

$$\tilde{u} = \sum_a N_a(\xi) [G_a(\xi) + E_a(\xi) u_a] \quad (16)$$

$$G_a(\xi) = (\partial_{\xi} u_a - \xi_a u_a) \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1) \quad (17)$$

$$E_a(\xi) = N_a(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi_a \xi) \quad (18)$$

である。ただし, $a = 1, 2$ であり, $N_a(\xi)$ が従来の線形形状関数である。また, 関数値の空間の一階微分は式(16)を ξ に関して微分することにより, 式(10)に対して以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\xi} &= \frac{\partial N_a}{\partial \xi} [G_a(\xi) + E_a(\xi) u_a] \\ &+ N_a \left[\frac{\partial G_a}{\partial \xi} + \frac{\partial E_a}{\partial \xi} u_a \right] \end{aligned} \quad (19)$$

以上により移流フェーズを時間進行させる。ただし、一階微分値 $\tilde{u}_x$ は非移流フェーズを解く際には座標変換により、 $\tilde{u}_x$ に変換して用いる。

2.4 非移流フェーズの定式化 式(11), (12)で表される非移流フェーズに対しては Galerkin 法を用いる。流速を双一次補間で定式化すると、式(11), (12)に対してそれぞれ以下の有限要素式が導かれる。

$$\overline{M_{\alpha\beta}}u^{n+1} = \overline{M_{\alpha\beta}}\tilde{u} - \Delta t D_{\alpha\beta}\tilde{u} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_{\alpha\beta}}u_x^{n+1} &= \overline{M_{\alpha\beta}}\tilde{u}_x \\ &- \Delta t [\langle \tilde{u}_x \rangle_e A_{\alpha\beta}\tilde{u} + D_{\alpha\beta}\tilde{u}_x] \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、下添え字 α, β は要素内局所節点番号を表し、総和の規約に従う。また、 $\langle \cdot \rangle_e$ は要素平均を表す。 $\overline{M_{\alpha\beta}}$ は集中化された質量行列を意味する。質量行列 $M_{\alpha\beta}$ 、移流行列 $A_{\alpha\beta}$ 、拡散行列 $D_{\alpha\beta}$ は以下のように表される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (22)$$

$$A_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_{\alpha} \nabla N_{\beta} d\Omega \quad (23)$$

$$D_{\alpha\beta} = \nu \int_{\Omega^e} \nabla N_{\alpha} \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega \quad (24)$$

2.5 移流フェーズの検証 2.3章で述べたように移流フェーズでは CIP 法を用いるために、出発点 x_* を高精度に求めなければならない。移流距離 Δx は式(15)で求められる。ゆえに、出発点はこの Δx を用いて $x_* = x_i - \Delta x$ として決定される。しかし、式(15)は未知量 u^{n+1} を含むために何らかの方法で近似を行わなければならない。そこで、この出発点の求め方に対して以下の3ケースを検討する。

- (1) case A 矢部らが行っている方法で $\Delta x = u_i^n \Delta t$ として出発点を求め、その点の速度を補間する。
- (2) case B まず case A と同様の方法で出発点を求め、3次補間してその点の速度 u_*^n を求める。 $x_* = x_i - u_*^n \Delta t$ として、ニュートン・ラブソン法で反復する。
- (3) case C Galerkin 法で節点での予測子 u_i^* を求め、 $u_i^{n+1} = u_i^*$ として式(10)に代入する。これによって Δx を求め、その後は case B と同様にニュートン・ラブソン法で反復する。

2.6 解析結果 先にも述べたように Baggers 方程式に対して厳密解式(5)が与えられている。 $P_e = 1/\nu = 10, 100$ では解析結果に顕著な違いは見られなかったののでここでは $P_e = 100$ の時間 $t = 0.4, 1.2, 3.0$ の結果のみを図1に示すことにする。また、図2に誤差率 ε_{err} の経時変化を示す。ただし、誤差率は以下の式に従う。

$$\varepsilon_{err} = \frac{\sum_i |\Theta_{cal,i} - \Theta_{exact,i}|}{\sum_i \Theta_{exact,i}} \quad (25)$$

ここで、 Θ_i は各節点での値、下添え字 exact, cal はそれぞれ厳密解、数値解を示す。計算格子は $P_e = 100$ に対して100メッシュを用いた。また、図3に $P_e = 10^5$ 、 $t = 0.4$ における数値解と時空有限要素法による解⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を示す。計算格子は200メッシュを用いた。

2.7 1次元の検討

2.7.1 解析結果について 図1に示すように $P_e \leq 100$ の流れでは、Galerkin 法と各 CIP-FEM の結果はほとんど見られず、安定に解析できている。式(25)で示される図2の誤差率の経時変化も厳密解との比較で、1%以下である。しかし、若干ではあるが誤差に差が見られる。CIP-FEM において case A の場合、Galerkin 法に比べ精度が劣っている。CIP 法では3次補間を用いたが、式(14)に示すように基本的には特性理論に基づいた風上法であり、この場合出発点 x_* の精度がよくなければ数値粘性が大きくなると考えられる。この点に関して他の2ケースはニュートン・ラブソン法による反復計算により出発点の精度が向上し、厳密解に良好に一致する。この結果は池田らの結果にも一致する⁽¹²⁾。

図3において $P_e = 10^5$ の流れでは Galerkin 法では振動が生じる。これに比べて CIP-FEM ではいずれの case も安定に解析できていることが分かる。また、CIP-FEM による結果は時空有限要素解に良好に一致している。図3の結果と $P_e \leq 100$ の結果を併せて考えると case B, C の場合の数値解の精度が良いものと考えられる。

case B, C に関して式(15)を考えれば、Galerkin 法で節点での予測子を求めた case C の方がより厳密であるが、差が生じず、むしろ図2から case B の方が誤差が少ない。case B では(15)の右辺第1項を無視したわけであるが、次のようにも考えられる。

$$\Delta x = \int_{t^n}^{t^{n+1}} u dt = \frac{1}{2}(2u_*^n)\Delta t \quad (26)$$

つまり、移流拡散方程式の場合、流れに拡散効果があるわけであるが、拡散効果を考慮せず移流方程式で得られる予測子を節点の予測子とすることになる。CIP 法は移流方程式の厳密解の概念を用いており、拡散効果は考慮していないが、出発点を微係数を含んだ3次関数で補間しているために高精度の予測子を与えることになると思われる。また、case C において Galerkin 法で予測子を求めるわけであるが、高 Peclet 数流れで Galerkin 法に対して計算格子が粗い場合には図3の結果で分かるように、数値振動した値を予測子に用いることになり、これが妥当であるかはさらに検討が必要である。十分な計算格子を用いればこの予測子の精度

Fig. 1 Velocity Distribution for $P_e = 100$ Fig. 2 Error History of Calculation for $P_e = 100$

は向上するが、3次補間関数を用いた意義が薄れてしまう。この点から考えて、特に高Peclet数流れにおいてcase Bの移流項の取り扱いが最善の方法であるといえる。なお、Galerkin法では $P_e = 10^3$ でも振動が生じたことを付記しておく。

2.7.2 各フェーズの解析順序について 本論文では移流フェーズと非移流フェーズを解く場合に移流フェー

Fig. 3 Velocity Distribution for $P_e = 10^5$, $t = 0.4$

Fig. 4 Difference of Analysis Sequence of both phases

Fig. 5 Comparison with case B and case E

ズを先に解いた。井出らは逆に移流フェーズを後に解き、非移流フェーズを先に解いている(case D)⁽¹³⁾。これについて矢部らは初期の論文では井出らの様に解析していたが、最近移流項を先に解くことが保存性が向上すると述べている⁽¹⁴⁾。この点に関して本論文でも $P_e = 100$ の解析を行った。図4に示される誤差率を見るとよく分かるように、移流フェーズ、非移流フェーズの解析順序の方が誤差が少ない。この結果に対して詳しいことは分かっていないが、その一つに非移流フェーズの取り扱いにあると思われる。非移流フェーズの式(11)は拡散方程式であり、この式を安定に解析するためには陰的に解析するほうがよい⁽¹⁵⁾。移流フェーズを先に解くことは予測子を非移流フェーズに用いることになり、陰的に解法するのに近いことになる。これが各フェーズの解析順序によって誤差が生じる原因の一つであると思われる。今後より保存性が要求されるNavier-Stokes方程式への拡張した際にさらに検討する

必要がある。

2.7.3 一階微分式の非移流フェーズの取り扱いについて 一階微分式の非移流フェーズについては様々な離散化が考えられる。本論文では式 (28) ように要素平均を用いる等の離散化を行った。この方法以外にポテンシャルのみもしくは一階の微分量のみを変数にとる方法も考えられる。ポテンシャルのみを変数にとると、式 (28) 中に (要素数) × (節点数)³ の要素係数行列が現れ、3次元への拡張を考えた場合、計算容量が膨大になってしまうことなどが問題になる。ただし、以上のどの離散化も Navier-Stokes 方程式に拡張することを考えると一階微分方程式中に含まれる圧力の項に関して非圧縮条件を満足するように反復計算を行わなければならない、計算時間が増加する。そこで Navier-Stokes 方程式への拡張を考慮して、計算容量を増加させずにしかも精度を保つ方法を検討する⁽⁷⁾。式 (11) の等式が成り立っていることに注目し、この両辺を空間に関して一階微分した式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} \right) = \frac{\partial g^n}{\partial x} \quad (27)$$

を式 (12) に代入する。この結果一階微分式の離散化式は

$$\overline{M_{\alpha\beta} u_x^{n+1}} = \overline{M_{\alpha\beta} \tilde{u}_x} - \Delta t \left[\langle \tilde{u}_x \rangle_e A_{\alpha\beta} \tilde{u} + A_{\alpha\beta} \left(\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} \right) \right] \quad (28)$$

となる。移流フェーズを case B を用いてこの方法 (case E) と式 (9) の方法による $P_e = 100$ の解析誤差率を図 5 に示す。case B に比べ case E の方が誤差が大きいとその値は 0.6% 以下であり、解析精度は保たれているといつてよい。そこで次章で case E を用いて 2 次元移流拡散方程式で CIP-FEM の検証を行う。

3 2次元移流拡散方程式

この章では 2 次元移流拡散方程式を扱う。2 章において 1 次元で検証した結果から精度が保たれ、計算容量が少なくなる case E を離散化に用いる。

3.1 支配方程式の離散化 基礎方程式は無次元で以下のように書かれる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (29)$$

この式を CIP 方を用いて分離解法で解くためには、1次元のときと同様に (右辺) = g とおくと、空間の x, y 方向それぞれについて微分した式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_x}{\partial y} &= g_x \\ - \phi_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \phi_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) & \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_y}{\partial y} &= g_y \\ - \phi_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left(\phi_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \end{aligned} \quad (31)$$

が必要になる。ただし、

$$g_x = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) \quad (32)$$

$$g_y = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

で、下添え字はそれぞれの方向の微分を表す。式 (29), (30), (31) をそれぞれ移流フェーズと非移流フェーズに分離する。そして、2 章と同様に移流フェーズには CIP 有限要素法を用い、非移流フェーズは Galerkin 法を用いて離散化する。各フェーズは以下ようになる。

・移流フェーズ

$$\frac{\tilde{\phi} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\tilde{\phi}_x - \phi_x^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial \phi_x^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \phi_x^n}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\tilde{\phi}_y - \phi_y^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial \phi_y^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \phi_y^n}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

・非移流フェーズ

$$\frac{\phi^{n+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} = \tilde{g} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_x^{n+1} - \tilde{\phi}_x}{\Delta t} &= \tilde{g}_x \\ - \langle \tilde{\phi}_x^n \rangle_e \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \langle \tilde{\phi}_y^n \rangle_e \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) & \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_y^{n+1} - \tilde{\phi}_y}{\Delta t} &= \tilde{g}_y \\ - \langle \tilde{\phi}_x^n \rangle_e \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) - \langle \tilde{\phi}_y^n \rangle_e \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) & \end{aligned} \quad (39)$$

2次元における 4 角形要素に対する 3 次形状関数は表 1 のように表される 2 次形状関数 G_a と線形形状関数 N_a との積として式 (34) に対して以下のように表される。

$$\tilde{u} = \sum_a N_a(\xi) [G_a(\xi) + E_a(\xi) u_a] \quad (40)$$

Table 1 Shape Function G_a (Quadrangle Element)

a	$G_a = [\partial_\xi T_a - \xi_a T_a] \frac{\xi_a}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_a - \eta_a T_a] \frac{\eta_a}{2} (\eta^2 - 1)$
1	$G_1 = [\partial_\xi T_1 + T_1] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_1 + T_1] \frac{1}{2} (1 - \eta^2)$
2	$G_2 = [\partial_\xi T_2 - T_2] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_2 + T_2] \frac{1}{2} (1 - \eta^2)$
3	$G_3 = [\partial_\xi T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + [\partial_\eta T_3 - T_3] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1)$
4	$G_4 = [\partial_\xi T_4 + T_4] \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + [\partial_\eta T_4 - T_4] \frac{1}{2} (\eta^2 - 1)$

ここで、一様性の条件を満足するための形状関数 E_a は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$E_a = \frac{1}{2}(\xi_a \xi + \eta_a \eta) \quad (41)$$

この形状関数を用いて移流フェーズを解くことにより、予測子 $\tilde{\phi}$ が得られる。さらに式(10)と同様に式(35), (36) に対して $\tilde{\phi}_\xi$, $\tilde{\phi}_\eta$ は式(40)をそれぞれ ξ , η で微分することにより得られる。次に非移流フェーズを解くわけだが、得られた $\tilde{\phi}_\xi$, $\tilde{\phi}_\eta$ は座標変換により、 $\tilde{\phi}_x$, $\tilde{\phi}_y$ と変換して非移流フェーズを解く。非移流フェーズに対する離散化式は以下になる。

$$\overline{M_{\alpha\beta}}\phi^{n+1} = \overline{M_{\alpha\beta}}\tilde{\phi} - \Delta t D_{\alpha\beta}\phi^n \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_{\alpha\beta}}\phi_x^{n+1} &= \overline{M_{\alpha\beta}}\tilde{\phi}_x - \Delta t A_{\alpha\beta} \left(\frac{\phi^{n+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} \right) \\ &\quad - \Delta t \left[A_{\alpha\beta} < \tilde{\phi}_x >_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + A_{\alpha\beta} < \tilde{\phi}_y >_e \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_{\alpha\beta}}\phi_y^{n+1} &= \overline{M_{\alpha\beta}}\tilde{\phi}_y - \Delta t A_{\alpha\beta} \left(\frac{\phi^{n+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} \right) \\ &\quad + \Delta t \left[A_{\alpha\beta} < \tilde{\phi}_x >_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + A_{\alpha\beta} < \tilde{\phi}_y >_e \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、一階微分の非移流フェーズの離散化には式(33), (34)の等式を用いている。

3.2 解析モデル CIP 有限要素法の有効性を検証するために、以下の2つのモデルを用いる。モデルはともに解析領域の速度を一定としている。このため方程式は線形移流拡散方程式となる。解析はスカラーポテンシャル ϕ の変化を解析する。

- (1) 平行平板流れ 平行平板間の定常流れを考える。図6(a)のような境界条件を与え、領域内の速度は $u = 1$, $v = 0$ とする。計算領域は

$$0 \leq x \leq 1, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \quad (45)$$

である。このとき式(29)の定常厳密解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{\cos \pi y}{e^a - e^b} (e^{a+bx} - e^{b+ax}) \quad (46) \\ a &= \frac{1}{2}(P_e + \sqrt{P_e^2 + 4\pi^2}) \\ b &= \frac{1}{2}(P_e - \sqrt{P_e^2 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

ただし、 $P_e = 1/\nu$ である。

- (2) 斜め移流流れ 図6(b)のようにメッシュを斜めに横切る流れ場を考える。流れ場中のスカラーポテンシャル ϕ の移流の問題を解析することによって、検証を行う。第2種境界条件における格子点の値は法線方向の変化である。この問題は解析領域内に不連続を含みスキームの検証に最適な問題の一つであると考えられる。

この2つの解析モデルはともに速度が一定であるために、式(38), (39)の右辺第2, 3項は消去される。また、移流フェーズにおいても1次元の場合のように出発点の反復計算は行わない。そのため、移流フェーズでの取り扱い case A になる。

3.3 解析結果

3.3.1 平行平板流れ 式(47)で表される平行平板流れの厳密解は定常解であるので、解析結果は定常と判断した結果のみを示す。このとき定常判定の基準を $\phi^{n+1} - \phi^n < \epsilon = 10^{-10}$ とした。ただし、 ϵ は収束判定基準である。計算格子は 20×20 の等間隔メッシュを用いた。解析結果は $P_e = 1/\nu = 10, 100$ の流れの中心軸上のポテンシャル分布と $P_e = 100$ の式(45)で定義される領域全体の誤差率のメッシュ依存性を示す。

3.3.2 斜め移流問題 本解析において Peclet 数、流速の角度 θ を変化させても、結果に大きな違いが見られなかったため、ここでは $P_e = 10^4$, $\theta = 45^\circ$ の結果のみを示すことにする。これは池田・棚橋が示している解析⁽¹⁶⁾と同じパラメーターである。 $P_e = 10^4$ の場合、拡散効果は無視できると考えられ、移流の支配的な流れに対するスキームの安定性を検討する。

3.4 2次元問題の検討

3.4.1 平行平板間流れ 図7に中心軸上のポテンシャル分布を示す。いずれの Peclet 数に対しても厳密解と良好に一致している。ただし、 $P_e = 10$ 流れの解析結果(a)では厳密解との良好な一致が見られるが、(b)に見るように $P_e = 100$ 流れの場合には $x = 1.0$ 付近での Potential の勾配がかなり大きくなるために Regular で示される 20×20 の等間隔メッシュの解像度では厳密解からの差が見られるが、同時に示した Irregular で示される不等間隔メッシュを用いることで解消されることが分かる。図8には $P_e = 100$ 流れにおける等間隔メッシュでの式(25)で表される解析領域全体の誤差率のメッシュ依存性を示すが、 10×10 のメッシュでも1%以下であり本スキームの有効性を示していると言える。当然の結果であるが、誤差率はメッシュ数の増加に伴い減少する。解析は $P_e = 10^5$ 以上の流れでも安定に解析できたことを付記しておく。

3.4.2 斜め移流問題 図9(a)に池田・棚橋による Galerkin 法の結果を示す⁽¹⁶⁾。先に2章でも示したよう

Fig. 6 Analytical Models

Fig. 7 Potential Distribution

Fig. 8 Mesh Dependence of The Result of Analysis

Fig. 9 The Results of Skew Advection Problem

に Galerkin 法は高 Peclet 数流れでは不安定であり、しかも不連続を含む流れには適していない。CIP 法も補間関数内に含まれる微係数の連続性を要求するために不連続近辺では振動が生じるが、これは Galerkin 法がより高 Peclet 数流れでは計算不能になるのに対して、CIP 法ではこの振動が増加することなく解析は安定に

行われる。不連続の取り扱いの今後の検討は必要となるが、この結果も本スキームの有効性を示していると言える。解析は $P_e = 10^5$ 以上の流れでも安定に解析できたことを付記しておく。

4 結言

本論文では差分法で発達してきた CIP 法を有限要素法に取り入れ、高 Peclet 数流れを高精度にかつ安定に解析するための 3 次形状関数を用いた CIP 有限要素法スキームを提案した。提案したスキームを 2 次元移流拡散方程式で検証し、以下の結論を得た。

- (1) 複雑形状に対応できる有限要素法を用いて高精度にかつ安定に流れ場を解析するために、節点で関数値とその微分値が連続な 3 次補関の形状関数を用いた CIP 有限要素法スキームを提案した。
- (2) 提案したスキームを用いて Bergers 方程式によって検証した結果、厳密解との良好な一致を示し、さらに Galekin 法では不安定であった Peclet 数 $P_e = 10^5$ 流れに対しても同じ計算条件下で安定に解析できた。この際、流体粒子の出発点を Newton-Raphson 法を用いて反復することでより高精度に解析できる。また、分離解法において移流フェーズを非移流フェーズより先に解くことで解析誤差を小さくできることが分かった。
- (3) 一階微分式の非移流フェーズの解析において、空間微分項を式 (27) の関係式を用いて置き換えても解析誤差は増大せず、これにより Navier-Stokes 方程式への拡張の際に、一回微分式の Poisson 方程式を反復計算することなく高速に計算できるようになる。
- (4) 提案したスキームを 2 次元移流拡散方程式に適用した結果、平行平板流れでは厳密解との良好な一致を示した。また、斜め移流問題でも不連続近辺で振動が見られたものの、 $P_e = 10^4$ という高 Peclet 数流れに対しても振動が増加することなく安定に解析できることを確認した。ただし、今後不連続の取り扱いに検討が必要である。

参考文献

- (1) 中井・棚橋, 機論, 63-605, B(1997), 201.
- (2) 藤枝・他 3 名, 機論, 63-608, B(1997), 1184.
- (3) Kakuda, K. and Tosaka, N., Theor. and Appl. Mech., 41(1992), 223.
- (4) Brooks, A. and Hughes, T. J. R., Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 32, (1982), 199.
- (5) Chen, C. J., Handbook of Numerical Heat Transfer Chap.17, (1987), John-Wiley.
- (6) Tanahashi, T. and Oki, Y., JSME Int. Jour., Series B, 39-1, (1996), 28.
- (7) Yabe, T. et al, Comput. Phys. Commun., 66, (1991), 219.
- (8) 榎原・棚橋・松本, 機論, 63-609, B(1997), 1612.
- (9) 登坂・大西, 偏微分方程式の数値シミュレーション, 第 5 章, (1993), 東京大学出版会, 154.
- (10) Varoğlu, E. and Finn, W. D. L., Int. J. Nume. Mech. Engrg., 16, (1980), 220.
- (11) Nguyen, H. and Reynen, J., In Numerical Method for Non-Linear Problems Vol. 2, (1984), Pineridge Press, 718.
- (12) 池田・塩田, 第 9 回計算力学講演会講演論文集, (1996), 279.
- (13) 井手・登坂, 機論, 62-597, B(1996), 1679.
- (14) 矢部, 青木, 計算工学, 1-1, (1996), 19.
- (15) 棚橋, はじめての CFD - 移流拡散方程式 -, 第 5 章, (1996), 220.
- (16) 池田・棚橋, 機論, 60-578, B(1994), 3311.