密度成層場における点吸込流れによる選択取水形成過程*

片岡 武^{*1}, 蔦原道久^{*1}, 真下悟史^{*2}Dynamics of Establishment of Selective Withdrawal of a Stratified Fluid
from a Point Sink

Takeshi KATAOKA, Michihisa TSUTAHARA and Satoshi MASHITA

Numerical studies of establishment of selective withdrawal from a point sink of a linearly stratified Boussinesq fluid in a reservoir of uniform depth have been performed. The flow, which is axisymmetric with respect to the vertical axis passing through the point sink, is mainly characterized by the Froude number (Fr). When the Froude number is small, the columnar disturbance modes propagate upstream in the same manner as in the line sink flow (two-dimensional) case and that the selective withdrawal is established. We have found, however, the major difference in the large Froude number flows, where in the two-dimensional case the columnar disturbances can not propagate upstream, while in the axisymmetric case these can propagate upstream for any finite Froude number except infinity. Amplitude of these columnar disturbances relative to a basic current velocity becomes smaller as the Froude number increases so that the selective withdrawal ceases to occur at $Fr=1.5$.

Key Words: Axisymmetric Flow, Numerical Analysis, Stratified Flow, Point Sink, Selective Withdrawal

1. 緒 言

密度成層場に吸込口をもうけ、そこから流体を吸い込むと、吸込口高さ付近の流体のみが流れ込む。この現象は選択取水と呼ばれ、これまで数多くの研究がなされてきた。特に流れが空間二次元となる線吸込みの場合、Yih⁽¹⁾により非粘性定常厳密解が求められ、流れを特徴づけるパラメータであるフルード数(以降、 Fr と略す)が $1/\pi$ よりも小さい場合に定常状態で選択取水が起きることが示された。この境目の Fr は一般に臨界フルード数と呼ばれている。Pao-Kao⁽²⁾はその後、この流れを静止状態から始まる初期値問題として取扱い、選択取水の形成過程を調べた。それにより、選択取水は、吸込付近で発生するcolumnar disturbances(以降、col. dist.と略す)と呼ばれる水平方向波長無限大の内部波が、次々と上流へ伝ばすることによって、完成されることが示された。また、このcol. dist.(shear frontsとも呼ばれる)の特徴は、McEwan-Baines⁽³⁾が吸込流れとは別の問題設定を用

いて、理論、実験的に明らかにした。このほかにも、密度成層場における線吸込流れに関する研究^{(4)~(14)}は多い。

一方、より実際の流れに近いと思われる点吸込流れ^{(13)~(18)}(この場合、吸込点を通る鉛直軸に関して流れは軸対称となる)に関しては、あまり調べられていないのが現状である。本研究では特に二つの点に着目した。まず一つは定常状態における臨界フルード数の存在である。Yih⁽¹⁵⁾は、日野ら⁽¹⁶⁾が導いた定常点吸込流れに対する基礎方程式系を解き、あらゆる Fr に対して流れが振動する非現実的な解となることを示した。すなわち定常状態に対する理論的アプローチは困難であった。Iveyら⁽¹⁷⁾やSpiegelら⁽¹⁸⁾による実験も、選択取水が明らかに発生する小さい Fr の流れのみを対象としており、いまだ臨界フルード数の存在は調べられていない。

もう一つ挙げられるのはcol. dist.の振る舞いに関してである。これまで、点吸込流れを非定常問題として取扱った研究に、Iveyら⁽¹⁷⁾による実験と、片岡ら⁽¹³⁾による理論的解析がある。前者は吸い込み始めてから選択取水にいたるまでにかかる時間、選択取水時の吸込領域厚さの測定等に主眼を置いた研究であり、col. dist.の振る舞いに関しては、水平方向に長波

* 原稿受付 1997年12月22日.

^{*1} 正員, 神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1).^{*2} 神戸大学大学院.

E-mail: kataoka@mech.kobe-u.ac.jp

長近似を用いた簡単な線形解析にとどまっている。また、後者は長波長近似を用いずに線形解析を行った研究である。つまりいずれも線形近似が成り立つ範囲における col. dist. に関する研究であり、これは Fr が非常に小さい場合にしか適用できない。

そこで本研究では、鉛直方向に直線的に密度成層化した流体の点吸込流れを数値解析的に取扱うことで、臨界フルード数の存在と、col. dist. の振る舞いを調べた。数値的に取扱う理由は、本研究の目的の一つである col. dist. の振る舞いが、詳細にとらえられる点にある。以下、2章で問題設定、3章で基礎方程式、4章で数値計算法を説明し、5章で計算結果ならびにその考察を行う。

2. 初期値問題

図1に示すような水平方向に無限に広い、深さ $2d$ の貯水槽を考え、深さ d の部分に吸込点を一つ設置する。また、原点が吸込点と一致するような円筒座標系 $r-\theta-z$ を導入し、 z の負の方向に重力加速度 g が働いているとする。最初、流体は静止しており、次式に示すように z 方向に直線的に密度成層しているとする。

$$\rho(z) = \rho_0(1 - \kappa z) \quad (1)$$

ただし、 ρ_0 は $z=0$ 上の初期密度、 κ は正定数である。そこで、ある時刻 $t=0$ より、単位時間当たり体積流量 $2Q$ の取水を開始した後の貯水槽内の密度成層流の振る舞いを調べる。この流れは z 軸に関して軸対称であり、解析は $r-z$ 平面上のみで行われる。また、 $\kappa d \ll 1$ のとき Boussinesq 近似が適用できるが、貯水池等では、一般に $\kappa d = O(10^{-4})$ 程度の値をとる⁽¹²⁾ ため、本研究では、Boussinesq 近似を採用する。このとき、流れは r, z 軸それぞれに関して対称となり、対称軸上で滑りの条件を課すことで、第1象限のみで解析を行う。

Fig. 1 Geometry

3. 基礎方程式

密度は初期密度 $\bar{\rho}$ とそれからのずれとの和により、

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho' \quad (2)$$

で表される。いま r, z 方向流速をそれぞれ u, w とし、次に示す無次元量を導入する。

$$(u^*, w^*) = \left(\frac{u}{U_0}, \frac{w}{U_0} \right), \quad t^* = Nt$$

$$(r^*, z^*) = \left(\frac{r}{d}, \frac{z}{d} \right), \quad \rho^* = \frac{g}{\rho_0 N U_0} \rho' \quad (3)$$

ただし、 $U_0 = Q/d^2$ は参照速さ、 $N = (\kappa g)^{1/2}$ は浮力振動数を表す。基礎方程式は連続の式、Boussinesq 近似を施した Navier-Stokes 方程式、拡散項をつけ加えた非圧縮の式である。連続の式より、無次元流れ関数 ϕ^* が導入できるので、基礎方程式は、上記無次元量に対応して次のように表される(ただし、アスタリスクを省略する。これ以降の文章も特に断りのない限り、すべて無次元量のみで記述するため、アスタリスクを略す)。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + Fr \left(u \frac{\partial \xi}{\partial r} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{u}{r} \xi \right) = \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\xi}{r^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + Fr \left(u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = w + \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (7)$$

式(4)は渦度方程式で、 r, z 方向 Navier-Stokes 方程式を空間交差微分することにより得られる。また、 $Fr = Q/Nd^3$, $Gr = N^2 d^4 / \nu^2$, $Pr = \nu/D$ はそれぞれ、フルード数、グラスホフ数、プラントル数であり、 ν , D はそれぞれ動粘性係数、密度の拡散係数を表す。初期条件は、

$$\xi = \rho = 0 \quad (r > 0, \quad 0 < z < 1) \quad (8)$$

境界条件は

$$\phi = 0, \quad \xi = \rho = 0 \quad (r > 0, \quad z = 0)$$

$$\phi = -1, \quad \xi = \rho = 0 \quad (r > 0, \quad z = 1)$$

$$\phi = -1, \quad \xi = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, \quad 0 \leq z \leq 1)$$

$$\phi = -z, \quad \xi = 0, \quad \rho = 0 \quad (r = \infty, \quad 0 \leq z \leq 1)$$

$$\quad \quad \quad (9)$$

ここで、式(9)の第1, 2行めの上下壁面境界条件は滑りの条件を課している。したがって、密度成層部分が上下の密度躍層によって挟まれた状態を考えていた

だくとよい。このような状況は貯水池などでも実際によく起こる現象であり、この場合、躍層部を固定して滑りの条件を課した場合と流れの様子はほとんど変わらない。実際、過去のほとんどの吸込流れの研究^{(2)(10)~(12)}においても、滑りの条件が用いられている。また、式(9)の第3行めで表される $r=0$ 上のおよび ρ に関する境界条件は、 z 軸に関する対称性より導かれる。つまり、 $r=0$ において、 w の r 方向変化ならびに u が零であることから $\xi=0$ が得られる。 ρ は対称性より明らかにその r 方向変化が零である。

4. 数値計算法

3章で示した基礎方程式系を流れ関数・渦度法⁽²⁾⁽¹⁹⁾を用いて差分計算を行った。式(4)、(5)の左辺の移流項に関しては、三次精度の風上差分(UTOPIA)⁽²⁰⁾を用い、時間に関しては二次精度の予測子・修正子法を採用した。また、式(6)はSOR法による反復計算を用いて解いた。空間メッシュ数は500(r 方向) $\times$ 80(z 方向)で、 $r=110$ において上流無限遠の境界条件を与えた。ただし、いま考えている点吸込流れは、原点すなわち吸込部で流速が無限大となるため、計算が発散してしまう。そこで本研究では、有限の小さな吸込口によって吸込点を模擬した。具体的には、 $z=0$

上の $0 \leq r \leq 0.15$ の範囲で総体積流量 Q となるような様な z 方向流速をもつように、この部分の流れ関数の境界条件を与えた。

いま、ここで説明した計算結果を解析解と比較してみる。葛原⁽²¹⁾は $Fr=0$ での非粘性点吸込流れに対する厳密解を求めた。図2に無次元時間 $t=20$ での厳密解と、 $Fr=0.001$, $Gr=10^{10}$, $Pr=730$ での計算結果双方の u_1/U 、すなわち第1モード col. dist. がもつ水平方向流速振幅の同地点での平均流速に対する相対的大きさ [5章の式(10), (11)参照] の分布を示した。 $z=0$ 上に有限の吸込口を設けた影響で、吸込口付近($r < 1.5$)はややずれがみられるものの、それ以外の部分に関してよく一致している。

また、 $r=110$ で与えた境界の影響を調べるため、図3に無限遠での境界条件を $r=110$ ならびに150で与えた場合の $Fr=0.2$, $Gr=10^{10}$, $Pr=730$ での u_1/U の分布を示した。図3より、両者の分布にほとんど差はみられず、無次元時間300までの計算においては、無限遠の境界条件を $r=110$ で課することが妥当であることを示している。

5. 結果と考察

Gr , Pr をそれぞれ 10^{10} , 730に固定し(非粘性に近い), Fr を0.001から3.0までの範囲で11ケースの計算を行った。吸込みを開始するとともに、 z 方向に関して三角関数形の r 方向流速をもつ col. dist. が次々と上流へ伝ばし、その結果、水平方向流速分布(無次元)は次のように表される。

$$u(r, z, t) = -U(r) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) \cos n\pi z \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$u_n(r, t) = -2 \int_0^1 [u(r, z, t) + U(r)] \cos n\pi z dz \quad \dots\dots\dots (11)$$

Fig. 2 Profiles of the relative amplitude of the 1st col. dist. mode u_1/U at $t=20$. The solid and the broken line indicate a theoretical solution for $Fr=0$ and a numerical solution for $Fr=0.001$ ($Gr=10^{10}$, $Pr=730$), respectively

Fig. 3 Profiles of the relative amplitude of the 1st col. dist. mode u_1/U as a function of r at $t=300$ for $Fr=0.2$, $Gr=10^{10}$ and $Pr=730$. The solid and the broken line indicate numerical solutions for $r_{\max}=110$ and 150, respectively. Here $r_{\max}$ denotes a horizontal distance from a sink where the boundary conditions at infinity are imposed

ここで, $U(r)=1/2\pi r$ は吸込点に向かって流れる基本平行流の速さ, n は col. dist. のモード番号, u_n は第 n モード col. dist. の振幅である. すなわち式(10)右辺の第2項が, col. dist. 自身をもつ水平方向流速を表している.

図4に $Fr=0.2$ に対する $t=100, 200$ における流線を示した. 時間の経過とともに, よどみ領域が上流(図の右側)へ伝ばしている様子がわかる. また, この

伝ば速度は第1モード col. dist. の群速度($1/\pi$)と一致している. そこで, col. dist. の振る舞いをより詳細にみるため, 図5に $Fr=0.05, 0.2, 1.0, 3.0$ での u_1/U , すなわち第1モード col. dist. がもつ水平方向流速振幅の同地点での平均流速に対する相対的大きさの分布を示した. この量は, 選択取水が起きているか否かを知るうえで重要な量である. 大きければ, col. dist. の影響が大きいことを示している. もし, この値

Fig. 4 Streamlines at $t=100$ (top) and 200 for $Fr=0.2$

Fig. 5 Profiles of the relative amplitude of the 1st col. dist. mode u_1/U as a function of r at three different times $t=100, 200$ and 300 (from left to right). From top $Fr=0.05, 0.2, 1.0$ and 3.0, respectively

が1を越えれば、上部壁($z=1$)での r 方向流速がプラスとなる[式(10)参照]ため、このモードの存在のみによってよどみ領域が生じる、つまり選択取水が起きていることになる。以降、単にモードの相対振幅と呼ぶ。図5によると、モード先端部の相対振幅が時間の経過とともに増大しており、つねにほぼ一定値を保ち続ける線吸込みの場合⁽³⁾⁽¹³⁾とは異なっている。この現象は、 $Fr=0$ に対する $t \rightarrow \infty$ での漸近理論解⁽¹³⁾からも導かれているが、本研究で、あらゆる Fr に対してこのような傾向の起きることが示された。そこで Fr への依存性をより詳しくみるため、各 Fr に対して、先端部における相対振幅の時間への依存性をプロットしたものが図6である。ここで $Fr=0$ の分布は漸近理論解の結果である。これより、非粘性非拡散性流体の場合、いずれの Fr に対しても相対振幅が無次

元時間 $t^{1/3}$ に比例していることがわかる。ただし、長時間経過後にグラフが直線からやや下方へ曲がっているのは、計算の際、 $Gr=10^{10}$ としたことによる弱い粘性の影響である。これは、図6中の $Fr=0$ の漸近理論解と $Fr=0.001$ の計算結果との比較より明らかであろう。

また、 Fr の増加とともにグラフのこう配が減少しており、 Fr が大きいほど上流へ伝ばする col. dist. の相対振幅が小さくなることを示している。これに関する物理的考察は以下のとおりである。非圧縮流であるから、吸込みにより、無限大の速さで伝わるじょう乱が存在する。そのじょう乱の相対振幅は、吸込点からの距離 r を用いて、 $K_1(r)$ に依存する(K_1 は一次の第2種変形 Bessel 関数を表す)⁽¹³⁾。つまり、無限大の速さで広がるじょう乱は r の増加とともに急激に小さくなる。これらのじょう乱は、その後モードを形成して内部波モードの群速度で伝ばすることになるが、その際、吸込みによって誘起される流速よりも群速度が小さければ、吸込口方向へ流れて上流へ伝ばできないこととなる。いま、第1モードの水平方向伝ば速度は有次元で Nd/π 、吸込口へ向かう流速は $Q/2\pi r d^2$ (ここでの r は無次元であることに注意)であるので、 $r > Fr/2$ を満たすじょう乱のみが上流へ伝ばする。すなわち、 Fr が大きいほど上流へ伝ばする波(col. dist.)の相対振幅は急激に小さくなるのである。

さて、この考察に基づくと、 Fr が無限度でない限り、col. dist. は小さくとも必ず伝ばするということになる。実際、図5において $Fr=3.0$ という大きな Fr のケースでも、col. dist. の相対振幅が小さいながらも上流へ伝ばしている。つまり、あらゆる有限の Fr に

Fig. 6 The relative amplitude of the front of the 1st col. dist. mode as a function of $t^{1/3}$

Fig. 7 Profiles of the relative amplitude of the 2nd (top) and 3rd (bottom) col. dist. mode as a function of r at three different times $t=100, 200$ and 300 (from left to right) for $Fr=1.0$

Fig. 8 Steady-state horizontal velocity profiles on $r=2, 3, 4, 6$ and 8 . From top $Fr=0.05, 0.2$ and 1.0 , respectively

Fig. 9 Steady-state withdrawal-layer thickness as a function of $Fr^{1/3}$

対して col. dist. は必ず上流へ伝ばすると考えられる。また、いったん上流へ伝ばすれば、その相対振幅は $t^{1/3}$ に比例して増加するのであるから、非粘性非拡散性流体では時間が十分経過すれば、あらゆる Fr に対して波の先端で必ずよどみ領域が生じるといえる。

再び図5において、今度は波の後方(吸込点に近い側)に着目する。すると、ある固定空間座標 r 上の相対振幅は、時間の経過とともにある一定値に収束していくことがわかる。図7に $Fr=1.0$ での第2, 3モードの相対振幅の分布を示したが、この傾向は高次モードにおいても同様であることがわかる。したがって、定常状態が存在する。図8にほぼ定常状態に到達したと思われる地点での $t=300$ での水平方向流速分布を示した。図7より、吸込層厚さ δ (ここでは Imberger⁽¹²⁾ に従い、 r 方向流速が $z=0$ 上の流速の $1/12$ となる点の z 座標と定義する) が r に依存せず、 Fr に依存することがわかる。そこで Fr への依存性を明確にするため、吸込層厚さをプロットした図が図9である。これより、 δ は

$$\delta = 0.87 Fr^{1/3} \dots \dots \dots (12)$$

で表される。過去の研究では、Ivey ら⁽¹⁷⁾ が $\delta = 0.83 Fr^{1/3}$ 、Spiegel ら⁽¹⁸⁾ が $\delta = 1.02 Fr^{1/3}$ という実験結果を報告している。点吸込流れにおいては誘起される流速が小さいために、その読取りが困難であり、それによる実験誤差を考慮すれば、いずれも比較的一致した結果であるといえる。ただし、彼らの実験は Fr の小さな流れ(最大 0.02)に対する結果であり、 Fr が大きくなって、吸込層厚さが流路深さに近づいた際、上下壁がどのように吸込層厚さに影響を及ぼすのかは

いまだ調べられていなかった。図9によると、大きな Fr においても同様の結果が得られており、非粘性非拡散流において、上下壁が吸込層厚さに及ぼす影響はまったくないことがわかる。

一方、本計算結果ならびに実験結果同士の間には、定量的にややずれがあるとみることでもでき、そのずれの理由を簡単に述べておく。実験誤差以外の最も大きな要因の一つは、両実験とも有限の水槽内で行われたことが挙げられるであろう。すなわち、有限水槽の場合、反射波が流れ場に影響を与え、その結果、一般に吸込幅は反射波のない場合よりも大きくなる。Imberger ら⁽¹⁰⁾ は、線吸込流れの場合でその効果に関して調べているので参照されたい。点吸込流れの場合、測定地点における水槽の奥行き長さが小さいほど、反射波の影響を受けて吸込層厚さが大きくなると考えられる。Ivey らは(測定地点における流れ方向長さ)×(奥行き)×(深さ)が $60 \times 60 \times 30$ cm, Spiegel らは $460 \times 70 \times 100$ cm の水槽を用いている。したがって、反射波の効果に関しては両者とも同程度であるといえる。

また、水槽内の水量が有限であることにより、吸込みによって抜き取られた部分の上部側には低密度流体、下部側には高密度流体が補充される。したがって吸込高さ付近の密度こう配は大きくなり、その結果、実質的な Fr が減少し、この場合は吸込幅が小さくなる。この効果に関しては、Ivey らや Spiegel らも言及しており、水槽内の総水量が小さいほど影響を受ける。前者のほうが総水量の小さな水槽を用いており、その分、吸込層厚さも小さな値となっていることがわかる。

したがって本研究結果の位置づけとしては、貯水池や海洋等、水量がふんだんにあるケースを想定した場合と考えていただければよい。

最後に、臨界フルード数について述べる。軸対称吸込流れの場合、臨界フルード数はその定義の仕方によって違う値をもつ。もし、選択取水が起きるか否かを区別するパラメータ、すなわち無次元吸込厚さが1となるところの値をとるのであれば、約1.5となる〔式(12)参照〕。もし、col. dist. が上流へ伝ばするか否かを区別するパラメータならば、無限大となる。線吸込流れの場合、両者の値は $1/\pi$ で一致する⁽¹⁾⁽⁴⁾。

6. 結 言

鉛直方向一定深さの貯水槽内で、直線的に密度成層化した流体の点吸込流れを数値解析し、以下の結果を

得た。

(1) 流れを支配するパラメータである Fr が小さいとき、線吸込流れと同様に、col. dist. が上流へ伝ばすることにより、選択取水が形成される。

(2) 線吸込みの場合と異なり、 Fr が大きくとも col. dist. が上流へ伝ばする。

(3) col. dist. の先端での水平方向流速は、時間の経過とともに同地点での基本流速に対して相対的に大きくなっていくため、あらゆる Fr に対して波の先端で必ずよどみ領域が発生する。

(4) 定常状態での吸込幅 δ は、吸込点からの距離に依存せず、 Fr に依存し、その依存性は無次元量で $\delta = 0.87 Fr^{1/3}$ と表される。

(5) 選択取水が起きるか否かの臨界フルード数は約1.5、col. dist. が上流へ伝ばするか否かの臨界フルード数は無限大である。

文 献

- (1) Yih, C. S., *Proc. 3rd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, New York, (1958), 857-861.
- (2) Pao, H. P. and Kao, T. W., *J. Fluid Mech.*, **65** (1974), 657-688.
- (3) McEwan, A. D. and Baines, P. G., *J. Fluid Mech.*, **63** (1974), 257-272.
- (4) Yih, C. S., *Stratified Flows*, (1980), 110-122, Academic Press.
- (5) Debler, W. E., *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **85** (1959), 51-65.
- (6) Kao, T. W., *Phys. Fluids*, **13** (1970), 558-564.
- (7) Ingber, M. S. and Mitra, A. K., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **109** (1987), 384-388.
- (8) Kao, T. W., Pao, H. P. and Wei, S. N., *J. Fluid Mech.*, **65** (1974), 689-710.
- (9) Clarke, S. R. and Imberger, J., *Phys. Fluids*, **7** (1995), 1523-1528.
- (10) Imberger, J., Thompson, R. and Fandry, C., *J. Fluid Mech.*, **78** (1976), 489-512.
- (11) Imberger, J. and Fandry, C., *J. Fluid Mech.*, **70** (1975), 321-332.
- (12) Imberger, J., *J. Fluid Mech.*, **53** (1972), 329-349.
- (13) 片岡武・蔦原道久, 日本流体力学会誌「ながれ」, **16** (1997), 248-258.
- (14) Koh, R. C. Y., *J. Fluid Mech.*, **24** (1966), 555-575.
- (15) Yih, C. S., *Q. Appl. Math.*, (1982), 101-104.
- (16) 日野幹雄・大西外明, 土木学会論文報告集, **163** (1969), 39-48.
- (17) Ivey, G. N. and Blake, S., *J. Fluid Mech.*, **161** (1985), 115-137.
- (18) Spiegel, R. H. and Farrant, B., *J. Hydraul. Res.*, **22** (1984), 35-51.
- (19) 数値流体力学編集委員会編, 非圧縮性流体解析, (1995), 75.
- (20) 棚橋隆彦, CFD 数値流体力学, (1993), 336, アイピーシー.
- (21) 蔦原道久・片岡武, 日本流体力学会年会講演論文集, (1996), 473-474.