球面調和関数を用いたスペクトル法による 球状液滴内三次元過渡表面張力対流の数値解析手法*

戸谷 剛^{*1}, 黒田 明 慈^{*2}, 工 藤 一 彦^{*2}

Three-Dimensional Numerical Analysis on Transient Marangoni Convection in a Liquid Droplet Using Spherical Harmonic Spectral Method

Tsuyoshi TOTANI, Akiyoshi KURODA and Kazuhiko KUDO

A method is developed to analyze the three-dimensional transient Marangoni convection in a liquid droplet heated by a concentric warm rigid sphere set in the center and cooled uniformly from its surroundings. As the system is unstable and the convection is very sensitive to the temperature gradients along the surface, it is required for the scheme to be highly accurate and be free from the effects of the polar singularities. For the purpose, a spherical harmonic spectral method is developed to analyze the flow and temperature fields in the droplet on the three-dimensional spherical coordinate system. The newly developed method gives almost the same pattern of results for two systems with the same pattern of initial temperature disturbances on coordinate systems which are shifted by 90° in each other. This indicates that the present method is free from the effects of the direction of the coordinate system, and shows the validity of the method.

Key Words: Numerical Analysis, Surface Tension, Three-Dimensional Flow, Viscous Flow, Spectral Method, Droplet, Marangoni Convection, Spherical Harmonics

1. 緒 言

液面に沿って温度こう配があるとき、表面張力は一般に高温部で弱く、低温部で強いため、液面に表面張力こう配ができ、表面張力対流が発生することが知られている。この効果は Marangoni 効果と呼ばれ、特に宇宙空間などの微小重力環境下で顕現しやすい。著者らは、宇宙ステーション、宇宙工場といった大型の宇宙構造物における熱制御機器として実用化が期待されている次世代形宇宙用放熱器の一つである液滴放熱器⁽¹⁾の基礎研究として、液滴から外界への放熱を促進させる表面張力対流について実験⁽²⁾および数値解析^{(3)~(5)}を行ってきた。

このような外部から冷却される液滴は不安定で、表面の微小な温度差によって一度対流が発生すると、表面の高温部に内部からさらに高温の流体が供給されるために、表面張力こう配がきつくなり、急速に対流運動が発達する。著者らによるこれまでの解析の結果、このような不安定状態で発生する表面張力対流を球座

標系を用いて数値解析するためには、高精度でかつ極の特異性の影響が最小となるような解析手法が必要であることがわかってきた。

球面調和関数を用いたスペクトル法は、高精度であり、また格子点法で必要となる極での特殊な取扱いを必要としない利点をもつため⁽⁶⁾、気象関係などでは代表的な計算手法の一つとなっている。しかしながら気象関係の計算では、球面に沿う二次元流れを仮定して、流れ関数と渦度を従属変数として扱った例がほとんどである。三次元流れの場合にはベクトルポテンシャルを従属変数とする方法が考えられるが、表面張力こう配によって流体がせん断力を受けることを表す Marangoni 効果を境界条件に設定することが困難となる。そのため、従属変数には速度を用いる数値解析手法が望ましい。また表面張力対流に限らず、さまざまな流れに対して、ベクトルポテンシャルを用いた手法は、境界条件の設定に関しては汎用性が少ない。したがって、速度を従属変数とする解析手法の開発は有用性が高いといえる。

そこで著者らは新たに、球状の系を対象とした、速度および渦度を従属変数にする球面調和関数を用いたスペクトル法による高精度の数値解析手法を開発し、本解析手法が液滴における表面張力対流の解析に有効

* 原稿受付 1998年3月2日。

^{*1} 正員、北海道大学大学院 (☎ 060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)。

^{*2} 正員、北海道大学大学院工学研究科。
E-mail: kuroda@eng.hokudai.ac.jp

であることを検証した。

2. 記 号

- a : 温度伝導率 m^2/s
 Bi : Biot 数
 Ma : Marangoni 数
 Pr : Prandtl 数
 h : 熱伝達率 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
 $\tilde{P}_n^m(\cos \theta)$: 正規化因子を 2 として正規化された Legendre 陪関数
 p : 無次元圧力
 R_0 : 剛体球無次元半径 $= R_0^*/s^*$
 R_1 : 液滴無次元半径 $= R_1^*/s^*$
 r, θ, ϕ : 球座標系
 s^* : 液層厚さ m
 T : 無次元温度
 t : 無次元時間
 u_r, u_θ, u_ϕ : r, θ, ϕ 方向速度
 u^* : 表面張力と粘性による速度スケール
 $= \frac{\partial \sigma_s}{\partial T^*} \frac{\Delta T^*}{\eta} \quad \text{m/s}$
 $\tilde{Y}_n^m(\theta, \phi)$: 正規化因子を 4π として正規化された球面調和関数 $= \tilde{P}_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$
 ΔT_{ini} : 初期温度外乱の振幅
 ΔT^* : 剛体球と外界との温度差 K
 λ : 熱伝導率 $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
 η : 粘性係数 $\text{Pa} \cdot \text{s}$
 ν : 動粘性係数 m^2/s
 σ_s : 表面張力 N/m
 $\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$: r, θ, ϕ 方向無次元渦度
 添 字
 () $_n^m$: スペクトル係数
 () * : 有次元量
 () $'$: 共役複素数

3. 解 析 手 法

3.1 解析系 解析系を図 1 に示す。液滴は内部に温度一定の同心剛体球を有し、これによって加熱されている。また外界から対流熱伝達によって一様(熱伝達率一定)に冷却されている。この境界条件の下で、液滴内で流動がない定常熱伝導状態を初期状態として、液滴表面に振幅 ΔT_{ini} の温度外乱が加わったときに発生する表面張力対流を解析対象とする。

この系は、液層厚さ s^* 、剛体球と外界との温度差 ΔT^* 、表面張力と粘性による速度スケール u^* を代表値として無次元化することができ、独立な無次元数は

Fig. 1 Coordinate and analytical system

Marangoni 数, Prandtl 数, Biot 数の三つである。なお、座標系は境界条件を表現しやすい球座標系を採用した。

$$Ma = \frac{\partial \sigma_s}{\partial T^*} \frac{s^* \Delta T^*}{\eta a} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Bi = \frac{hs^*}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (3)$$

3.2 温度場の取扱い 基礎式には三次元非定常非圧縮性 Newton 流体のエネルギー方程式(4)を用いた。温度境界条件は式(8)が剛体球の温度が一定であることを、式(9)が液滴が外界から対流熱伝達によって冷却されていることを表している。(エネルギー方程式)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N_T = \frac{1}{Ma} \nabla^2 T \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 N_T はエネルギー方程式の対流項であり、 ∇^2 は Laplacian である。

$$N_T \equiv u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \nabla_s^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\nabla_s^2 \equiv \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

(温度境界条件)

$$T(R_0, \theta, \phi, t) = 1.0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -Bi T(R_1, \theta, \phi, t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

3.3 基礎式の離散化 基礎式の離散化についてエネルギー方程式を例に説明する。基礎式は表面方向に球面調和関数を用いたスペクトル法⁽⁷⁾によって離散化される。エネルギー方程式は、温度 T および対流項 N_T をスペクトル展開した。

$$T(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^M T_n^m(r, t) \tilde{Y}_n^m(\theta, \phi) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$N_T(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^M N_{Tn}^m(r, t) \tilde{Y}_n^m(\theta, \phi) \dots\dots\dots (11)$$

を式(4)に代入して、 $1/4\pi \cdot \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\dots) (\tilde{Y}_n^m)' d \cos \theta d\phi$ をとることによって、以下のように表面方向に離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_n^m &= -N_{Tn}^m \\ &+ \frac{1}{Ma} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_n^m}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} T_n^m \right\} \\ (0 \leq m \leq M, m \leq n \leq M) &\dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

球面調和関数は ∇_s^2 の固有関数であるので、離散化された式中の拡散項は波数ごとに独立したものとなる。そのため拡散項を時間的に陰的処理することが非常に簡単になる。

半径方向空間離散化には二次精度中心差分法を、時間的離散化には対流項に二次精度 Adams-Bashforth 法、拡散項に Crank-Nicholson 法を用いた。

対流項は変換法⁽⁸⁾を用いて計算したが、aliasing 誤差を除去した場合と除去しない場合で結果に差が見られた。そこで、本解析では aliasing 誤差を除去して計算を行った。

3・4 速度場および圧力場の取扱い 速度場の基礎式には球座標系の各方向成分 u_r, u_θ, u_ϕ の運動方程式を用いるのが自然な選択であるが、表面方向速度成分 u_θ, u_ϕ は、極で不定となる特異性を有する。

このことを球面調和関数を用いたスペクトル法の範

ちゅうで考えると次のようになる。例えば u_θ は、

$$\begin{aligned} u_\theta(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{n=0}^M u_{\theta n}^0(r, t) \tilde{P}_n^0(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=m}^M u_{\theta n}^m(r, t) \tilde{P}_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

と展開できる。ここで、右辺第1項は $m=0$ 成分で ϕ に依存しないため、 ϕ 方向に一様な成分を表し、右辺第2項は $m \neq 0$ 成分で、 ϕ 方向に非一様な成分を表している。 u_θ は極に近づくとき ($\theta \rightarrow 0, \pi$)、一般に ϕ の値によって収束値が異なるため、式(13)のようにスペクトル展開した場合、 ϕ 方向に非一様な成分である右辺第2項が有限値に収束することが求められる。ところが、式中の Legendre 陪関数 $\tilde{P}_n^m(\cos \theta)$ は図2(b)に示すように、 $m \neq 0$ では極に近づくにつれ零に収束する。そのため $u_{\theta n}^m(r, t) (m \neq 0)$ には絶対値として大きい値が入り、結果として u_θ の値は Gibbs 現象と呼ばれる振動を生じ、精度の悪いものとなる。このことを回避するために式(13)の右辺第2項が極で有限値となる u_θ, u_ϕ そのものを従属変数とせず、極で零となる $u_\theta \sin \theta, u_\phi \sin \theta$ を変数として用いる方法が有効である⁽⁶⁾。

$u_r, u_\theta \sin \theta, u_\phi \sin \theta$ を従属変数とする三次元非定常非圧縮性、Newton 流体の運動方程式を記述するとそれぞれ式(14)～(16)となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + N_{u_r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Pr}{Ma} \left\{ \nabla^2 u_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right\} \\ &\dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_\theta \sin \theta) + N_{u_\theta} \sin \theta &= -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{Pr}{Ma} \left\{ \nabla^2 (u_\theta \sin \theta) + \frac{2 \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right\} \dots (15) \\ \frac{\partial}{\partial t} (u_\phi \sin \theta) + N_{u_\phi} \sin \theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Fig. 2 Legendre function

$$+ \frac{Pr}{Ma} \left\{ \underbrace{\nabla^2(u_\phi \sin \theta) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi}}_{A1} + \underbrace{\frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(u_\theta \sin \theta) - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\phi \sin \theta)}_{A2} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし, $N_{u_r}, N_{u_\theta}, N_{u_\phi}$ は運動方程式の対流項で, 回転形を用いている.

$$N_{u_r} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\phi^2) - u_\theta \omega_\phi + u_\phi \omega_\theta \dots\dots\dots (17)$$

$$N_{u_\theta} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{r \partial \theta} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\phi^2) - u_\phi \omega_r + u_r \omega_\phi \dots\dots\dots (18)$$

$$N_{u_\phi} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\phi^2) - u_r \omega_\theta + u_\theta \omega_r \dots\dots\dots (19)$$

また, $\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$ は r, θ, ϕ 方向の渦度成分である.

$$\omega_r \equiv \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \dots\dots\dots (20)$$

$$\omega_\theta \equiv \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\phi) \dots\dots\dots (21)$$

$$\omega_\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \dots\dots\dots (22)$$

式(14)~(16)の運動方程式はエネルギー方程式 [式(4)] とは異なり, 拡散項に ∇^2 以外の項が存在する. このため拡散項の取扱いはエネルギー方程式ほど容易ではなく, 特に式(16)を時間的に陰的に取扱うためには, SOR 法等の繰返し計算が避けられない. また, 式(16)中の A1, A2 項はスペクトル空間での評価が煩雑であり, 物理空間での計算を利用する変換法を用いることになるが, 特に A2 項は前述の繰返し計算中で随時計算し直す必要があるため計算時間の増大をまねく.

これに対して半径方向渦度輸送方程式(23)の拡散項は, u_r の式(14)の拡散項と同形であるが, これらの項は陰的に取扱っても繰返し計算を必要としない. そこで, 基礎式として半径方向運動方程式(14)および半径方向渦度輸送方程式(23)を用い, 表面方向の速度成分を求めるためには, 表面方向の運動方程式(15), (16)を用いるのではなく, ω_r の定義式と連続の式から導かれる二つの恒等式(24), (25)を使うこととした.

(半径方向渦度輸送方程式)

$$\frac{D\omega_r}{Dt} - \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = \frac{Pr}{Ma} \left\{ \nabla^2 \omega_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_r) \right\} \dots\dots\dots (23)$$

(u_r と ω_r から周方向速度成分を求めるための恒等式)

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} (r\omega_r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (rf \sin^2 \theta) \right\}$$

$$= -\nabla_s^2 (u_\theta \sin \theta) \dots\dots\dots (24)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r\omega_r \sin^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (rf \sin \theta) \right\} = \nabla_s^2 (u_\phi \sin \theta) \dots\dots\dots (25)$$

ただし,

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \dots\dots\dots (26)$$

$$f \equiv -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \dots\dots\dots (27)$$

しかしながら, 式(21), (22)を離散化した式からは $(u_\theta \sin \theta)_n^m, (u_\phi \sin \theta)_n^m$ の $m=n=0$ 成分を求めることができない. そこで,

(1) $u_\theta \sin \theta, u_\phi \sin \theta$ が極で零になる条件から $m=n=0$ 成分を求める方法.

(2) $(u_\theta \sin \theta)_n^m, (u_\phi \sin \theta)_n^m$ の $m=0, 0 \leq n \leq M$ 成分をいかに求めるかという問題に拡張し, u_θ, u_ϕ の $m=0$ 成分の運動方程式から求める方法を検討した. (2)の方法は, 図2(a)に示したように Legendre 陪関数 $\tilde{P}_n^0(\cos \theta)$ が極で零以外の有限値をとるため, 極に向かって有限値に収束する従属変数 u_θ, u_ϕ の $m=0$ 成分をスペクトル展開しても Gibbs 現象が起こらないことを利用している.

$(u_\theta \sin \theta)_0^0, (u_\phi \sin \theta)_0^0$ を求めるのに $(u_\theta \sin \theta)_0^0, (u_\phi \sin \theta)_0^0$ それぞれに対し, (1), (2)二つの方法が考えられるので, 組合せとして四とおりの求め方がある. この四とおりの組合せを試した結果, $(u_\theta \sin \theta)_0^0$ は(1)の方法から, $(u_\phi \sin \theta)_0^0$ は(2)の方法から求める組合せが物理的に満足する結果を与えた.

圧力場の基礎式には Poisson 方程式を用いた.

$$\nabla^2 p = -(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{N}_u) \dots\dots\dots (28)$$

$\tilde{\nabla}$ は微分演算子, $\tilde{N}_u$ は運動方程式の対流項である.

$$\tilde{\nabla} \equiv \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2), \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta), \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\tilde{N}_u \equiv (N_{u_r}, N_{u_\theta}, N_{u_\phi}) \dots\dots\dots (30)$$

圧力場の解法には, Kleiser-Schumann の方法⁽⁹⁾ を応用して圧力場を求め, 時間進行を行った.

速度境界条件は, 剛体球と液体との境界 ($r=R_0$) で滑りなし条件 [式(31), (33), (35)] とし, 液滴表面

($r=R_1$) では半径方向速度 u_r を 0 [式(32)], θ, ϕ 方向には表面張力差とせん断応力のバランス [式(34), (36)] を考えた. 半径方向過渡境界条件は式(37), (38)である. 式(37)は式(33), (35)から, 式(38)は半径方向過渡の定義式(20)および式(34), (36)から求まる.

(r 方向速度境界条件)

$$u_r(R_0, \theta, \phi, t)=0 \cdots \cdots \cdots (31)$$

$$u_r(R_1, \theta, \phi, t)=0 \cdots \cdots \cdots (32)$$

(θ 方向速度境界条件)

$$u_\theta(R_0, \theta, \phi, t)=0 \cdots \cdots \cdots (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta \sin \theta}{r} \right) \bigg|_{r=R_1} + \frac{\sin \theta}{R_1^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \bigg|_{r=R_1} = 0 \cdots \cdots (34)$$

(ϕ 方向速度境界条件)

$$u_\phi(R_0, \theta, \phi, t)=0 \cdots \cdots \cdots (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi \sin \theta}{r} \right) \bigg|_{r=R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} \bigg|_{r=R_1} = 0 \cdots \cdots (36)$$

(r 方向過渡境界条件)

$$\omega_r(R_0, \theta, \phi, t)=0 \cdots \cdots \cdots (37)$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial r} \bigg|_{r=R_1} = 0 \cdots \cdots \cdots (38)$$

4. 結果・考察

4・1 解析条件 解析は $Ma=200$, $Pr=7.0$, $Bi=1.0$ の条件で行った. 剛体球半径に対する液層厚さの比 s^*/R_0^* は 1.0 とした. 外界と剛体球の温度差が無次元温度で 1.0 のときの定常熱伝導状態を初期条件として, この状態から液滴表面に初期温度外乱を与えて, 表面張力対流を発生させた. 初期温度外乱の振幅は $\Delta T_{ini}=3 \times 10^{-3}$ である. 初期温度外乱として図 3 に示すように, 高温部と低温部が赤道上に 90° おきに交互に並ぶ場合 Case 1 と, その温度分布を 90° 回転させ, 子午線上に並ぶ場合 Case 2 の 2 種類について計算を行った. これらの二つの初期温度外乱は物理的

には同等だが, 球座標系での取扱いが異なるもので, 精度の悪い計算手法の場合, この二つのケースの計算結果は同等にはならない. そこでこの二つのケースの計算結果を比較することにより, 今回開発した計算手

Fig. 3 Initial temperature disturbances

Fig. 4 Effects of the minimum grid size in the r -direction

Fig. 5 Effects of the minimum grid size in the r -direction

Fig. 6 Temperature distributions and velocity vectors at $t=1000$

法の妥当性を調べることにした。

4.2 空間分解能の影響 まず半径方向の格子依存性と計算に必要なスペクトルモード数 M を調べる。

半径方向には液滴表面および剛体球との境界に向か

って細くなる不等間隔格子を用いた。計算結果に与える半径方向の格子間隔の影響を初期温度外乱が図3 Case 1 の場合について調べたものが図4である。スペクトルモード数 M は31としている。横軸は半径方向の無次元最小格子間隔 $\Delta r_{\min}$ であり、縦軸は無次

Fig. 7 Time sequence of temperature and velocity on the surface of droplet

Fig. 8 Temperature distributions and velocity vectors at $t=100, 300$

元時間 $t=10$ のときの液滴表面での無次元最高温度 $T_{\max}$ である。図 4 から $\Delta r_{\min}$ の減少とともに無次元最高温度 $T_{\max}$ は滑らかにある値に漸近することがわかる。また、図 5 は $\Delta r_{\min}=0.005, 0.01$ の場合について、スペクトルモード $M=31$ 、無次元時間 $t=500$ のときの温度分布および速度ベクトル線図を比較したものであり、両者は液滴表面温度、速度とも相対誤差が 4% 以内で一致している。これから本研究では、半径方向無次元最小格子間隔が $\Delta r_{\min}=0.01$ となる不等間隔格子で計算を行うことにした。このときの半径方向格子数は 25 である。

図 6 は、初期温度外乱が図 3 の Case 1 の場合で半径方向格子数 25 の場合に、スペクトルモード数 M をそれぞれ 21, 31, 42 としたときの無次元時間 1000 での液滴表面の温度分布(濃淡)および速度ベクトル線図(矢印)を表している。ただし、いずれの図も表面最高温度を最も淡く、最低温度を最も濃くして表示している。また、見やすくするため、いずれの図もベクトル線の数は半分に間引いている。これらの図からベクトル線はどのスペクトルモード数 M でもよい一致を示しているが、 $M=21$ の表面最高温度が他の二つの場合と比べて、0.6% 程度異なっていることがわかる。また、スペクトルモード数 M を 31 にしたとき、液滴表面において温度のスペクトル係数 T_n^m の高波数成分は、低波数成分に比べて 10^{-3} 減衰している。これらから、スペクトルモード数 M は 31 にすれば十分であるといえる。

半径方向格子数を 25、スペクトルモード数 M を 31 にしたときの計算時間は、無次元時間 1000 まで計算する場合、パーソナルコンピュータ(AT 互換機 (CPU: Pentium II 266 MHz))で 95 h、スーパーコン

Fig. 9 Outer circumferential velocity at $t=300$ on Fig. 8

ピュータ (HITAC S-3800/380) で 12 h であった。

4・3 計算時間 図 7 は各時刻の液滴表面での温度分布(濃淡)および速度ベクトル線図(矢印)を Case 1, 2 のそれぞれについて比較したものである。 $t=100$ の温度分布の様子が図 3 に示した初期条件に比べて一様に見えるが、これは図 3 では微小な温度差を拡大して表示してあるためである。図 7 では Case 1 と Case 2 の現象の一致を確認しやすいように視点を換え、Case 1 は赤道上方から見ているのに対し、Case 2 は極(Z 軸)上方から見ている。Case 2 の図 7 の中央部が黒く塗りつぶされているが、これはこの部分が極付近で格子点が密になり、ベクトル線が集中するからである。図 7 からわかるように、各時刻において両者の温度分布および速度ベクトル線図は非常によく一致している。つまり Case 2 の極付近の温度分布および速度ベクトル線図が、対応する Case 1 の赤道部分の温度分布および速度ベクトル線図とよく一致していることになる。図 8 は、図 7 の無次元時刻が 100, 300 のときの温度分布および速度ベクトル線図を紙面上方から切断したときの 1/4 断面である。無次元時間

100 のときのベクトル線は無次元時間 300 に比べて長さが 150 倍拡大されている。図 8 から液滴内部の温度分布および速度ベクトル線図も Case 1, 2 でよい一致を示していることがわかる。図 9 は、図 8 $t=300$ における Case 1, 2 の外周部周方向速度を比較したものである。横軸は図 8 の断面図左端から反時計回りにとった角度である。Case 1, 2 の外周部周方向速度は相対誤差 2% の範囲で一致している。

これらから本解析手法が、座標系の影響を受けず、高精度に表面張力対流を計算できる数値解析手法であるといえる。

5. 結 言

表面張力によって駆動される球状液滴内流動を、球面調和関数を用いたスペクトル法を用いて数値解析する手法を開発し、物理的には同等であるが座標上の取扱いが異なる二つの初期温度状態の下で計算を行った。その結果両者は非常によく一致し、本解析手法が

液滴における表面張力対流の数値解析に有効であることがわかった。

文 献

- (1) 例えば, Taussing, R. T. and Mattick, A. T., *J. Spacecr.*, **23**-1 (1986), 10-17.
- (2) 工藤一彦・谷口博・黒田明慈・多田雅彦・田中建, 第 29 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1992), 115-116.
- (3) 工藤一彦・谷口博・黒田明慈・田中建・Yang, W.-J.・安野正功, 機論, **60**-573, B (1994), 1724-1729.
- (4) 工藤一彦・黒田明慈・田中建・Yang, W.-J., 機論, **62**-594, B (1996), 763-769.
- (5) 戸谷剛・工藤一彦・黒田明慈・青木康修, 第 33 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1996), 735-736.
- (6) 気象庁予報部, 電子計算室報告, 別冊 28 号, (1982), 1-111.
- (7) 余田成男・山田道夫・石岡圭一, 京都大学大型計算機センター広報, **23**-5 (1990), 283-290.
- (8) 数値流体力学編集委員会, 乱流解析(数値流体力学シリーズ 3), (1995), 119-136, 東京大学出版会.
- (9) Kleiser, L. and Schumann, U., *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, (1984), 141-163, SIAM.