セル状火炎の構造に及ぼす流体力学的不安定の影響*

門 脇 敏^{*1}The Influence of Hydrodynamic Instability on the Structure
of Cellular Flames

Satoshi KADOWAKI

The influence of hydrodynamic instability on the structure of cellular flames is investigated using numerical method. The equation used is the compressible Navier-Stokes equation including an one-step chemical reaction. We superimpose sufficiently small disturbances on the plane flame and calculate the evolution of flame fronts to obtain the relation between the growth rate and the wave number, i. e., the dispersion relation. As the flame temperature increases, the growth rate becomes larger. The unstable range hardly changes, and the peculiar wave number is almost constant. Thus, the spacing between cells in the cellular flame is independent of the flame temperature. Moreover, we superimpose a considerably large disturbance with the peculiar wavelength to study the structure of cellular flames. The higher the flame temperature, the deeper the cell and the broader the flame surface. In addition, the cell depth and the surface area of the three-dimensional flame are larger than those of the two-dimensional flame.

Key Words: Combustion, Numerical Analysis, Cellular Flame, Hydrodynamic Instability, Flame Structure

1. は じ め に

火炎はつねに発熱反応を伴う。その熱により、火炎面近傍で気体は熱膨張し、気体の流速は増大する。そして、火炎面を通しての流速の増大は、火炎を不安定にする。気体の熱膨張に起因するこの不安定は、流体力学的不安定と呼ばれている⁽¹⁾⁽²⁾。火炎の不安定を議論するうえで、流体力学的不安定は最も本質的で、かつ必要不可欠な要因である。

流体力学的不安定はすべての火炎において存在する。その不安定により、多くの場合、セル状の火炎面が形成される。火炎面がセル状になることでその面積は増加し、火炎全体の燃焼速度は増加する。ゆえに、セル状火炎の燃焼速度を知るためには、その形状を知る必要がある。そして、そこから得られる知見は、乱流火炎のしわ状層流火炎モデル^{(3)~(5)}に関する重要な情報となるであろう。

一般に、火炎伸張や火炎面の曲率は、局所的な燃焼速度に影響を与える。しかし、両者の度合いが極端に大きくなく、かつルイス数 Le が1のとき、局所的な燃

焼速度の変化は小さい⁽⁵⁾⁽⁶⁾。ゆえに、 $Le=1$ のときのセル状火炎の燃焼速度は、火炎面の面積に比例することになる。また、そのセル状火炎の構造は、おもに流体力学的不安定により決定される。なぜなら、物質と熱の選択拡散による拡散・熱的不安定は、 $Le=1$ のとき生じないからである^{(7)~(9)}。

セル状火炎の構造に及ぼす流体力学的不安定の影響を調べるとき、拡散・熱的モデル⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いることはできない。なぜなら、このモデルでは気体の熱膨張の効果が無視されているからである。流体力学的不安定の影響を調べるためには、化学反応を考慮した圧縮性 Navier-Stokes (N-S) 方程式を用いる必要がある。これまでに、圧縮性 N-S 方程式を用いた非定常反応流れの数値計算が多数行われ、火炎の不安定性やセル状火炎の形状などが、いろいろな角度から詳細に調べられている^{(10)~(16)}。

本研究では、一段不可逆反応を考慮した圧縮性 N-S 方程式を用い、非定常反応流れの数値計算を行う。そして、じょう乱を加えられた平面火炎の不安定挙動を求め、セル状火炎の構造に及ぼす流体力学的不安定の影響を調べる。

* 原稿受付 1997年7月24日。

*1 正員、名古屋工業大学機械工学科(☎ 466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。

2. 支配方程式

圧縮性、粘性、熱伝導、物質拡散を考慮した二次元および三次元の非定常反応流れを考える。座標はデカルト座標を用いる。主流方向を x 方向とし、火炎面を $y-z$ 面とする。

支配方程式を導出するのに際して、以下の仮定を行う^{(14)~(16)}：(1)2種類の気体、つまり未燃ガスと既燃ガスのみが存在する。両方のガスは同じ分子量、同じルイス数をもつ。(2)気体は理想気体の状態方程式に従う。(3)化学反応は一段不可逆の発熱反応であり、その反応速度はアレニウスの法則に従う。(4)輸送係数と比熱は全領域において一定である。(5)放射、体積粘性、ソレ効果、デュフォ効果、圧力こう配拡散は無視する。(6)エネルギー保存の式における粘性項は無視する。

流れ場の物理変数を、代表長さ、代表速度、未燃ガスの密度を用いて無次元化する。ここで、代表長さは火炎の予熱域厚さ(=熱拡散率/燃焼速度)の80倍とし、代表速度は未燃ガスの等温音速とする。無次元化の仕方は、従来のそれと同様である⁽¹⁴⁾。三次元非定常反応流れの支配方程式は、ベクトル表示で以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad \cdots \cdots (1)$$

方程式中のベクトルはそれぞれ、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ \rho Y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho uv - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho uw - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ (e+p)u - \frac{1}{Pe} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho Yu - \frac{1}{PeLe} \frac{\partial Y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho v^2 + p - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho vw - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ (e+p)v - \frac{1}{Pe} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \rho Yv - \frac{1}{PeLe} \frac{\partial Y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho vw - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho w^2 + p - \frac{Pr}{Pe} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ (e+p)w - \frac{1}{Pe} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial T}{\partial z} \\ \rho Yw - \frac{1}{PeLe} \frac{\partial Y}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ QB\rho Y \exp(-E/T) \\ -B\rho Y \exp(-E/T) \end{bmatrix}$$

ここで、 t は時間、 ρ は密度、 u, v, w は速度の x, y, z 成分、 p は圧力、 e は全エネルギー、 T は温度、 Y は未燃ガスの質量分率、 Pe はペクレ数、 Pr はプラントル数、 γ は比熱比、 Q は発熱量、 B は頻度因子、 E は活性化エネルギーである。また、状態方程式は以下のようになる。

$$p = \rho T \quad \cdots \cdots (2)$$

3. 計算手法

本計算では、燃焼速度が 0.83 m/s の予混合火炎を想定する。無次元燃焼速度 S_u は、 2.5×10^{-3} である。計算で用いる無次元パラメータは、 $Pe = 3.2 \times 10^4$ 、 $Pr = 1.0$ 、 $Le = 1.0$ 、 $\gamma = 1.4$ 、 $E = 70$ である。流体力学的不安定の影響を調べるために、断熱火炎温度 T_f は、5.0、6.0、7.0、8.0、9.0 と設定する。また、発熱量と頻度因子は、 $T_f = 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0$ の火炎において、 $Q = 14.0, 17.5, 21.0, 24.5, 28.0$ 、 $B = 7.62 \times 10^7, 6.88 \times 10^6, 1.20 \times 10^6, 3.14 \times 10^5, 1.09 \times 10^5$ である。

計算手法として、時間、空間に対してともに二次精度であり、圧縮性流れの計算の代表的手法である陽的

マッコーマック法⁽¹⁷⁾を採用する。計算領域は、 x 方向に代表長さの 2 倍、 y, z 方向にじょう乱の一波長分とする。格子数は、二次元流れのとき、 x 方向に 341、 y 方向に 65 とし、三次元流れのとき、 x 方向に 261、 y 方向に 31、 z 方向に 53 とする。

平面定在火炎にじょう乱を加え、それを初期値として計算を行う。このときじょう乱は、火炎面を x 方向に移動させることにより与えられる。二次元火炎のときは、正弦波のじょう乱

$$\sin(2\pi y/\lambda_y)$$

三次元火炎のときは、六角形状のじょう乱⁽¹⁸⁾

$$\sin(2\pi y/\lambda_y) \sin(2\pi z/\lambda_z) - \cos(4\pi z/\lambda_z)/2$$

を加える。ここで、 λ_y, λ_z は、 y, z 方向の波長で、 $\lambda_z = \sqrt{3}\lambda_y$ の関係を満たす。

火炎の上流と下流における境界では、おのおのの物理量の x 方向のこう配を零とするが、 x 方向の流入速度は平面火炎の燃焼速度と一致させる。これらの境界における値は、二次精度の片側差分で近似する。また、 y, z 方向の境界では、周期条件を用いる。

4. 分散関係

二次元平面定在火炎の微小じょう乱に対する不安定挙動を調べる。初期振幅 a_0 は、 1×10^{-3} とする。図 1 は、微小じょう乱($\lambda_y = 0.427$)を平面火炎($T_f = 9.0$)に加えた場合の時間ごと($t = 0, 10, \dots, 50$)の火炎面形状を示したものである。ここでは、 $T = 0.8T_f$ のところを火炎面の位置と定義している。図 1 の横軸は a_0 で標準化されている。気体は図 1 の左方から右方へ流れ

Fig. 1 Evolution of the flame front in the 2-D flame for $T_f = 9.0$, $\lambda_y = 0.427$, and $a_0 = 1 \times 10^{-3}$ ($t = 0, 10, \dots, 50$)

ている。火炎に加えられたじょう乱は時間とともに指数的に増大する($a \sim \exp \omega t$)。このとき、増幅率 $\omega = 3.37 \times 10^{-2}$ である。また、予熱域厚さ $\delta = 0.0125$ であるので、 ω を S_u/δ で標準化すると、0.169 となる。本計算のようにじょう乱が指数的に増大するのは、その振幅が十分小さいときのみである。振幅がある程度大きくなると、増幅率はしだいに小さくなり、最終的には零になる。

火炎に加えるじょう乱の波長を変えて計算を行い、増幅率と波数 $k (= 2\pi/\lambda_y)$ との関係、つまり分散関係を求める。図 2 は、 $T_f = 5.0, 7.0, 9.0$ の火炎における分散関係を示したものである。三次元火炎においても、二次元火炎の場合と同様の結果が得られる。波数が小さい領域では、 T_f が増加するにつれ増幅率は大きくなる。これは、火炎の温度が高くなるとともに流体力学的不安定が強くなるからである。一方、波数が大きい領域では、増幅率は負、つまり安定である。そして、安定/不安定域を分ける波数が存在する。その波数は、 T_f の変化に対してほぼ不変である。つまり、安定/不安定域は火炎の温度に依存しない。この結果は、一見すると、我々の経験に反しているように思われる。実際、予混合気の成分を変えると、火炎の温度は変化し、安定/不安定域も変化する。しかし、ここでは無次元長さを用いていることに注意する必要がある。実際の長さで考えると、安定/不安定域は変化するが、無次元長さで考えると、それはほとんど変化しない。

増幅率が最大になる波数、つまり特性波数 k_p は、すべての火炎においてほぼ一定で、 $k_p = 14.7$ である。この特性波数に対応する特性波長は、二次元火炎のと

Fig. 2 Dispersion relations in the 2-D flames for $T_f = 5.0, 7.0, 9.0$

き, $\lambda_y = 0.427 = 34.2\delta$, 三次元火炎のとき, $\lambda_y = 0.494 = 39.5\delta$, $\lambda_z = 0.855 = 68.4\delta$ である. そして, 現象に現れるセル状火炎のセルの間隔は, これらの波長と等しくなる⁽¹⁵⁾.

Fig. 3 Evolution of the flame front in the 2-D flames for $T_f = 5.0, 7.0, 9.0$, $\lambda_y = 0.427$, and $a_0 = 2 \times 10^{-2}$ ($t = 0, 25, \dots, 250$)

5. セル状火炎

分散関係を求めた4章では, 平面火炎に微小じょう乱 ($a_0 = 1 \times 10^{-3}$) を加えて計算を行った. 本章では, セル状火炎の構造を調べるために, 比較的振幅が大きいじょう乱 ($a_0 = 2 \times 10^{-2}$) を火炎に加えて計算を行う. このとき, じょう乱の波長は4章で求めた特性波長と一致させる.

初めに, 二次元火炎を考える. $T_f = 5.0, 7.0, 9.0$ の火炎における時間ごとの火炎面形状を示したのが図3である. じょう乱の振幅は時間とともに増大し, 最終的にセル状の火炎面が形成される. そして, 火炎はセル形状を保ちつつ, 一定の速さで上流側へ移動する. この移動速度が燃焼速度の増分に相当する. なぜなら, 上流における x 方向の流入速度が平面火炎の燃焼速度と等しいからである. そして, この燃焼速度の増分は, 火炎面がセル状になることにより生じる面積の増分にほぼ比例している. 表1は, $T_f = 5.0 \sim 9.0$ の二次元セル状火炎における, セルの深さ ($= 2a$) と予熱域厚さの比: D/δ , セルの深さとセルの間隔の比: D/λ_y , セル状火炎と平面火炎との火炎面面積の比:

Table 1 Character of the flame front in the 2-D cellular flames for $T_f = 5.0 \sim 9.0$

T_f	D/δ	D/λ_y	A_{cf}/A_{pf}
5.0	8.64	0.253	1.17
6.0	9.70	0.284	1.21
7.0	10.7	0.313	1.25
8.0	11.5	0.336	1.28
9.0	12.3	0.360	1.32

Fig. 4 Curvatures of the flame front in the 2-D cellular flames for $T_f = 5.0, 7.0, 9.0$

Fig. 5 Shape of the flame front in the 3-D cellular flame for $T_f=9.0$, $\lambda_y=0.494$, $\lambda_z=0.855$, and $a_0=2 \times 10^{-2}$ ($t=100$)

Fig. 6 Distribution of cells in the 3-D cellular flame for $T_f=9.0$, $\lambda_y=0.494$, $\lambda_z=0.855$, and $a_0=2 \times 10^{-2}$ ($t=100$)

A_{cf}/A_{pf} を示したものである。セルの深さは、 T_f の増加とともに大きくなる。そして、セルの深さとセルの間隔の比、および火炎面面積の比も大きくなる。これは、流体力学的不安定の強度が大きくなるからである。図4は、 $T_f=5.0, 7.0, 9.0$ のセル状火炎における、火炎面の曲率の分布を示したものである。曲率 κ は、火炎面が上流側へ凸のとき正になるように定義してある。図4の縦軸は δ^{-1} で標準化されている。火炎面の凹部と凸部における曲率の絶対値は、 T_f の増加、つまり D の増加とともに大きくなる。また、火炎面の凹部における最小の曲率半径は、 $T_f=5.0, 7.0, 9.0$ の火炎において、 $2.6\delta, 2.2\delta, 2.0\delta$ である。

次に、三次元火炎を考える。 $T_f=9.0$ のセル状火炎の火炎面形状を示したのが図5である。図5に描いた領域は、 $3\lambda_y \times 2\lambda_z$ である。気体は図5の下方から上方へ流れている。図5より、六角形状の分布をもつセル状火炎が形成されているのがわかる。そして、この火炎面形状は、実験で観察されるセル状火炎のそれと定性的に一致している⁽¹⁹⁾。図6は、セル状火炎のセルの分布を示したものである。 $x=0.471, 0.545, 0.619$ における火炎面の輪郭が、実線、細線、破線で描かれている。図6より、セルが六角形状に整然と分布しているのがわかる。また、線分 P_1P_2, P_1P_3 は、 y, z 方向におけるセルの間隔を示したものである。それらの長さ

Table 2 Character of the flame front in the 3-D cellular flames for $T_f=5.0-9.0$

T_f	D/δ	D/λ_y	D/λ_z	A_{cf}/A_{pf}
5.0	16.5	0.418	0.241	1.42
6.0	18.4	0.466	0.269	1.50
7.0	20.4	0.516	0.298	1.59
8.0	22.1	0.559	0.323	1.67
9.0	23.7	0.600	0.346	1.75

Fig. 7 Curvatures of the flame front in the 3-D cellular flames for $T_f=5.0, 7.0, 9.0$

は, $\lambda_y, \lambda_z (= \sqrt{3}\lambda_y)$ と等しい。

火炎の温度を変えて計算を行い, おおのこのセル状火炎の構造を調べる。表2は, 三次元セル状火炎の火炎面の特性を示したものである。 T_f の増加とともに, セルの深さと火炎面の面積は大きくなる。また, 二次元火炎の場合と比較すると, セルはより深く, 火炎面はより広くなっている。これは, セルの間隔が広いこと, およびセルの分布の仕方が違うことによるものと思われる。一方, セルの深さとセルの間隔の比は, 二次元火炎のそれと比較すると, y 方向では大きく, z 方向では小さい。図7は, 線分 P_1P_2, P_1P_3 に沿った火炎面の曲率の分布を示したものである。曲率の絶対値は, T_f の増加とともに大きくなる。また, その最大値は, 二次元火炎のそれと比較すると, y 方向では大きく, z 方向では小さい。これは, 二次元と三次元火炎におけるセルの深さとセルの間隔の比の大小によるものと思われる。

6. お わ り に

二次元および三次元の非定常反応流れの計算を陽的マッコーマック法を用いて行い, セル状火炎の構造に及ぼす流体力学的不安定の影響を調べた。火炎の温度が高くなる, つまり流体力学的不安定が強くなるとともに, 増幅率は大きくなる。安定/不安定域はほとんど変化せず, 特性波長はほぼ一定である。ゆえに, 現象に現れるセル状火炎のセルの間隔は, 火炎の温度に依存せず一定である。火炎の温度が高くなるとともに, セル状火炎のセルは深くなり, 火炎面は広くなる。

また, 三次元火炎におけるセルの深さと火炎面の面積は, 二次元火炎のそれらより大きい。

文 献

- (1) Darrieus, G., unpublished works presented at La Technique Moderne (1938) and at Le Congres de Mecanique Appliquee (1945).
- (2) Landau, L. D., *Acta Phys.*, **19** (1944), 77-85.
- (3) Borghi, R., *Prog. Energy Combust. Sci.*, **14** (1988), 245-292.
- (4) Kuo, K. K., *Principles of Combustion*, (1986), 402-512, Wiley.
- (5) Williams, F. A. (柘植俊一監訳), 燃焼の理論, (1987), 387-465, 日刊工業新聞社.
- (6) Law, C. K., *Proc. 22nd Int. Symp. Combust.*, Combust. Inst., (1988), 1381-1402.
- (7) Barenblatt, G. I., Zeldovich, Y. B. and Istratov, A. G., *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **4** (1962), 21-26.
- (8) Sivashinsky, G. I., *Combust. Sci. Technol.*, **15** (1977), 137-145.
- (9) Joulin, G. and Mitani, T., *Combust. Flame*, **40** (1981), 235-246.
- (10) Patnaik, G., ほか3名, *Proc. 22nd Int. Symp. Combust.*, Combust. Inst., (1988), 1517-1526.
- (11) 門脇敏, 機論, **56**-527, B(1990), 2104-2108.
- (12) Patnaik, G. and Kailasanath, K., *Combust. Flame*, **99** (1994), 247-253.
- (13) Denet, B. and Haldenwang, P., *Combust. Sci. Technol.*, **104** (1995), 143-167.
- (14) Kadowaki, S., *Combust. Sci. Technol.*, **107** (1995), 181-193.
- (15) Kadowaki, S., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **17** (1996), 557-566.
- (16) Kadowaki, S., *Phys. Rev., E*, **56**(1997), 2966-2971.
- (17) McCormack, R. W. and Baldwin, B. S., *AIAA Paper*, **75**-1 (1975).
- (18) Christopherson, D. G., *Q. J. Math.*, **11** (1940), 63-65.
- (19) Searby, G. and Quinard, J., *Combust. Flame*, **82** (1990), 298-311.