気泡の浮力によって形成される乱れの構造の数値解析*

村井 祐一^{*1}, 松本 洋一郎^{*2}
宋 向 群^{*3}, 山本 富士夫^{*1}

Numerical Analysis of Turbulence Structures induced by Bubble Buoyancy

Yuichi MURAI, Yoichiro MATSUMOTO,
Xiang-Qun SONG and Fujio YAMAMOTO

Turbulence structure in rising bubbly flow driven by bubble buoyancy was analyzed by using the Eulerian-Lagrangian equation model. A new calculation method for two-way interaction between dispersed bubble and liquid phase was proposed to simulate accurately the local fluctuation of liquid flow induced by bubble migration. The present two-dimensional simulation revealed that, (1) the turbulence structure had the longer wave length in vertical direction in case of the larger bubble, (2) the wave spectrum of kinetic energy of the liquid phase depended sensitively on the average void fraction and the lift force of bubble.

Key Words: Bubbly Flow, Multiphase Flow, Finite Differential Method, Computational Fluid Dynamics, Turbulent Flow, Euler-Lagrange Equation Model

1. は じ め に

気泡流は、原子炉冷却系統、化学プラント、バイオリアクタをはじめとするさまざまな工業・環境プロセスに見受けられるが、それらの装置の性能は、気泡の運動特性や気液間の相互作用に伴って発生する複雑な流動特性に支配されている。気泡流の挙動を正確に予測または解明するには、気泡流中で生じているさまざまな現象を正確に定式化した方程式系を構築し、これを適切な計算手法を用いて数値解析する必要がある。最近では、格子体積平均化に基づく数密度モデル⁽¹⁾や二流体モデル⁽²⁾の開発・進展により、気泡径に比べて十分に大きな空間スケールの流動構造については良好に予測することが可能となっている。一方、気泡流中の微視的な構造については、直接数値計算や画像処理を用いた実験計測から、流れ場中の単一気泡に関する研究^{(3)~(5)}が進展し、気泡流の高精度な数値計算モデルの構築において重要となる気泡の運動特性や液体速度場につきさまざまな知見が得られている。さらに、

自由界面運動の新しい計算手法の開発により、大規模数値計算によって数個～数百個程度の気泡流の直接数値計算結果⁽⁶⁾も報告されており興味深い。

著者らは既報⁽⁷⁾⁽⁸⁾において、液相流動をオイラー形方程式、気泡運動をラグランジュ形方程式で記述した数値計算手法を提案し(すなわち Euler-Lagrange モデル、以下 E-L モデルと略す)、それを用いて気泡ブルームの微細流動構造の解析結果を論述した。著者らの開発した E-L モデルによる計算手法は、気泡の実際の密度差を忠実に扱うことができること、計算領域内に存在する気泡数が数千以上でも解析できること、さらに二流体モデルに比べて空間解像度が高く、局所的な乱れの構造など微細なスケールの現象も含めて全体の流動予測が可能であることが特徴である。本論文では、

(1) 気泡群の上昇によって形成される液相の乱れの構造に関して、現象論的に普遍性の高い知見を得る、

(2) そのために個々の気泡により形成される液相流動の乱れを精度よく解析できる数値計算手法を確立する、

の2項目を目的とし、E-L モデルにおける二相間干渉のより厳密な計算手法を提案するとともに、周期境界

* 原稿受付 1998年1月26日。

^{*1} 正員、福井大学工学部(☎ 910-8507 福井市文京3-9-1)。^{*2} 正員、東京大学工学部(☎ 113-8654 東京都文京区本郷7-3-1)。^{*3} 福井大学大学院。

によって囲まれる上昇気泡流中の浮力によって形成される乱れの構造を解析し、ボイド率、気泡径、揚力、気泡間相互作用力による結果の差異を明らかにした。

2. E-L モデルの TWO-WAY 解析法の改良

分散性混相流中において個々の分散体が誘起する乱れは、本来の乱流として振る舞う乱れとは区別され、疑似乱れ, Pseudo Turbulence⁽⁹⁾ と呼ばれる。これを E-L モデルによる解析で正確にシミュレートするには、分散相が連続相に及ぼす作用を正しく扱う解析プログラムが必要となる。本節では、気泡流など、体積率が比較的に大きい分散性二相流を扱う場合の E-L モデルにおける TWO-WAY 解析手法の問題点と、その解決方法を述べる。

分散性二相流の TWO-WAY 解析では、体積率(または質量)と運動量とエネルギーの3種類につき分散相と連続相の間の双方向の相互作用を考慮するが、E-L モデルにおいてその双方向干渉をプログラム化するには、オイラー形モデル⁽¹⁾と比較して次の点に注意を要する。すなわち E-L モデルでは、分散相の物理量が個々の分散体位置において定義されているのに対し、連続相の物理量は格子体積で平均化された量で定義されている。これにより TWO-WAY 解析プログラムでは、分散相と連続相の間での物理変数のデータ交換の際に、その手段に依存して解析結果に差異がもたらされる。本研究のように、乱れの構造などの微細な空間スケールの流動を解析する場合、物理量のデータ交換の手段による結果の差異を明確にしておく必要がある。

まず連続相が分散相に与える影響については、各分散体の位置における連続相の物理量は、格子点で計算された物理量のラグランジュ補間で求めることができる。このとき線形補間⁽¹⁰⁾、二次精度補間、三次スプライン補間などが適用できる。これは粒子混相乱流の ONE-WAY 解析時の補間手法や、粒子軌跡で単相流の数値計算結果を可視化する際と共通の問題で、高精度の補間法ほど空間解像度が向上する。これに対し分散相が連続相に与える影響を扱う場合、その手段としてまず以下の二つの手法が考えられる。

(1) 分散体の重心座標が所属する格子のみに、その分散体の物理量の影響を反映させる。

(2) 分散体の体積要素が複数の格子にまたがる場合には、格子界面でその分散体の体積を分割して物理量を複数の格子に分配する。

各分散体の体積が格子体積に比べ無視できるほど小さい場合には(1)が、無視できない場合には(2)の手

法が適用される。著者らによる既報⁽⁷⁾⁽⁸⁾では(1)が、粒子追跡法⁽¹⁰⁾では(2)が採用されている。しかし(1)、(2)による解析結果はともに、液相中に実際には存在しないはずの強いパルス状の乱れが計算され、解析結果に無視できない誤差をもたらす。この乱れは格子界面を分散体が通過する際に、連続相に対する分散体の物理量の影響が格子間で急変するために誘起される。ここでは E-L モデルにおいて見られる、実際には存在しない格子分割に依存した乱れを数値疑似乱れ(Numerical Pseudo Turbulence)と呼ぶこととし、この解決方法を以下に提案する。

2・1 数値疑似乱れの除去方法

数値疑似乱れの発生原因は、分散体の物理量の影響が連続相の物理量に対して格子単位の空間分解能でしか反映しないことにある。前述の(1)、(2)の方法を適用すると、格子内で気泡が移動している場合には格子平均ボイド率が一定のため、液相流動の変動が計算されず、かわりに格子界面を横断するときに急激な格子平均ボイド率の変化が起こり、過剰な液相流速が誘起される。この現象は次の液相質量保存方程式から容易に見積もることができる。

$$\frac{\partial(1-\alpha)\rho_L}{\partial t} + \text{div}(1-\alpha)\rho_L u_L = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

時間刻み δt の時間経過中、体積 V_c の格子内に突如として体積 V_c の気泡が侵入した場合、格子界面における液相流速の外向き成分の大きさは、

$$u_L^i = \frac{(1/\delta t) V_c V_c^{-2/3}}{2M(1-\alpha)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで M は流れ場の次元数、 α は気泡侵入前の格子平均ボイド率である。式(2)は気泡侵入に伴う液相の流速変動の格子体積平均値を表すが、時間刻み δt を減少させるほど過剰な流速変動が計算され、これが数値疑似乱れとなって計算結果に表れる。また気泡が複数の格子にまたがる場合、気泡体積を格子界面で分割すれば、ボイド率の時間変化値は $(V_c/V_c)(u_c \delta t)/(V_c^{1/3})$ となるため、

$$u_L^i = \frac{u_c V_c^{2/3} V_c^{-2/3}}{2M(1-\alpha)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

が導かれる。ここで u_c は格子界面に垂直な気泡の並進速度成分である。式(3)は式(2)とは異なり、流速変動が気泡速度 u_c に比例するため妥当といえる。しかし時間刻み幅 δt がつねに $\delta t < V_c^{1/3}/u_c$ を満足しなければならないという条件が派生するため、気泡径が小さい場合、または気泡速度が大きい場合に、極めて不効率な計算手法となる。

以上のように、数値疑似乱れは E-L モデルに対す

る数値解法の不完全さに起因しており、これを除去するには、格子内の気泡の移動に伴う液相流動の変動を忠実に計算する手法を確立する必要がある。そこで気液間の相互作用を扱う場合に最も重要な変数となっている局所ボイド率の計算手法を改善することに着目し、本研究では次の2項目に留意してE-Lモデルにおける局所ボイド率の新しい定義を与える。

(i) 連続性：格子内の気泡の移動に伴い局所ボイド率は時間的にも空間的にも連続的に変化しなければならない(微分可能な条件)。

(ii) 保存性：局所ボイド率の系全体における平均値は、実際のバルク平均ボイド率に一致しなければならない(ボイド率の保存条件)。

(1), (2)の計算手法は、連続性がなく保存性のあるボイド率分布を得る。一方、(1), (2)の結果に移動平均法など適当な空間フィルタを課すと、適度の連続性が得られるが保存性は保証されない。そこで(i), (ii)を両立する局所ボイド率の計算手法として次を考案した。

図1に示す長方形格子系の場合で説明する。まず格子内に体積 V の気泡が存在するとき、その気泡を最短距離で包囲する四つの格子点を体積 V の配分先と選定する(図1中でP1~4)。次に気泡重心座標を重心にもつ格子サイズと同じ面積の長方形(面積A)を考え、格子点の配置により分割される小長方形の面積($A_i, i=1\sim4$)を算出する。気泡体積 V を4格子点に配分する手法として、四つの面積率($A_i/A, i=1\sim4$)を重み係数とし、それぞれ $V \times (A_i/A)$ を各格子点 P_i に与える。以上により各格子点の局所ボイド率は、格子内の気泡位置が反映された値として算出される。一次元計算の場合2点、三次元計算の場合8点の格子点を用いて同様な手法を用いることができる。

P1 ~ P4 : Selected point for delivery of Bubble Volume
[A1] ~ [A4] : Area divided by mesh, [shaded box] : Template Area

Fig.1 TD Algorithm for two-way analysis

この手法を用いると、条件(i), (ii)の満足によって数値疑似乱れが除去されるだけでなく、(1), (2)と同様に局所ボイド率が格子体積と同じ空間サイズで計算され、実際の双方向干渉による流動変動が格子体積平均量として正しく算出される。この意味で局所ボイド率分布に空間フィルタや平均化を課す操作とは性質が大きく異なる。以下ではE-Lモデルにおける局所ボイド率のこのような計算手法をTD(Template Delivery)法と呼ぶことにする。これは気泡体積を、気泡重心位置を中心とするテンプレートを用いて格子点群に分配するという概念による。TD法の適用により、気泡が格子を通過する際の液相流速変動は、次式のようになる。

$$u_L' = \frac{u_b V_b V_c^{-1}}{2M(1-\alpha)} \dots \dots \dots (4)$$

式(4)は時間刻み δt に依存せず、かつ時間刻み制約もないため格子体積 V_c で平均化された厳密な流速変動が計算される。以上をまとめ、図2に格子界面を球形気泡が横断するときが発生する格子体積平均液相速度の時間変化の説明図を示す。(1), (2)の方法では格子平均体積率の急変のため、時間刻み幅 δt の幅をもつ三角パルス状の数値疑似乱れが発生するのに対し、TD法では連続的な液相流速変化が計算され、計算結果に不自然な高周波変動をもたらしさない。この流速変化は、気泡体積 V_b が格子体積 V_c に比べ小さいほど球周りのポテンシャル流れによる流速変化と同じ挙動となる。よって、TD法による局所ボイド率の計算手法を適用し実際に気泡流の数値解析を行った場合、液相流動の波数スペクトル分布の高波数領域でのノイズは生じなくなる。これにより、E-Lモデルであっても3章で述べるような気泡流中の微視的流動の解析が可能となる。

u_L' : liquid velocity fluctuation induced by bubble migration

Fig.2 Numerical pseudo turbulence

3. 上昇気泡流中の乱れの構造

前述の新しい TWO-WAY 解析法を用い、気泡の浮力により駆動される上昇気泡流の乱れの構造を解析した。支配方程式と計算手順は既報⁽¹⁾⁽⁷⁾を参照された。なお全境界に周期境界条件を課し、初期条件は静止液体中にランダムに気泡が分散するものとした。

上昇気泡群によって誘起される液相の乱れと気泡群の分布状態には強い因果関係がある。表1には、計算条件のほか、時刻10～11sにおける系全体での平均乱流エネルギー E_t と、気泡分布状態を表す一つの指標である一様率 η の値を付記した。一様率は気泡分布がクラスタ化した場合に零、一様化した場合に1となるように定義された無次元数で、着目する気泡から最も近接する位置の気泡までの距離を気泡数全体で平均し、一様分布時の気泡間距離で除した量である。すなわち、

$$\eta = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min(|x_j - x_i|_{i \neq j})}{LN^{1/3}} \dots \dots \dots (5)$$

なお式(5)による一様率は、気泡をランダム配置させた場合に0.5となることがわかっている。よって、0.5より大のとき気泡群の分布形態は拡散的、小のとき集中的であることを表す。表1から以下のことがわかる。(1)ボイド率 α の増大は乱流エネルギーと気泡一様率の双方を同時に増加させる(条件1, 2)。これは、浮力の増大により液相流速が強く誘起され、その乱れの対流効果により気泡が拡散するためである。(2)同じボイド率でも気泡径 R が大きいほど乱流エネルギーが低下する(条件2～4)。これは液相中における渦などの代表スケールと気泡の上昇速度で見積も

られる気泡と渦の間の干渉時間が減少するためである。逆に小さな気泡では、同一渦内に滞在する時間が長く、渦の運動量が浮力により増加しやすい。また一様率が気泡半径 R に対して単調変化でないのは、乱れによる気泡の拡散効果と揚力(後述)による拡散効果が重複しているためと考えられる。(3)気泡に作用する揚力は乱流エネルギーを大幅に低下させる効果をもつ(条件1, 2, 5, 6)。これは、液相の渦度分布によって生ずる気泡の水平方向の揚力が、気泡群を拡散的に分布させるためである。具体的には、気泡群が密な領域で液相が上昇流をなしているが、その周囲のせん断層域の渦度により密となっていた気泡群に揚力が付加され、水平方向に分散するというメカニズムである。なお、本研究では揚力として Auton が導出した式⁽¹¹⁾を使用した。気泡の揚力に関する他の研究者の式でも、揚力の作用方向は同じであり、本計算結果と同様な傾向が現れると考えられる。また、不純物を有する液体中では、気泡界面が渦度の影響を大きく受けるようになり、Auton の式よりも揚力が増加することが知られている。すなわち Auton の揚力は想定される多くの条件で、揚力をおよそ過小評価していることになるが、それでも大きな影響をもつことに留意すべきである。

図3に時刻10sにおける系の液相運動エネルギー分布、気泡分布、気泡の速度ベクトル分布の計算結果を示す。低ボイド率(条件1)ではほとんどの気泡がほぼ直線的に上昇し、液相には鉛直方向に波長の長い弱い乱れが発生する。高ボイド率時(条件2)や小気泡時(条件3)では気泡群が蛇行を伴って上昇し、ほぼ等方的な強い乱れが誘起される。揚力を無視すると(条件5, 6)、液相の乱れの波数が増加し、運動エネルギーの高い領域に気泡群が集積して上昇する傾向が見られる。

以上のように、気泡流中の乱れの構造は、ボイド率だけでなく気泡の並進運動特性に大きく依存している。特に興味深い点は、気泡の浮力が渦を駆動するだけでなく、渦近傍の気泡運動によって渦運動が変化する効果である。このような効果は著者らによる、気泡流噴流中の渦と気泡の相互作用の解析に関する報告⁽¹²⁾でも明らかにしている。本報では液相速度場に関する波数スペクトルの解析から、さらにその詳細を調査する。

図4に、時刻10sにおける計算結果を二次元FFT処理することにより得られた液相速度場の波数スペクトル分布を示す。ただし格子点数が 10^4 個のためFFT処理における分解能は $\log(10^2/2)=3.91$ である。

Table 1 Simulation conditions and results

System Condition		Calculation Condition	
g = 9.80665 m/s ² L = H = 0.50 m $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$ $\rho_G = 1.25 \text{ kg/m}^3$ $\nu_L = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$		Time step dt=10 ⁻³ sec. Tank depth $\delta=0.01 \text{ m}$ Conv. Term : 2-D CIP Bubble : Incompressible Grid Number : 100×100	
Parameter Condition		Turb. Engy Et ×10 ⁻³	Uniformity η
1: $\alpha=0.01$, R=0.5mm		0.58	0.523
2: $\alpha=0.05$, R=0.5mm		9.91	0.560
3: $\alpha=0.05$, R=0.2mm		19.04	0.513
4: $\alpha=0.05$, R=1.0mm		4.67	0.542
5: $\alpha=0.01$, R=0.5mm Without Lift Force		1.22	0.520
6: $\alpha=0.05$, R=0.5mm Without Lift Force		17.30	0.493

Fig. 3 Kinetic energy distribution induced by bubble buoyance

図4より以下のことがわかる。(1)どの条件でも高波数領域の流速成分はほぼ一定のこう配で減衰する。(2)ボイド率が増大するほど全波数領域で流速分布が増加する(図4A)。(3)気泡径が小さいほどわずかに低波数領域が増大する(図4B)。(4)気泡の揚力を無視すると高波数領域を含め全体の流速成分が増加する。

なお図4中には、参考のためコルモゴロフの $-5/3$ 乗則のこう配と Esmaeeli-Tryggvason⁽⁶⁾により報告されている二次元DNSによって得られた低気泡 Re 数の場合の上昇気泡流中のカスケードこう配 -3 を付記した。本計算結果とそれらには良好な一致が見られるが、上昇気泡流中の乱れの構造は、コルモゴロフ理論の意味する慣性効果による乱流カスケード過程とは、本質的に異質である。前者は気泡の分散性による浮力分布の非一様性に起因して発生する乱れ、すなわち分散体が誘起する乱れであるからである。また、上昇気泡流の乱れの構造は、単相自然対流との対比から次のように説明することもできる。単相自然対流では初期あるいは境界で与えられた温度差に起因して体積力こう配が発生する。この場合、浮力分布は連続的かつ温度拡散により一様化するため、高波数の乱れを

持続的に生成する因子はない。これに対し気泡流では浮力分布がつねに離散的に分布するため、気泡内ガスが液体中に拡散するなどして消滅しない限り、液体中に高波数の乱れを持続的に供給する。すなわち上昇気泡流では、個々に分散する気泡の浮力がエネルギー生成源であるため、短波長の乱れが常時誘起され、それが気泡と渦の相対運動に依存して、大きなスケールの乱れに発達してゆく。このような現象を、乱れの逆カスケード過程⁽⁶⁾と称することもできる。

なお、本計算手法では体積率干涉に伴う疑似乱れは考慮されているが、レイノルズ数やウェーバ数が高い場合における気泡の伴流の効果については、平均化方程式における計算分解能の限界のため考慮することができない。そのため図4の波数スペクトル分布における最大波数よりも高い波数領域については解が得られない。E-Lモデルによる気泡の伴流の扱いには、伴流スケールと格子サイズの関係などを考慮したSGSモデルを構築するなど、新たなモデル化が必要であり、今後の課題といえる。しかしながら、幅広い波数スペクトルを呈する上昇気泡流において、比較的エネルギーの大きい低波数領域の構造を数値解析的に追究することが可能となったことは一つの成果である。今

Fig. 4 Wave spectrum of liquid velocity

後、実験計測等により本計算結果の妥当性を検証するなどしてゆく予定である。

4. 上昇気泡流中の気泡運動

Wang-Maxey⁽¹³⁾ によって報告されているように、等方性乱流場中の重粒子の平均沈降速度は、静止流体中のそれに対して増減する。高レイノルズ数粒子の場

Fig. 5 Liquid Driven Ratio (LDR)

Fig. 6 Bubble Turbulence Ratio

合では抗力が相対速度に対して非線形であるため平均沈降速度が低下し、低レイノルズ数粒子の場合では、重粒子が周囲流体に下降流を形成するため平均沈降速度が増加する。ここでは、同様な現象が上昇気泡流の場合においても見られるかを調査する。

図5は、気泡の上昇速度のうち何割が液相の上昇速度で占められているかを評価した液相駆動率(LDR)で、系内の気泡数全体による平均値である。ボイド率 α が増加するほど、気泡径 R が小さいほど液相駆動率は増加する。系全体での液相の平均流速が零であることを考慮すると、LDRが正の値であることは、液相の沿直上向き流れをもつ領域に小気泡が集積して上昇していることを表す。逆にいえば、気泡数密度が大きい領域では、浮力によって液相に上昇流が形成され、気泡群をさらに速く上昇させていることを表す。

図6は、気泡の平均上昇速度とRMS変動速度により算出される乱れ度(BTR)の計算結果を表す。ボイド率 α が増加するほど、また気泡径 R が小さいほど乱れ度が増加しており、液相駆動率と同じ傾向にある。特に同じボイド率でも気泡径が小さいほど乱れ度

Fig. 7 Turbulence Amplification Ratio

が著しく増し, $\alpha=0.05$, $R=0.2\text{ mm}$ の場合では1を超える。すなわち小気泡は浮上時の直線性が低く, 長い経路を伝って上昇する。このような現象は気泡ブルーム⁽⁸⁾などでも観察されるほか, 工業上のさまざまなバブリングプロセスにおける重要な性質と考えられる。

図7は, 液相の乱れに対する気泡の乱れの比, すなわち乱れ増幅率 TAR を表す。一般に, 気泡の慣性力は周囲液体に比べて非常に小さいことから, 気泡周囲の液体流速が高い周波数で変動した場合に, 気泡はそれよりも大きな振幅で速度変動が起こる。球形気泡の場合, 速度変動の周波数を増加させると乱れ増幅率が1.0~3.0の間になることがわかっている⁽⁹⁾が, 本計算結果からは1.3~1.5の値が得られた。液相の流速変動が同じであれば, 大気泡のほうが乱れ増幅率が増加するはずであるが, 自然上昇気泡流の場合では小気泡のほうが液相に乱れを強く誘起するため, それら二つの効果が重複する(すなわち双方向相互作用)。この結果, 図7のように乱れ度はボイド率に依存して低下するが, 気泡径には大きく依存しない。

なお本研究では, ボイド率が低いいため, 気泡どうしの相互作用を無視した。この効果は, 気泡近傍場の液相流動が気泡どうしの接近によって干渉することで生まれるが, エネルギーレベルとして, 3章で述べたような大規模なスケールの液相の乱れのほうが卓越しており, 相対的には重要でないと考えられる。実際に, 気泡の抗力係数をボイド率の関数としてモデル化し⁽¹⁴⁾, 同様の計算を行ったが, 全体の乱れの構造に有意な差は確認されなかった。このほか, (1)球形気泡で気泡レイノルズ数が100以下, (2)液体中に不純物を含まない, の二つを前提として解析を行った。気泡流中の乱れの構造を解明するに当たって, (1)と(2)は, 得られた知見の有効範囲を限定するものであることに注意を要する。今後, 高気泡レイノルズ数, 高気

泡ウェーバ数時, あるいは不純物混入時の乱れの構造について明らかにしてゆかねばならない。

5. 結 論

本研究では既報⁽⁷⁾で記述した Euler-Lagrange モデルによる TWO-WAY 解析手法に対して以下の改良を行った。

(1) Euler-Lagrange モデルにおける分散相から連続相への干渉の取扱いとして, 格子内の気泡位置が連続相に反映される新しい局所ボイド率の計算手法(TD法)を提案した。

またこの手法を用いて上昇気泡流中の乱れの構造を数値解析した結果, 以下のことが明らかとなった。

(2) 浮力によって駆動される二次元気泡流中の乱流エネルギーは, ボイド率が大きいほど, および気泡径が小さいほど増加する(ただし気泡レイノルズ数が100以下で球形気泡を仮定している)。

(3) 上昇気泡流中の液相速度場の波数スペクトル分布は, 高波数領域で一定の減衰こう配が得られるのに対し, 低波数領域では気泡運動に依存した差異が生ずる。またそのカスケードこう配が著者らの E-L モデルによって妥当に算出される。

(4) 気泡の揚力は上昇気泡流中の乱流エネルギーを大幅に低減させる。

本研究は, 著者の一人が, 文部省科学研究費補助金[基盤研究C-2, No. 10650166, 奨励研究A, No. 10750121]の助成を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) 松本洋一郎・村井祐一, 機論, **61**-588, B(1995), 85-92.
- (2) 例えば, 富山明男・ほか4名, 機論, **60**-580, B(1994), 9-14.
- (3) 高木周・松本洋一郎, 混相流, **10**-3(1996), 264-273.
- (4) 富山明男・ほか3名, 機論, **57**-539, B(1991), 2167-2174.
- (5) Song, X. and Yamamoto, F., ほか3名, *ISIJ Int. J.*, **36**(1996), 54-57.
- (6) Esmaeeli, A. and Tryggvason, G., *J. Fluid Mech.*, **314**(1996), 315-330.
- (7) 村井祐一・松本洋一郎, 機論, **63**-611, B(1997), 2277-2282.
- (8) 村井祐一・松本洋一郎, 機論, **63**-611, B(1997), 2283-2288.
- (9) Lance, M. and Bataille, J., *J. Fluid Mech.*, **222**(1991), 95-118.
- (10) 富山明男・ほか4名, 機論, **62**-599, B(1996), 2558-2564.
- (11) Auton, T. R., *J. Fluid Mech.* **183**(1987), 199-218.
- (12) 松本洋一郎・村井祐一, 噴流工学, **13**-1(1996), 99-103.
- (13) Wang, L. and Maxey, M. R., *J. Fluid Mech.*, **256**(1993), 27-68.
- (14) 村井祐一・松本洋一郎, 機講論, No. 96-1, 3(1996), 375-376.