非定常三次元遷音速ガスタービン翼列流れの数値解析*

山 本 悟^{*1}, 白 石 隆^{*2}Computation of Unsteady 3-D Transonic Flow through
Gas Turbine Cascade Channel

Satoru YAMAMOTO and Takashi SHIRAISHI

Unsteady three-dimensional transonic viscous flows through a gas turbine cascade channel are numerically investigated using the higher-resolution shock-vortex capturing method proposed by the authors. The higher-resolution both in space discretization and time integration enables us to obtain real flow characteristics in the 3-D gas turbine cascade. As numerical results, calculated unsteady 3-D vortical structures in the wake and at the corner are shown, and obtained unsteady flow patterns near the blade under on- and off-design conditions are compared with each other.

Key Words: Turbomachinery, CFD, Unsteady Flow, Transonic Flow, FDM

1. 緒 言

ガスタービン翼列流れの研究は、実験や数値解析によりこれまでに数多く行われてきた。特に亜音速翼列流れに関しては、非定常三次元流れの詳細が実験⁽¹⁾⁽²⁾や数値解析⁽³⁾⁽⁴⁾により明らかにされている。一方、今後高性能なガスタービン開発のうえで重要視されるべき遷音速翼列の三次元流れに関しては、既存のほとんどの研究では、いまだ時間平均化された実験データもしくは定常解を得ているのが現状のようである。本来翼列流れは、非定常でかつ三次元的であるといえる。特に遷音速流れでは、衝撃波が発生し境界層と干渉して極めて複雑な非定常流れになることが予想される。これらの研究がいまだ進展していない理由としては、まず実験による非定常三次元流れの計測には高度な技術と膨大な費用が必要であること、一方数値解析においては、衝撃波や渦を伴う非定常流の数値解法がいまだ開発途上であることなどが考えられる。非定常を仮定した三次元遷音速翼列流れの数値解析もすでに試み

られてはいるが、衝撃波と境界層との干渉による後流渦や翼コーナ渦の非定常性がまったく再現されていない⁽⁵⁾。この原因は比較的明らかであり、用いている数値解法の解像度がそれらの流れ現象を捕獲するのには不十分だからである。上記の非定常流現象は、定性的には実験によりその存在が報告されている⁽⁶⁾。したがって、これら現象を再現できるような数値解法の開発が必要である。

著者らは、遷音速翼列流れの非定常性に着目して、上記非定常流現象を捕獲する目的で高解像差分スキームを開発した^{(7)~(9)}。これは、空間方向最大四次精度、時間方向最大二次精度を有した特性の理論に基づいたTVD条件を満足する差分スキームである。すでに行っている数値解析から、衝撃波のみならず接触不連続面や渦の捕獲に優れていることが示された⁽¹⁰⁾。また、非定常二次元遷音速翼列流れの数値解析では、衝撃波と境界層の干渉による翼後縁からの周期的な渦放出や衝撃波の振動が鮮明に捕獲されている⁽¹¹⁾。

本研究の目的は、上記の高解像差分スキームをガスタービン翼列を通る非定常三次元遷音速流れに適用し、実験で報告されている翼後縁から発生する非定常後流渦を数値解析により捕獲することであり、重ねてその三次元渦構造を考察することである。さらに設

* 原稿受付 1997 年 5 月 6 日。

^{*1} 正員, 東北大学大学院工学研究科(☎ 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 01)。^{*2} 東北大学大学院。

計・非設計状態における翼コーナ渦の時間依存性についても考察する。

おもな記号

- c : 音速
 d : 固定壁からの距離
 e : 単位体積当たりの全内部エネルギー
 g_{ij} : 測度
 I : 単位行列
 J : 変換のヤコビアン
 K : 熱伝導率
 P : 乱流運動エネルギー生成
 p : 静圧
 Re : レイノルズ数
 T : 静温度
 u_i : 物理速度成分
 U_i : 反変速度成分
 Δt : 時間間隔
 k : 乱流運動エネルギー
 γ : 比熱比
 ε : k の散逸率
 μ, μ_t : 分子, 渦粘性係数
 ξ_i : 曲線座標成分
 ρ : 密度
 τ_{ij} : 粘性応力テンソル

2. 基礎方程式

非定常三次元遷音速粘性流れの基礎方程式として、一般曲線座標系の三次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式ならびに乱流を考慮するため低レイノルズ数型二方程式 k - ε モデルを連立して解く。これらの方程式はベクトル形で次のように記述される。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \hat{F}_i(\hat{Q}) = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{Re} \hat{S} + \hat{H} = 0 \quad (1)$$

ただし、

$$\hat{Q} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{bmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \partial \xi_i / \partial x_1 p \\ \rho u_2 U_i + \partial \xi_i / \partial x_2 p \\ \rho u_3 U_i + \partial \xi_i / \partial x_3 p \\ (e+p) U_i \\ \rho k U_i \\ \rho \varepsilon U_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = -J \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{kj} u_k + K \partial T / \partial x_j \\ \sigma_{kj} \\ \sigma_{\varepsilon j} \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = -J \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_k \\ f_\varepsilon \end{bmatrix}$$

J は変換のヤコビアン, U_i は反変速度成分, τ_{ij} は粘性応力で次のように定義する。

$$J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (2)$$

$$U_i = (\partial \xi_i / \partial x_j) u_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k Re \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4)$$

圧力 p は、理想気体の状態方程式により定義される。

$$p = \rho RT = (\gamma - 1) [e - \rho u^2 / 2] \quad (5)$$

また、乱流モデルの k および ε 方程式における拡散項 σ_{kj} , $\sigma_{\varepsilon j}$ とソース項の f_k , f_ε はそれぞれ

$$\sigma_{kj} = (\mu + \mu_t / C_k) \partial k / \partial \xi_j \quad (6)$$

$$\sigma_{\varepsilon j} = (\mu + \mu_t / C_\varepsilon) \partial \varepsilon / \partial \xi_j \quad (7)$$

$$f_k = (P - \rho \varepsilon Re - 2 \mu k / d^2) / Re \quad (8)$$

$$f_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon} (C_1 f_1 P - C_2 f_2 \rho \varepsilon Re - 2 C_3 \mu k / d^2) / Re \quad (9)$$

ここで、渦粘性係数 μ_t は

$$\mu_t = Re \cdot C_\mu f_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (10)$$

C_k , C_ε , C_1 , C_2 , C_3 , C_μ は経験定数で、本論文では Chien の低レイノルズ数型 k - ε 方程式を用いる。乱流モデルの詳細については文献(12)に報告している。

3. 数値解法

本研究で用いる高解像差分スキームを簡単に説明すれば次のようになる。

3・1 四次精度コンパクト MUSCL TVD(FCMT) スキーム 数値流束を構成する初期変数の高次補間に、著者らが提案した FCMT スキームを用いる。詳細については文献(7)にすでに報告しているのでここでは省略する。FCMT スキームの最大の利点は、ま

ずその簡単さにあり、MUSCL⁽¹³⁾をベースにした既存のCFDコードがあれば、本スキームの高次の項のみからなるたかだか数行のサブルーチンを組み込めばよい。ENOスキーム⁽¹⁴⁾などの既存の差分スキームに比べ、格段に簡単なアルゴリズムであり、空間精度は従来のたかだか二次精度のTVDスキーム⁽¹⁵⁾より高次である。

3・2 流束差分離法 対流項の離散化に、Roeの近似リーマン解法⁽¹⁶⁾に基づく流束差分離法を用いる。本論文では、Roe平均の計算アルゴリズムを考慮した独自のサブベクトルを導出して数値流束を計算する。 ξ_i 座標方向の $l+1/2$ 点における数値流束 $(\hat{F}_i)_{l+1/2}$ は、

$$(\hat{F}_i)_{l+1/2} = \frac{1}{2} [\hat{F}_i(\hat{Q}_{l+1/2}^L) + \hat{F}_i(\hat{Q}_{l+1/2}^R)] - |(\hat{A}_i)_{l+1/2}| (\hat{Q}_{l+1/2}^R - \hat{Q}_{l+1/2}^L) \cdots \cdots (11)$$

ここで、 Q^L , Q^R は、それぞれFCMTスキームにより上流を考慮して高次補間された未知変数ベクトルを意味する。 $(\hat{A}_i)_{l+1/2}$ は、次式で計算される。

$$|(\hat{A}_i)|_{l+1/2} \hat{Q}^{L(R)} = |\bar{\lambda}_{ii}| \bar{Q}^{L(R)} + \frac{|\bar{\lambda}_{ia}|}{c \sqrt{g_{ii}}} \bar{Q}_{ia} + \frac{|\bar{\lambda}_{ib}|}{c^2} \bar{Q}_{ib} \cdots \cdots (12)$$

ただし、

$$\lambda_{i1} = U_i, \lambda_{i4} = U_i + c \sqrt{g_{ii}}, \lambda_{i5} = U_i - c \sqrt{g_{ii}}$$

$$|\lambda_{ia}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| - |\lambda_{i5}|)$$

$$|\lambda_{ib}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| + |\lambda_{i5}|) - |\lambda_{i1}|$$

$$\bar{Q}_{ia} = \bar{p} \bar{Q}_{ic} + \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_d, \bar{Q}_{ib} = \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_{ic} + \bar{p} \bar{Q}_d$$

$$\bar{p} = \bar{Q}_p \cdot \bar{Q}^M, \Delta \bar{m}_i = \bar{Q}_{im} \cdot \bar{Q}^M$$

$$Q_{ic} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ \partial \xi_i / \partial x_3 \\ U_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_d = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ (e+p)/\rho \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$Q_p = (\gamma - 1) \begin{bmatrix} u_i u_j / 2 \\ -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_{im} = \begin{bmatrix} -U_i \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ \partial \xi_i / \partial x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここでオーバーラインはRoe平均を意味する。

3・3 陰的近似因子化法 本研究では、陰的時間

進行法に基づく時間積分スキームを用いる。近似因子化、対角化、ならびに上流化が施されて導出された定常計算のための対角化近似因子化法を、さらにニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み込むことで、時間最大二次精度に拡張する。ただし、ここで用いられる非保存形の固有ベクトルからなる行列と非保存形への変換行列は、反変速度を未知変数にもつ基礎方程式に基づくものである。基礎方程式(1)は、変換の行列 B により反変速度を未知変数にもつ基礎方程式に変換される⁽¹⁷⁾。すなわち

$$B[\partial \tilde{Q} / \partial t + \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{Q})] = \partial \tilde{Q} / \partial t + \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{Q}) \cdots \cdots (13)$$

最終的に、時間方向最大二次精度の陰的対角化近似因子化法を式(13)に適用すると、

$$\begin{aligned} & \{\tilde{S}_1^{-1} [I + \Delta t (\Lambda_1^* \nabla_1 + \Lambda_1^- \Delta_1)] \\ & \times \tilde{M}_1^{-1} [I + \Delta t (\Lambda_2^* \nabla_2 + \Lambda_2^- \Delta_2)] \\ & \times \tilde{M}_2^{-1} [I + \Delta t (\Lambda_3^* \nabla_3 + \Lambda_3^- \Delta_3)] \tilde{S}_3\}^m \Delta \tilde{Q}^m \\ & = RHS^m \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{Q}^m &= \tilde{Q}^{m+1} - \tilde{Q}^m \\ RHS^m &= -(\tilde{Q}^m - \tilde{Q}^n) - \Delta t B \{ \tilde{\mathcal{F}}^*(\tilde{Q}^m) \\ & \quad + \tilde{\mathcal{F}}^*(\tilde{Q}^n) \} / 2 \end{aligned}$$

Λ_i^* は $\lambda_{ij}^* = (\lambda_{ij} \pm |\lambda_{ij}|) / 2$ からなる対角行列、 $\tilde{S}_i$ は、固有ベクトルからなる行列、 $\tilde{M}_1 = \tilde{S}_2 \tilde{S}_1^{-1}$, $\tilde{M}_2 = \tilde{S}_3 \tilde{S}_2^{-1}$, ∇_i , Δ_i は後退または前進差分演算子、 n は時間ステップそして m はニュートン反復回数である。*は高解像差分スキームで計算することを意味する。

4. 数値計算例

文献(6)のガスタービン翼列翼形状を基にした線形静翼列の三次元非定常遷音速流れを、入口流入角を変化させて数値解析した。計算条件は、入口全温290 K、入口全圧 0.964×10^5 Pa、出口等エントロピーマッハ数0.99、レイノルズ数 8.5×10^5 、翼ピッチ0.71、翼アスペクト比0.5とし、入口流入角は 30° (設計状態)、 -30° , 60° (非設計状態)を選択した。この場合、非設計状態は必ずしも実際の条件を想定したものではなく、本数値解法の頑丈さを示すとともに翼正圧面ならびに負圧面にはく離が起きると予想される入口流入角を設定している。図1に計算格子の概略図を示す。格子点数は $\xi\eta\zeta$ 方向それぞれ $181 \times 61 \times 41$ 。初期値は一樣流を与え、入口には乱流境界層を仮定して $1/7$ 乗則に基づく速度分布を与える。最初の1000反復は、ニュートン反復なしで計算し、その後はニュートン反復を3回行って非定常計算した。

まず、入口流入角 30° の設計状態における計算結果について説明する。図2に計算により得られた瞬間等

Fig. 1 Computational grid

Fig. 2 Instantaneous Mach number contours (3D)

Fig. 3 Instantaneous Mach number contours (2D)

マッハ数分布を示す。また、図3には二次元の場合の計算結果を示す。両者いずれも、翼後縁で発生している垂直衝撃波が鮮明に捕獲されている。さらに、翼後縁からの後流渦も、その発生の周期と後流の幅についてほとんど同様の結果が得られた。

図4には、50%スパンにおける異なった時間における翼表面瞬間等エントロピーマッハ数分布(3D

Fig. 4 Isentropic Mach number distributions

Instantaneous 1, 2)を、二次元定常計算(2D Steady)、三次元定常計算(3D Steady)ならびに実験結果と比較する。本計算結果は、衝撃波が発生している翼負圧面後縁付近を除いてはいずれも他の結果とよく一致しており実験条件をよく再現していることがわかる。

図5(a), (b)は、翼後流域の計算格子に沿った流路断面での異なった時間における瞬間速度ベクトル分布を示す。ただし、それぞれ、50%スパンにおける速度ベクトル変動の位相が 180° 異なる場合($\theta = \theta_0, \theta_0 + \pi$)を示した。この断面では、翼後流渦に伴う速度ベクトルの方向が周期的に変動していることがわかった。さらに、Endwall付近においても異なった速度ベクトル分布が示されており、コーナー渦と後流渦が干渉していることが示唆される。

図6には、翼後流渦の三次元構造を考察するために、後流渦の渦糸構造を瞬間等渦度分布を表示することにより可視化した。翼列翼後縁から下流方向に、交互に渦糸構造をもった渦が放出されて渦列を形成しているが、スパン方向に湾曲した分布をもっているのが示されており、Endwallの境界層を除き、渦糸の中心位置はEndwall方向ほど下流に位置している。これは翼後流渦が対流速度の速い翼コーナー渦と干渉しているためであると考えられる。

次に、翼コーナー渦の非定常性を調べるために異なった時間での翼負圧面と正圧面における瞬間限界流線を図7, 8に示す。これらには翼負圧面においてコーナー渦が発生している様子が示されているが、計算結果には本設計状態における翼負圧面と正圧面での時間による変化はほとんど示されなかった。

次に非設計状態における翼コーナー渦の非定常性について検討した。紙面の都合上、瞬間限界流線のみを示す。図9, 10に入口流入角 -30° における翼負圧面

Fig. 5 Instantaneous velocity vectors

Fig. 6 Instantaneous vorticity contours

(a) $t = t_0$ (b) $t = t_0 + \Delta t$

Fig. 7 Instantaneous limiting streamline (suction side)

(a) $t = t_0$ (b) $t = t_0 + \Delta t$

Fig. 8 Instantaneous limiting streamline (pressure side)

と正圧面での瞬間限界流線、図 11, 12 に入口流入角 60° における同様の分布を示す。まず、前者の条件では翼圧力面で大規模なはく離が生じることを二次元計算⁽¹⁸⁾ ならびに本計算で確認しているが、図 10 の正圧面にはそのはく離の影響を見いだすことができる。翼面前半付近に大規模渦の再付着点があり、付着後は翼面中央へ流れが集まっている様子が示されている。一方、入口流入角 60° の場合は、翼負圧面の翼コーナー渦が時間に依存している様子が翼前縁コーナー付近の変動により示されている。これは大きな流入角を設定したことにより翼負圧面前縁近傍で流れがはく離していることが原因であると考えられる。

ところで、これら非定常計算結果と定常計算結果を比較するために、入口流入角 -30° における翼正圧面ならびに入口流入角 60° における翼負圧面での限界流線をそれぞれ図 13(a), (b) に示す。これらを非定常計算の結果と比較すれば、特に図 13(a) の分布は図 10 のものとはまったく異なった分布を示しており、入口流入角が -30° のような翼圧力面側に大きなはく離を伴うような場合においては、定常計算の信頼性にかなり問題があることが示唆される。しかしながら、実験結果と比較しているわけではないので、今後のさら

(a) $t=t_1$ (b) $t=t_1+\Delta t$
Fig. 9 Instantaneous limiting streamline
(suction side, -30°)

(a) $t=t_2$ (b) $t=t_2+\Delta t$
Fig. 12 Instantaneous limiting streamline
(pressure side, 60°)

(a) $t=t_1$ (b) $t=t_1+\Delta t$
Fig. 10 Instantaneous limiting streamline
(pressure side, -30°)

(a) (b)
Fig. 13 Limiting streamline (steady state solution)

(a) $t=t_2$ (b) $t=t_2+\Delta t$
Fig. 11 Instantaneous limiting streamline
(suction side, 60°)

なる検討は必要である。

5. 結 言

高解像差分スキームを用いてガスタービン翼列を通る非定常三次元遷音速流れを計算した。まとめると以下になる。

(1) 実験により知られている、翼後縁付近に発生した衝撃波と境界層が干渉することにより後流渦が周

期的に発生する点、ならびに非定常性の強い大規模渦や翼コーナー渦が翼面付近に発生する点が、本数値解析においても再現された。

(2) さらに、翼後流域では翼後流渦と翼コーナー渦とが干渉して、翼後流渦自体が複雑な三次元的構造に変化しているという計算結果が得られた。

(2)については実験においてもいまだよく知られていないものであるが、ガスタービン翼列の高性能化に伴う翼冷却法⁽¹⁹⁾とも関連して、今後その詳細な解明の必要性が示唆される。

文 献

- (1) Heinemann, H. J., ほか 2 名, *Proceeding IUTAM Symposium Trans-sonic*, II (1976), 75, Springer-Verlag.
- (2) Yamamoto, A., *Trans. ASME, J. Turbomach.*, **109** (1987), 186-193.
- (3) Rai, M. M., *AIAA Paper*, 87-2058, (1987).
- (4) Hah, C., *AIAA Paper*, 92-3211(1992).
- (5) Dawes, W. N., *ASME Paper*, 90-GT-18(1990).
- (6) Kiock, R., ほか, *Trans. ASME, J. Eng. Gas Turbine Power*, **108**(1986), 277-285.
- (7) Yamamoto, S. and Daiguji, H., *Comput. Fluids*, **22** (1993), 259-270.
- (8) Yamamoto, S. and Daiguji, H., *AIAA Paper*, 92-

- 3044(1992).
- (9) Yuan, X., ほか2名, *AIAA Paper*, 94-3199(1994).
- (10) Yamamoto, S., ほか2名, H., *AIAA Paper*, 94-2305(1994).
- (11) Tanuma, T., ほか3名, *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*, (1995), 691-707, Elsevier Science.
- (12) Yamamoto, S. and Daiguji, H., *JSME Int.*, **37**-3(1994), 522-530.
- (13) Anderson, W. K., ほか2名, *AIAA J.*, **24**-9(1986), 1453.
- (14) Harten, A., *J. Comput. Phys.*, **83**(1989), 148-184.
- (15) Yee, H. C., *J. Comput. Phys.*, **68**(1987), 151-179.
- (16) Roe, P. L., *J. Comput. Phys.*, **43**(1981), 357-372.
- (17) 山本悟・ほか2名, *機論*, **56**-523, B(1990), 765-772.
- (18) Yamamoto, S., ほか2名, *Proc. 1995 Yokohama Int. Gas. Turbine Congr.*, **I**(1995), 27-34.
- (19) Friedrichs, S., ほか2名, *Trans. ASME, J. Turbomach.*, **119**(1997), 786-793.
-