球殻クエット流の3次元安定性*
(第1報, 数値計算法とその精度)荒木圭典^{*1}, 神谷茂保^{*1}
水島二郎^{*2}, 柳瀬眞一郎^{*3}Stability of the Spherical Couette Flow
(1st Report, A Detailed Review of the Numerical Method)Keisuke ARAKI, Shigeyasu KAMIYA,
Jiro MIZUSHIMA and Shinichiro YANASE

Linear stability of the spherical Couette flow is numerically investigated when the aspect ratio $\beta=0.5$. The present report gives a detailed review of the numerical method to calculate the unperturbed flow and to solve the eigenvalue problem for the perturbation flow associated with the linear stability problem. Collocation method together with the Newton-Raphson method and the double QR method is adopted. In the course of convergence check, it is found that insufficient spatial resolution causes a serious underestimation of the marginal Reynolds number.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Stability, Spectral Methods, Spherical Couette Flow

1. はじめに

二球間の流れ(球殻 Couette 流)は, 軸受等の機構において曲線的(非円筒形)な部分があるような場合に対する基礎的な研究対象として従来より取り組まれてきた. 特に中林らの一連の優れた研究は, 球殻 Couette 流のトルク特性⁽¹⁾といった基本的性質や, 流れの種類や遷移の多様性⁽²⁾を, 主に実験的方法によって次々と明らかにしていった.

球殻 Couette 流は Reynolds 数が低い場合, すきま比 β の値によらず流れは軸対称かつ南北対称であり, 赤道面を境にする循環流が南北両半球に一つずつ形成されることが, 実験的に知られている⁽³⁾. ここではこの流れを文献⁽⁴⁾に従って, 0-渦流と呼ぶことにする. Reynolds 数を大きくしていくと, 0-渦流は不安定になり, 2次流れが発達する. この2次流れは, 球殻が厚い場合($\beta > 0.24$)には非軸対称ならせん状 Taylor-Görtler 渦(TG 渦)となり, 球殻が薄い場合($\beta < 0.24$)には赤道近辺に局在する軸対称 TG 渦の形を取る⁽⁵⁾.

軸対称 0-渦流, 軸対称 TG 渦への遷移⁽⁴⁾, 解の分岐の詳細な機構⁽⁶⁾は, 近年, 理論的によく調べられているが, 0-渦流かららせん状 TG 渦への遷移の過程に関する理論的な研究⁽⁷⁾では, これまでに実験の結果⁽⁵⁾を十分に説明できる成果を得たものが無かった. 最近, 著者らは $\beta = 0.5$ の 0-渦流の3次元攪乱に対する線形安定性計算を行い, 実験結果⁽³⁾を良く説明する結果を得た⁽⁸⁾.

この理論的, 数値的な解析の困難さの主な原因は, まず 0-渦流が解析的に表現できないこと, 球座標系における演算子の形の複雑さ, 数値計算の精度の保証のための計算量の膨大さにあると思われる. しかし数値計算の手順を示し, 精度の検討を詳細に行った研究は, 筆者らの知る範囲内では見当たらないようである. したがってこれらについて報告することは, 先行する研究の不十分な点や, また不安定性の発生機構を明らかにするための基礎的な知見として重要であると考え.

本報告で紹介する手法は一般的であるので, すきま比 β の値によらず適用可能である. これまで薄い球殻の場合には理論的には軸対称解の間の遷移の研究⁽⁴⁾⁽⁶⁾のみが行われてきたが, 本手法により3次元攪乱による遷移を調べることが可能となる. ただし本報告では, 主流の形が比較的単純であり, かつ実験による測定結果⁽³⁾との比較が可能なすきま比 $\beta = 0.5$ の場合の安定性計算を行う.

本報告で紹介する手法は一般的であるので, すきま比 β の値によらず適用可能である. これまで薄い球殻の場合には理論的には軸対称解の間の遷移の研究⁽⁴⁾⁽⁶⁾のみが行われてきたが, 本手法により3次元攪乱による遷移を調べることが可能となる. ただし本報告では, 主流の形が比較的単純であり, かつ実験による測定結果⁽³⁾との比較が可能なすきま比 $\beta = 0.5$ の場合の安定性計算を行う.

* 原稿受付 1997年10月1日.

^{*1} 正員, 岡山理科大学工学部(☎700-0005 岡山市理大町1-1).^{*2} 正員, 同志社大学工学部(☎610-0321 京田辺市多々羅都谷1-3).^{*3} 正員, 岡山大学工学部(☎700-8530 岡山市津島中3-1-1).

流れの線型安定性問題の計算には、行列の固有値計算を用いて数値的に求める方法、攪乱の方程式を初期値問題として解く方法など、いくつかの方法があるが、本研究では固有値計算を用いる方法を採用した。

主な記号等

a	: 攪乱の東西の波数
$d (= R_2 - R_1)$	: すきま幅
(r, ϑ, φ)	: 球座標系の変数
R_1, R_2	: 内球および外球の半径
$Re (= \Omega R_1^2 / \nu)$	: Reynolds 数
$\beta (= d / R_1)$	: すきま比
ν	: 流体の動粘度
Ω	: 内球の回転角速度
	: (外球は静止しているものとする)
赤道, 赤道面	: 回転軸に垂直で径が最大となる面
北極(南極)	: 回転軸 ($\vartheta=0$) の部分
0-渦流	: 低 Reynolds 数領域で実験的に観察される唯一の解

2. 基礎方程式と境界条件

本研究では座標 $\mathbf{r}$, 時間 t , 流体の速度 $\mathbf{u}$, 流体の圧力 p を、動粘度 ν , 球間隙の厚み d および流体の密度 ρ を用いて、無次元化する:

$$\mathbf{r} = d\mathbf{r}^*, \quad t = \left(\frac{d^2}{\nu}\right)t^*, \quad \mathbf{u} = \left(\frac{\nu}{d}\right)\mathbf{u}^*, \quad p = \left(\frac{\rho\nu^2}{d^2}\right)p^*. \quad (1)$$

これ以降、とくに断りの無い限り諸量は無次元化されたものを用いることとし、簡単のためアスタリスクを省くことにする。

この様にして無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

となる。ここで H は Bernoulli 関数

$$H = p + \frac{1}{2}u^2 \quad (4)$$

である。また流体の満たすべき境界条件は

$$\text{内球上で } \mathbf{u} = \Omega R_1 \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi, \quad \text{外球上で } \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

である、ここで $\mathbf{e}_\varphi$ は球座標における φ -方向の単位ベクトルである。

ここで注意すべき点は、Reynolds 数を主流の代表速度ではなく、境界面の速度で定義し、かつ無次元化を式(1)

に従って行っているため、運動方程式の中に Reynolds 数が陽には現れないことである。Reynolds 数は境界条件(5)の中に陰に含まれることになる。

本研究では、時間的に定常かつ軸対称 ($\partial/\partial t \equiv 0, \partial/\partial \varphi \equiv 0$) な主流 $\mathbf{U}$ を求め、主流 $\mathbf{U}$ の攪乱 $\mathbf{u}$ に対する線形安定性を、方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla h + \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \Delta \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

および境界条件

$$\text{内, 外球上で } \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

に基づいて調べる。座標系は球座標 (r, ϑ, φ) を用いる。

3. 非圧縮速度場の方程式の構成

本研究においては、非圧縮性流体の速度場を流れ関数を用いて表現し、Navier-Stokes 方程式を流れ関数を用いて書き下す。この方法の利点は、計算すべき変数の数が減ること、圧力 (Bernoulli 関数) を方程式から消去することができる点にある。

まず、定常かつ軸対称な主流 $\mathbf{U}(r, \vartheta)$ を、非圧縮の条件(3)および境界条件(5)を満たすように、次のように表現する

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, \vartheta) = & \frac{\Omega R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{R_2^3}{r^2} - r \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ & + \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right) + \frac{\omega(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{境界において } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega = 0. \quad (10)$$

式(9)において、第1項は境界条件(5)を満たす調和関数 ($\nabla \cdot \mathbf{U} \equiv 0, \nabla \times \mathbf{U} \equiv 0$ の解) であり、第2, 3項が流れ関数による $\nabla \times \mathbf{U} \neq 0$ の部分の表現である。このような非圧縮のベクトル場の分解は一意に決まることが知られている⁽⁹⁾。

この分解に基づいて Navier-Stokes 方程式(2)を変形する。式(9)を方程式(2)に代入し、両辺に $r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$, $r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \times$ を演算すると、 H は消去されて ω, ψ に関する閉じた式

$$0 = \tilde{\nabla}^2 \omega + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})), \quad (11)$$

$$0 = \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \psi + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})) \quad (12)$$

を得る、ただし

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\tilde{L}_2}{r^2}, \quad (13)$$

$$\tilde{L}_2 = -\frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (14)$$

である。ここで非線型項の具体的な表現は

$$r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})) \\ = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \omega_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \right), \quad (15)$$

および

$$r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})) \\ = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\nabla}^2 \psi_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial \tilde{\nabla}^2 \psi_0}{\partial r} \right) \\ + \frac{2 \tilde{\nabla}^2 \psi_0}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ + \frac{2 \omega_0}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_0}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right), \quad (16)$$

ただし

$$\psi_0 = \psi(r, \vartheta), \quad (17)$$

$$\omega_0 = \omega(r, \vartheta) + \frac{\Omega R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{R_2^3}{r} - r^2 \right) \sin^2 \vartheta \quad (18)$$

である。

つぎに、攪乱方程式を求める。攪乱の時間発展は $\exp(\lambda t)$ (ただし λ は複素数) に従うものとする。

まず、攪乱が軸対称な場合には、攪乱速度場 $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, t) = e^{\lambda t} \left[\nabla \times \left(\frac{\psi_1(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right) + \frac{\omega_1(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right] \quad (19)$$

$$\text{境界条件は } \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \omega_1 = 0 \quad (20)$$

とおくことができる。攪乱場 ω_1, ψ_1 の従う方程式は

$$\lambda \omega_1 = \tilde{\nabla}^2 \omega_1 + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \\ + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U})), \quad (21)$$

$$\lambda \tilde{\nabla}^2 \psi_1 = \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \psi_1 + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \\ + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U})) \quad (22)$$

となる。

次に攪乱が非軸対称な場合について述べる。非圧縮な場の一般的な表現はトロイダル・ポロイダル場

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi) = \nabla \times (\hat{T}(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r) \\ + \nabla \times (\nabla \times (\hat{S}(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r)) \quad (23)$$

で与えられることが知られている⁽¹⁰⁾。主流が軸対称なので、東西 (φ -) 方向には波数 a (a は整数) のモードで Fourier 展開された形の攪乱

$$\hat{T}(r, \vartheta, \varphi, t) = \exp(\lambda t) T(r, \vartheta) \exp(ia\varphi), \\ \hat{S}(r, \vartheta, \varphi, t) = \exp(\lambda t) S(r, \vartheta) \exp(ia\varphi) \quad (24)$$

を考えればよい。線形安定性の計算では、この波数 a をパラメーターの一つとして変化させて、臨界 Reynolds 数を求めることになる。

式(23), (24) を式(6)に代入し、両辺に $r\mathbf{r} \cdot \nabla \times$, $r\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を演算して h を消去すると、流れ関数 T, S を支配する式は

$$\lambda L_2 T = \nabla^2 L_2 T + r\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \\ + r\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U})), \quad (25)$$

$$\lambda \nabla^2 L_2 S = \nabla^2 \nabla^2 L_2 S \\ + r\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \\ + r\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U})) \quad (26)$$

となる、ここで

$$L_2 = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (27)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{L_2}{r^2} \quad (28)$$

である。この式に主流が現れる項 $r\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U}))$ および $r\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{U}))$ は、流れ関数 S, T に対する微分演算子を含み、全体で 116 項にも及ぶ膨大な数の項を持つ。紙面の制約上この演算子の詳細は記述しないが、次のような形式にまとめられる：

$$\lambda L_2 T = \nabla^2 L_2 T + L_{TT}^{(R)}(\psi_0) T + L_{TT}^{(I)}(\omega_0) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ + L_{TS}^{(R)}(\omega_0) S + L_{TS}^{(I)}(\psi_0) \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad (29)$$

$$\lambda \nabla^2 L_2 S = \nabla^2 \nabla^2 L_2 S + L_{ST}^{(R)}(\omega_0) T + L_{ST}^{(I)}(\psi_0) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ + L_{SS}^{(R)}(\psi_0) S + L_{SS}^{(I)}(\omega_0) \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad (30)$$

ここで $L_{ij}^{(k)}(F)G$ は関数 $F(r, \vartheta)$ とその導関数を含む $G(r, \vartheta, \varphi)$ に関して線型な微分演算子であり、 φ に関しては偶数回の偏微分演算を行う。(したがって例えば $L_{TT}^{(I)} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$ は φ に関する奇数回の偏導関数のみを含む。) この演算子を FORTRAN77 を用いてコーディングする際に、数式処理システム Mathematica を用いた⁽¹¹⁾。

4. 関数展開と対称性に対する考察

この節および次節では、前節において求めた主流、および攪乱の方程式をスペクトル法を用いて計算する方法について詳述する。

本研究における系の形状は、回転軸に関する回転対称性と、南北の反転に対する対称性が含まれている。したがって速度場 $\mathbf{U}, \mathbf{u}$ を表現する関数を、南北反転に対して対称

な関数と反対称な関数とに分離することは、計算機の記憶容量、および計算時間の節約との関連で重要である。

一般の速度場 $\mathbf{u}$ に対して、南北反転に対して対称な成分 $\mathbf{u}_S$ 、および反対称な成分 $\mathbf{u}_A$ に、次のように分解すると、

$$\mathbf{u}_S = \frac{\mathbf{u}(\vartheta) + \mathbf{u}(\pi - \vartheta)}{2}, \quad \mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{u}(\vartheta) - \mathbf{u}(\pi - \vartheta)}{2} \quad (31)$$

非線型項を対称性ごとに分離することができる:

$$\text{対称モード: } \mathbf{u}_S \times (\nabla \times \mathbf{u}_S), \quad \mathbf{u}_A \times (\nabla \times \mathbf{u}_A), \quad (32)$$

$$\text{反対称モード: } \mathbf{u}_S \times (\nabla \times \mathbf{u}_A), \quad \mathbf{u}_A \times (\nabla \times \mathbf{u}_S). \quad (33)$$

この非線型項の対称性に関する分解によって、主流 $\mathbf{U}$ が南北対称 ($\mathbf{u}_S$) であるならば、線型安定性解析において南北対称解と反対称解を別々に計算することができることが結論される。

以下、関数展開の詳細と対称性の取り込み方を説明する。まず主流の流れ関数 ψ, ω を

$$\psi(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \psi_{nm} \tilde{T}_n(x) \tilde{P}_{k(m)}(\vartheta), \quad (34)$$

$$\omega(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \omega_{nm} \tilde{T}_n(x) \tilde{P}_{l(m)}(\vartheta) \quad (35)$$

と関数展開する。上式の左辺の r と右辺の x とは

$$x = 2r - R_1 - R_2 \quad (36)$$

の関係で結ばれており、区間 $R_1 \leq r \leq R_2$ を区間 $-1 \leq x \leq 1$ に変換する。ここで $\tilde{T}_n(x)$, $\tilde{T}_n(x)$ および $\tilde{P}_{k(m)}(\vartheta)$ は r -, ϑ -方向の展開関数であり、Chebyshev 多項式 $T_n(x)$, Legendre 多項式 $P_l(x)$ を用いて

$$\tilde{T}_n(x) = (1 - x^2)^2 T_n(x), \quad (37)$$

$$\tilde{T}_n(x) = (1 - x^2) T_n(x), \quad (38)$$

$$\tilde{P}_k(\vartheta) = \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} P_k(\cos \vartheta) \quad (39)$$

と表される、ここで Chebyshev 多項式の前の $(1 - x^2)^2$, $(1 - x^2)$ は、各展開関数が境界条件 (10) を満たすための補正である。これらの関数展開に対し導関数は、具体的には

$$(\text{例}) \quad \frac{\partial^5 \psi(r, \vartheta)}{\partial r^3 \partial \vartheta^2} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \psi_{nm} \left(2^3 \frac{d^3 \tilde{T}_n}{dx^3} \right) \frac{d^2 \tilde{P}_{k(m)}}{d\vartheta^2} \quad (40)$$

のように与えられる。

ϑ -方向の展開関数を、通常の Legendre 多項式ではなく、 $\tilde{P}_l(\vartheta)$ にとった理由は、この関数が演算子 $\tilde{L}_2$ (式 (14) 参照) の固有関数 (固有値は $l(l+1)$) になっている

$$-\frac{d^2 \tilde{P}_l}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{d \tilde{P}_l}{d\vartheta} = l(l+1) \tilde{P}_l \quad (41)$$

を満たすためである。これを利用して、 ϑ に関する高階の導関数をより低次の導関数を用いて表現することができ、

その結果、微分の階数が大きくなることに伴う誤差を抑えることができる。

本研究では主流 $\mathbf{U}$ として赤道面に対して南北対称な流れを求める。(第1節参照) したがって、式 (34), (35) の $\tilde{P}$ の添え字に現れる $k(m), l(m)$ は

$$(k(m), l(m)) = (2m+1, 2m+2) \quad (42)$$

によって与えられる。Bühler の実験によれば、解の分岐が生じたあとで、南北に非対称な流れが形成される場合が観察されている⁽¹²⁾。このような流れを数値的に求めるためには、 $k(m), l(m)$ は

$$(k(m), l(m)) = (m+1, m+1) \quad (43)$$

と与えればよい。対称性に関する考察 (式 (32), (33)) で述べたように、南北対称な主流に対する線型安定性問題の場合には、攪乱のモードを南北対称なモード (式 (42)) と南北反対称なモード

$$(k(m), l(m)) = (2m+2, 2m+1) \quad (44)$$

に分けて別々に計算すればよい。

次に非軸対称な攪乱の関数展開について述べる。式 (24) に現れる流れ関数 T, S を次のように関数展開する:

$$S(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M S_{nm} \tilde{T}_n(x) \tilde{Y}_{k(m)}^a(\vartheta), \quad (45)$$

$$T(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M T_{nm} \tilde{T}_n(x) \tilde{Y}_{l(m)}^a(\vartheta), \quad (46)$$

ここで $\tilde{T}_n, \tilde{T}_n$ は式 (37), (38) で表される関数、 $\tilde{Y}_k^a(\vartheta)$ は Legendre の陪関数 $P_l^a(\cos \vartheta)$ を用いて

$$\tilde{Y}_k^a(\vartheta) = \sqrt{\frac{(2k+a+1)}{4\pi} \frac{k!}{(k+2a)!}} P_{k+a}^a(\cos \vartheta) \quad (47)$$

と表される関数であり、

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \tilde{Y}_{l-|m|}^{|m|}(\vartheta) \exp(im\varphi) \quad (48)$$

は球面調和関数である。ルジャンドルの陪関数は演算子 L_2 の固有関数なので、関係式

$$-\frac{d^2 \tilde{Y}_l^a}{d\vartheta^2} - \cot \vartheta \frac{d \tilde{Y}_l^a}{d\vartheta} + \frac{a^2}{\sin^2 \vartheta} \tilde{Y}_l^a = (l+a)(l+a+1) \tilde{Y}_l^a \quad (49)$$

をみたす。数値計算においてはこの関係式を用いて、高階の導関数を低階の導関数に置き換えて計算を行った。

主流が南北対称な流れの場合、軸対称の場合と同様に、攪乱は南北対称性に応じて別々に計算をしてよい。ここで展開関数の ϑ -方向のモード番号を表す関数 $(k(m), l(m))$ は

$$(k(m), l(m)) = \begin{cases} (2m, 2m+1) & \text{対称モード} \\ (2m+1, 2m) & \text{反対称モード} \end{cases} \quad (50)$$

によって与えられる。

5. 離散化と数値解法

本節では、前節で解説した関数展開による離散化の方法に基づいた具体的な計算方法について説明する。まず、関数展開された方程式の値の評価法として選点法を説明し、Newton-Raphson 法を用いた主流の計算法、二重 QR 法を用いた攪乱の固有値計算について述べる。

5.1 選点法

選点法は考えている領域 $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ 上の選点 (r_i, ϑ_i) 上で方程式 (主流は (11), (12), 攪乱は (25), (26)) が満たされるように係数を決める方法であり、選点の数が展開係数の個数 $(M+1)(N+1)$ に等しければ、原理的に解くことができる。

各項の行列表現は次のようになる

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad & \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \bigg|_{r=(r_i, \vartheta_j)} \\ &= \frac{1}{r_i^2 \sin \vartheta_j} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \psi_{nm} \left(2 \frac{d\tilde{T}_n}{dx}(x_i) \right) P_{l(m)}(\vartheta_j) \\ & \quad \times \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^M \omega_{\nu\mu} \tilde{T}_\nu(x_i) \left(\frac{dP_{k(\mu)}}{d\vartheta}(\vartheta_j) \right) \end{aligned} \quad (51)$$

$$= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^M N(i, j|m, n; \mu, \nu) \psi_{nm} \omega_{\nu\mu}, \quad (52)$$

ここで

$$\begin{aligned} N(i, j|m, n; \mu, \nu) &= \frac{1}{r_i^2 \sin \vartheta_j} \\ & \times \left(2 \frac{d\tilde{T}_n}{dx}(x_i) \tilde{P}_{l(m)}(\vartheta_j) \right) \times \left(\tilde{T}_\nu(x_i) \frac{dP_{k(\mu)}}{d\vartheta}(\vartheta_j) \right) \end{aligned} \quad (53)$$

である。

数値計算における具体的な選点の値は

$$x_i = \cos \left(\frac{(i+1)\pi}{N+2} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (54)$$

$$\vartheta_j = \frac{(j+1)\pi}{2M+3}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (55)$$

である。 ϑ -方向の選点は、流れ関数 ω , ψ , T および S を南北対称もしくは反対称に限定してよいので、北半球にのみ分布している。

主流の方程式 (11), (12) は、展開係数 X_{mn} ($=\omega_{nm}$ または ψ_{nm}) に関する連立 2 次方程式、

$$\begin{aligned} C_{ij} + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N L_{ijmn} X_{mn} \\ + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N N_{ijmn\mu\nu} X_{mn} X_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

の形式に帰着する、ここで $0 \leq i \leq M$, $0 \leq j \leq N$ であり、 C_{ij} , L_{ijmn} , $N_{ijmn\mu\nu}$ はパラメーター Re , β に依存する定係数となる。この連立方程式を Newton-Raphson 法を用いて解く。

攪乱の方程式 (25), (26) は T_{mn} , S_{mn} に関する連立 1 次方程式 (行列の一般固有値問題 (29), (30))

$$\lambda \mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{Y} \quad (57)$$

になる、ここで $\mathbf{Y}$ は展開係数を 1 列に並べたベクトル $\mathbf{Y} \equiv (T_{mn}, S_{mn})^T$ である。この問題を二重 QR 法を用いて解く。

5.2 固有値問題の解法

展開係数 (T_{mn}, S_{mn}) は $2(M+1)(N+1)$ 個の成分をもつ複素ベクトルであり、式 (57) は、 $2(M+1)(N+1) \times 2(M+1)(N+1)$ の複素行列の一般固有値問題である。

本研究では、この複素行列を等価な実行列に変換し、 $4(M+1)(N+1) \times 4(M+1)(N+1)$ の実行列の一般固有値問題として解いた:

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad & (L_{TT}^{(R)} + L_{TT}^{(I)} \frac{\partial}{\partial \varphi})(T^{(R)} + iT^{(I)}) \exp(i\alpha\varphi) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} L_{TT}^{(R)} & aL_{TT}^{(I)} \\ -aL_{TT}^{(I)} & L_{TT}^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(R)} \\ T^{(I)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (58)$$

固有値計算は、式 (57) の右辺の行列 $\mathbf{L}$ の逆行列 $\mathbf{L}^{-1}$ を LU 分解を用いて求め、両辺に $\mathbf{L}^{-1}$ を掛け算し、行列 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}$ の固有値問題を二重 QR 法を用いて解いた。

本研究では次のようにして臨界 Reynolds 数を求めた。

(1) 特定の Reynolds 数において主流をあらかじめ求めておく。(2) 東西の波数 a および Reynolds 数毎に、固有値問題を解き増幅率と位相速度を求める。この際に計算を実行する Reynolds 数は、臨界 Reynolds 数をまたぐようにとる。ただし後で述べるように、1 回の数値計算にかかる時間が長いので、Reynolds 数を細かい刻みで変化させることは、実際上不可能である。したがって、増幅率が正の固有値と負の固有値とが現れるような比較的少数の Reynolds 数で計算する。(3) (2) で得られた増幅率がちょうど零になることはほとんど有り得ない。したがって、東西の波数 a 毎に、得られた増幅率を線型最小二乗法に当てはめて、増幅率が零になる点、すなわち a ごとの中立 Reynolds 数 $Re_c(a)$ を求める。(4) $Re_c(a)$ のうち最小のものを取り出し、その Reynolds 数を臨界 Reynolds 数 Re_c 、対応する波数 a を臨界波数とする。

実際に計算を実行したパラメーターは $\beta=0.5$, $Re=1100$, 1200, 1300, 1400, 1500, $a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ の組み合わせ (40 通り) について行った。

Table.1 Influence of the truncation number of the perturbation u to the eigenvalues.

(M, N)	growth rate	phase velocity
(9, 36)	386.006	261.589
(10, 40)	300.540	260.137
(11, 44)	204.294	252.411
(12, 48)	111.839	246.917
(13, 52)	17.311	226.907
(14, 56)	-9.310	218.141
(15, 60)	-11.416	216.393
(16, 64)	-12.054	215.810
(17, 68)	-12.307	215.528
(18, 72)	-12.429	215.399

Table.2 Influence of the truncation number of the mean flow U to the eigenvalues.

(M, N)	growth rate	phase velocity
(9, 36)	-14.848	219.218
(10, 40)	-12.932	216.035
(11, 44)	-12.770	216.341
(12, 48)	-12.530	215.699
(13, 52)	-12.516	215.512
(14, 56)	-12.433	215.501
(15, 60)	-11.968	215.699
(16, 64)	3.219	174.746
(17, 72)	-11.878	215.873
(18, 72)	-11.973	215.847
(16, 128)	-12.054	215.810

6. 計算結果

本節では数値計算に基づく関数展開の収束性, および実験結果との比較について述べる.

6.1 関数展開の収束性

関数展開は展開項数が大きくなるほど, 近似の精度が良くなることが期待される. しかし計算機の能力には限界があるので, 実用上の展開項数には上限がある. したがってパラメータを変化させながら安定性を調べるためには収束が保証されている最小の展開項数で数値計算を実行しなくてはならない. 本研究では関数展開の収束性を, 展開関数の項数を増やしていき, 固有値の分布の収束を調べることで確かめた. 確認計算においては, 系のパラメータを $\beta=0.5$, $Re=1500$, $a=1$ に固定した.

計算の結果, 展開項数を大きくしていくにつれて, 固有値の値が特定の値へと収束していく傾向がみられた. 最不安定固有関数の固有値 (実部が最も大きな値を持つ固有値) は, 主流 $(M,N)=(32,128)$, 攪乱 $(M,N)=(18,72)$ の場合において

$$\lambda = (-12.043, 215.83) \quad (59)$$

であった.

主流の展開項数を (16,128) に固定した上で, 固有値問題の展開項数を変えた場合の, 最大増幅モードの固有値を表 1 に, 固有値の分布の変化を図 1 に示す. 図より明らかなように, 展開の項数が少ない場合には, 偽の不安定固有値が一つ存在しており, 展開の項数を上げていくにつれて, 次第に安定な方向へと値を変化させていることが分かる. このことは数値計算において, 収束性を確認せずに少ない展開項数で計算を実行した場合には, 安定な流れを誤って不安定と判定し, 臨界 Reynolds 数を実際の値よりもかな

り低めに見積もってしまうおそれがあることを示唆している.

攪乱 (固有値問題) の展開項数を (16,64) に固定した上で, 主流の展開項数を変えた場合の, 最大増幅モードの固有値を表 2 に, 固有値の分布の変化を図 2 に示す. 主流の展開項数の影響は固有値問題の場合と比較して小さい. これは 0-渦流の構造が比較的単純であり, 低次の Chebyshev および Legendre 関数で良く近似できることを示している.

本研究では以上の結果に鑑み, 主流は $(M,N)=(16,128)$, 攪乱は $(M,N)=(16,64)$ の展開項数で数値計算を行った. 主流の展開項数を大きくとった理由は, 固有値計算において項数が大きくなってもメモリを浪費することにならないので, 近似の精度を可能な限りあげるほうが良いと考えたからである. 一方, 攪乱の方はその展開項数によって固有値計算に必要なメモリおよび CPU 時間が大きく左右されるので, 収束がある程度保証される最小のモード数で計算した.

さて参考のために, この大きさの固有値問題を解くために必要な計算機のメモリの大きさを概算する. 二重 QR 法の計算に必要な配列の大半は, 固有値を求める行列と固有ベクトルを格納する同じ大きさの補助配列によって占められる. したがって必要なメモリの概算値は

$$(4(M+1)(N+1))^2 \times 2 \times 8 \sim 312 \text{Mbyte} \quad (60)$$

である. 実際の計算ではその他の配列も含め約 340Mbyte を必要とした.

この計算は核融合科学研究所・大型シミュレーション用解析装置 (NEC 社製 SX-3/24R) 上で実行された. 1CPU 上での実行用に最適ベクトル化処理を施すことにより, 1 パラメータあたりの実行時間を約 800 秒にすることができた.

Fig.1 Distributions of the eigenvalues when the numbers of the expansion modes of the disturbance (M, N) are changed, while those of the mean flow are fixed to (16,128). Parameters are $\beta=0.5$, $Re=1500$ and $a=1$.

Fig.2 Distributions of the eigenvalues when the numbers of the expansion modes of the mean flow (M, N) are changed, while those of the perturbation are fixed to (16,64). Parameters are $\beta=0.5$, $Re=1500$ and $a=1$.

Fig.3 Growth rates of disturbance for assigned a 's and Reynolds numbers. Symbols which denote a are assigned as follows; $\times$:1, $\circ$:2, Δ :3, $\square$:4, $\bullet$:5, $\blacktriangle$:6, $\blacksquare$:7, $+$:8.

6.2 実験結果との比較

図3に波数 a 毎の増幅率の Reynolds 数依存性を図示する。計算したすべての Reynolds 数において、最大増幅モードは $a=5$ の南北反対称なモードによって与えられることが分かった。この波数は実験的に観測されているらせん状 TG 渦の数と一致している。

図中の直線は、 $a=5$ の増幅率のデータに最小二乗法を適用して求めた増幅率曲線である。この直線に基づいて得られた臨界 Reynolds 数は $Re = 1245$ であり、この数値は Egbers らによって実験的に観測された値 $Re = 1244$ にきわめて近い値になっている⁽³⁾。

これら臨界波数と臨界 Reynolds 数の実験結果との良い一致は、本計算が精度良く収束したものであることを示していると考えられる。

7. まとめ

球殻 Couette 流の非軸対称な3次元擾乱に対する安定性のスペクトル法による計算法を詳述し、固有値計算の精度について研究を行った。

本研究で用いた収束の判定法は、無限次元の力学系を有限次元の力学系で近似する場合の精度評価の方法のひとつであり、平行流における伊藤らの研究⁽¹³⁾を非一様流へと拡張したものである。計算によって得られた臨界 Reynolds 数は実験結果と大変良く一致し、主流が非一様な場合においても、本手法が近似精度を評価する方法として有効であ

ることを示している。また安定性の計算には大規模な計算が必要であり、精度が不十分な場合には、偽の不安定固有値が生じ、臨界 Reynolds 数の過小評価につながる危険性を含んでいることが明らかになった。

ここで紹介した手法は、球殻クエット流の軸対称解の3次元擾乱に対する安定性を調べる一般的な手法であるので、 $\beta < 0.24$ の場合に観測されている軸対称 TG 渦かららせん状 TG 渦への遷移⁽²⁾の解析にも、応用が可能である。ただし解析に必要な精度、すなわち計算のモード数は、1次流れの空間構造に依存するので、本研究で調べた $\beta = 0.5$ の場合と同じであるとは限らない。しかしこの場合においても、収束の判定条件として固有値の分布を調べる手法が有効であると考えられる。

今後、すきま比 β を変化させ、らせん状 TG 渦への遷移のパラメーター依存性や、0-渦流や軸対称 TG 渦からの遷移の不安定性の物理的機構を明らかにしていく予定である。

文献

- (1). 例えば次の文献を参照: Nakabayashi, K., J. Fluids Eng. (Trans. ASME) **100** (1978), 97-106.
- (2). 例えば次の文献を参照: Nakabayashi, K., and Tsuchida, Y., J. Fluid Mech. **194** (1988), 101-132.
- (3). Egbers, C., and Rath, H. J., Acta Mech. **111** (1995), 125-140.
- (4). Marcus, P. S. and Tuckerman, L. S., J. Fluid Mech. **185** (1987), 1-30,
- (5). Belyaev, Yu. N., Monakhov, A. A., and Yavorskaya, I. M., Fluid Dyn. **13** (1978), 162-168.
- (6). Mamun, C. K. and Tuckerman, L. S., Phys. Fluids **7** (1995), 80-91,
- (7). Munson, and Joseph, D. D., J Fluid Mech. **49** (1971), 289-303.
- (8). Araki, K., Mizushima, J., and Yanase, S., Phys. Fluids **9**(4) (1997), 1197-1199.
- (9). 吉田善章, 『集団現象の数理』(岩波書店, 東京, 1995) §4.2.
- (10). Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (Oxford Univ. Press, Clarendon, 1961) Appendix III.
- (11). 荒木 圭典, Mathematica ユーザー会 第4回 ワークショップ講演予稿集 (1996), 33-38.
- (12). Bühler, K., Acta Mech. **81** (1990), 3-38.
- (13). 伊藤忠哉, 長谷賢治, 末松良一, 早瀬敏幸, 機論, 53-491, B(1987), 1917-1924.