コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法*

森 西 洋 平^{*1}An Improvement of Collocated Finite Difference Scheme
with Regard to Kinetic Energy Conservation

Youhei MORINISHI

Finite difference method in a collocated grid system has the merits of both regular and staggered grid systems, and has mainly been used for steady flow simulations. Recently, some unsteady flows have been simulated by using the collocated grid system. The author pointed out a violation of kinetic energy conservation in the collocated grid system, which is important to unsteady turbulent flow simulations. In this paper, a modified algorithm for improving the conservation property of the collocated grid system is proposed. Van Kan type pressure correction is introduced to minimize the defect. The modified algorithm with fourth order accuracy in space is also proposed. Conservation properties of the numerical algorithms in the collocated grid system are demonstrated on the example of two-dimensional periodic inviscid flow simulations. Plane turbulent channel flow simulations are also performed to confirm the reliability of the modified algorithm.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Turbulent Flow, Incompressible Flow, Collocated Grid System, Kinetic Energy Conservation

1. 緒 言

速度と圧力を変数とする非圧縮性流体解析で現在主に使用されている差分格子系としてレギュラ、スタガードおよびコロケート格子系がある。レギュラ格子系差分は速度と圧力を同じ格子点上に配置するので境界適合格子への適用が容易である。スタガード格子系差分⁽¹⁾の利点は非振動の物理的な圧力解が得られることである。コロケート格子系差分はレギュラおよびスタガード格子系差分の利点を併せ持つ手法として開発され、当初 SIMPLE 法システムの計算アルゴリズムとともに定常流体解析に用いられていたが^{(2)~(4)}、近年非定常流体解析についても複雑な流れ場形状への適用⁽⁵⁾や高次精度化⁽⁶⁾⁽⁷⁾が行われるようになってきた。一方著者は前報⁽⁸⁾⁽⁹⁾においてコロケート格子系差分の欠点として圧力項の運動エネルギー保存特性の欠如を指摘した。その後コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性に注目した研究もいくつか行われている^{(6)(10)~(12)}。コロケート格子系差分を用いた非定常乱流に対するこれまでの解析では差分や補間の精度を向

上させると計算結果が改善される⁽¹¹⁾⁽¹²⁾、十分な格子解像度あるいは精度を確保すれば乱流の DNS も可能となる⁽⁶⁾⁽⁷⁾ということが示され、格子解像度や差分精度に関する解の収束性についてコロケート格子系差分は適切性を持つと考えられる。また、適切な離散化を行い十分な格子解像度が確保されれば圧力項の運動エネルギー保存特性の欠如は計算結果にあまり影響を与えない⁽⁶⁾ことも示されている。しかし、スタガード格子系差分と比べるとコロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性は十分ではなく⁽⁸⁾、問題点の根本的な改善策は提案されていない。さらに、低解像度の乱流計算においてコロケート格子系差分の結果がスタガード格子系差分のそれよりも劣ることが示されている⁽¹¹⁾が、その理由は説明されていない。

本論文では、差分法による複雑乱流場の LES および DNS に適した計算手法を開発するため 2 章でコロケート格子系差分における運動エネルギー保存特性の問題点を確認し、3 章でコロケート格子系差分の問題点を改善する修正アルゴリズムを提案する。修正アルゴリズムの有効性は 4 章の周期的非粘性流および 5 章の平板チャネル乱流の数値計算で確認される。差分格子系の違いによる計算結果の差異の理由については 5 章の平板チャネル乱流の数値計算の中で考察される。

* 原稿受付 1998 年 5 月 11 日。

^{*1} 正員, 名古屋工業大学(〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。

E-mail: morinisi@cfm.mech.nitech.ac.jp

2. コロケート格子系差分の問題点

非圧縮性流体の運動方程式および連続の式は次式で記述される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式中 t は時間, v_i ($i=1, 2, 3$) は x_i 方向の速度成分, p は圧力/密度 (以降圧力と呼ぶ), τ_{ij} は粘性応力/密度である。NS 方程式ではニュートン流体が仮定され $\tau_{ij} = \nu(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ である。以降, 式(1)中の左辺第 2, 3, 4 項をそれぞれ対流項, 圧力項および粘性項と呼ぶ。これらの式中, 式(1)の時間項以外はすべて空間的微分オペレータ $\partial/\partial x_j$ でまとめられており (保存形), 流れ場の境界から運動量と質量の出入りがなければ質量と運動量は時間的に保存される。式(1)の i 成分に v_i を乗じて i の総和をとると運動エネルギー $K = (1/2)v_i v_i$ の輸送方程式が得られる。運動エネルギーの輸送方程式中で対流項および圧力項に起因する項は連続の式(2)が満足される場合に保存形となり, 粘性項に起因する項は粘性散逸項の存在により保存形とはならない⁽⁸⁾。よって, 非圧縮性流体では運動量および質量に加え非粘性の極限で運動エネルギーが従属的な保存量となる。流れ場の非定常数値計算においても, これら解析的な保存特性が離散的に満足されることが望ましい⁽⁸⁾。

コロケート格子系差分では, 図 1 に示すように速度成分 u_i と圧力 p をコントロールボリュームの中心に, また u_i とは異なる速度成分 F_i をコントロールボリュームの界面上に定義する。問題点の本質を議論するためここでは等間隔格子の場合について考え, 各方向の差分格子幅を h_i とする。以降の解析における離散式の表記の簡略化のため, まず前報⁽⁸⁾と同様にステンスル n の差分格子による x_1 方向の 3 種類の離散オペ

Fig. 1 Collocated grid system

レータを定義する。

$$\frac{\delta_n \Phi}{\delta_n x_1} = \frac{\Phi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) - \Phi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right)}{nh_1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{\Phi}^{nx_i} = \frac{\Phi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) + \Phi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right)}{2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi\psi}^{nx_i} &= \frac{1}{2} \Phi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) \psi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) \\ &+ \frac{1}{2} \psi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) \Phi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

これらのオペレータは離散化に必要な点 (x_1, x_2, x_3) 上で適用される。 x_2, x_3 方向のオペレータも同様に定義される。また, 離散式中で補間オペレータの上付添字が nx_i となる場合, 補間自身に対して i についての総和規約は適用されないものとする。

次に, 非粘性流体の運動方程式 [式(1)で粘性項を消去したもの] と連続の式とを空間二次精度のコロケート格子系差分を用いて u_i の定義点上で離散化する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\delta_1 F_j \bar{u}_i^{1x_j}}{\delta_1 x_j} + \frac{\delta_2 p}{\delta_2 x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\delta_1 F_i}{\delta_1 x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)の左辺第 2 項の対流項には発散形の離散式が用いられている。こう配形あるいは混合形の使用も可能であるが, コロケート格子系における対流項の形の互換性およびその保存特性については前報⁽⁸⁾で既に論じているので省略する。速度 u_i の定義点上で離散化された式(6)の i 成分に同じ点の u_i を離散的に乗じると式(6)に従属な運動エネルギーの輸送方程式の離散式を得るが, この輸送方程式中で対流項と圧力項に起因する項は次のように変形できる⁽⁸⁾。

$$u_i \left(\frac{\delta_1 F_j \bar{u}_i^{1x_j}}{\delta_1 x_j} \right) = \frac{\delta_1 F_j \frac{1}{2} \widetilde{u_i u_i}^{1x_j}}{\delta_1 x_j} + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\delta_1 F_j}{\delta_1 x_j} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$u_i \left(\frac{\delta_2 p}{\delta_2 x_i} \right) = \frac{\delta_1 \bar{p} \widetilde{u_i}^{1x_j}}{\delta_1 x_i} - p \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 x_i} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(8), (9)の右辺第 1 項は離散的に保存形であり⁽⁸⁾, 右辺第 2 項が零となる場合に運動エネルギーに関する離散的な保存特性が満足される。

式(8), (9)に現れる離散的な速度の発散 $\delta_1 F_i/\delta_1 x_i$ および $\delta_2 u_i/\delta_2 x_i$ の値を評価するため, コロケート格子系差分の計算アルゴリズムを検討する。後の数値解析において運動エネルギー保存特性の欠如が

ら生じる誤差と時間進行法による誤差とを明確に区別できるように、式(6)の対流項の時間進行には三次精度ルンゲ・クッタ法(RK3)⁽¹³⁾を適用する。

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} = -2\beta_k \frac{\partial_2 p^k}{\partial_2 x_i} - \gamma_k N_i^{k-1} - \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial_1 F_i^k}{\partial_1 x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$N_i^k = \frac{\partial_1 F_i^k \bar{u}_i^{k-1, x_j}}{\partial_1 x_j} \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。これらの式中、 Δt は時間刻み幅($t^n = n\Delta t$)、添字 k ($=1, 2, 3$)はRK3のステージ数を表し、 $k=0$ は時間ステップ数 n 、 $k=3$ は時間ステップ数 $n+1$ に対応する。 k についての総和規約は適用されないものとする。式中の定数は $\beta_1=4/15$, $\beta_2=1/15$, $\beta_3=1/6$, $\gamma_1=8/15$, $\gamma_2=5/12$, $\gamma_3=3/4$, $\zeta_1=0$, $\zeta_2=-17/60$, $\zeta_3=-5/12$ である。非定常流体解析に対する従来形のコロケート格子系差分のスプリッティング法⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁸⁾を式(10), (11)に適用すると次の計算アルゴリズムを得る。

$$\bar{u}_i^k = u_i^{k-1} - \Delta t \gamma_k N_i^{k-1} - \Delta t \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial_1}{\partial_1 x_i} \left(\frac{\partial_1 p^k}{\partial_1 x_i} \right) = \frac{1}{2\Delta t \beta_k} \frac{\partial_1 \bar{u}_i^{k-1, x_i}}{\partial_1 x_i} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$u_i^k = \bar{u}_i^k - 2\Delta t \beta_k \frac{\partial_2 p^k}{\partial_2 x_i} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$F_i^k = \bar{u}_i^{k-1, x_i} - 2\Delta t \beta_k \frac{\partial_1 p^k}{\partial_1 x_i} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(16)による補間速度 F_i^k の定義がコロケート格子系差分の特徴である⁽²⁾。式(16)を式(11)に代入して式(14)の圧力ポアソン方程式が導出されているので、式(14)を精度よく解けば式(11)に対する誤差は計算機の丸め誤差のオーダーまで落とすことが可能である。よつ

Fig. 2 Fourth order configuration

て式(8)から、コロケート格子系差分においても対流項の運動エネルギー保存特性は十分なものとすることができる。一方、式(11), (15), および(16)を用いて次式が得られる⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial_2 u_i^k}{\partial_2 x_i} &= 2\Delta t \beta_k \left[\frac{\partial_1}{\partial_1 x_i} \left(\frac{\partial_1 p^k}{\partial_1 x_i} - \frac{\partial_2 p^{k-1, x_i}}{\partial_2 x_i} \right) \right] \\ &\sim 2\Delta t \beta_k \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^4 p^k}{\partial x_1^4} h_1^2 + \frac{\partial^4 p^k}{\partial x_2^4} h_2^2 + \frac{\partial^4 p^k}{\partial x_3^4} h_3^2 \right) \right] \\ &= O(\Delta t^1 h_1^2, \Delta t^1 h_2^2, \Delta t^1 h_3^2) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

これより、式(13)~(16)による従来形のコロケート格子系差分の計算アルゴリズムは、運動方程式の圧力項に起因する式(9)の右辺第2項を通して運動エネルギーの輸送方程式に時間一次精度かつ空間二次精度の誤差を与えることがわかる⁽⁸⁾。

3. 運動エネルギー保存特性の改善方法

3.1 非粘性流の修正アルゴリズム

本論文では、式(17)が圧力 p の空間4階微分にも比例していることに注目し、Van Kan修正⁽¹⁴⁾を導入して $\partial_2 u_i^k / \partial_2 x_i$ の値を時間二次精度とする以下のコロケート格子系差分の修正アルゴリズムを考える。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^k &= u_i^{k-1} - 2\Delta t \beta_k \frac{\partial_2 p^{k-1}}{\partial_2 x_i} \\ &\quad - \Delta t \gamma_k N_i^{k-1} - \Delta t \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial_1}{\partial_1 x_i} \left(\frac{\partial_1 \Delta p^k}{\partial_1 x_i} \right) = \frac{1}{2\Delta t \beta_k} \frac{\partial_1 \bar{u}_i^{k-1, x_i}}{\partial_1 x_i} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$u_i^k = \bar{u}_i^k - 2\Delta t \beta_k \frac{\partial_2 \Delta p^k}{\partial_2 x_i} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$F_i^k = \bar{u}_i^{k-1, x_i} - 2\Delta t \beta_k \frac{\partial_1 \Delta p^k}{\partial_1 x_i} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p^k \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)から $\Delta p^k = O(\Delta t^1)$ であるので、修正アルゴリズムでの $\partial_2 u_i^k / \partial_2 x_i$ の値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial_2 u_i^k}{\partial_2 x_i} &= 2\Delta t \beta_k \left[\frac{\partial_1}{\partial_1 x_i} \left(\frac{\partial_1 \Delta p^k}{\partial_1 x_i} - \frac{\partial_2 \Delta p^{k-1, x_i}}{\partial_2 x_i} \right) \right] \\ &\sim 2\Delta t \beta_k \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^4 \Delta p^k}{\partial x_1^4} h_1^2 + \frac{\partial^4 \Delta p^k}{\partial x_2^4} h_2^2 + \frac{\partial^4 \Delta p^k}{\partial x_3^4} h_3^2 \right) \right] = O(\Delta t^2 h_1^2, \Delta t^2 h_2^2, \Delta t^2 h_3^2) \\ &\quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

上式より、修正アルゴリズムによる $\partial_2 u_i^k / \partial_2 x_i$ の値は時間二次精度かつ空間二次精度となり、圧力項に起因する運動エネルギー保存特性の誤差[式(9)右辺第2項]の値は従来形の計算アルゴリズムによる値よりも小さくなることが期待される。

3.2 空間四次精度化

前報⁽⁸⁾においてスタガード格子系差分と同様な補間および差分を用いるコロケート格子系差分の空間四次精度化手法を示したが、検

討の結果この手法では Van Kan 修正による運動エネルギー保存特性の改善は望めないことがわかった。本論文では、レギュラ格子系差分と同様な補間および差分⁽⁸⁾を用いて Van Kan 修正を導入するコロケート格子系差分の空間四次精度化手法を示す。この場合、空間的離散化は図 2 に示される離散変数により行う。まず、非粘性流体の運動方程式および連続の式を次式で離散化する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_1^1 F_j u_i^{1x_j}}{\delta_1 x_j} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2^2 F_j u_i^{2x_j}}{\delta_2 x_j} \right) - \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 p}{\delta_4 x_i} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\left(\frac{4}{3} \frac{\delta_1^1 F_i}{\delta_1 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2^2 F_i}{\delta_2 x_i} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

これらを解くため次の計算アルゴリズムを用いる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^k &= u_i^{k-1} - 2\Delta t \beta_k \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 p^{k-1}}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 p^{k-1}}{\delta_4 x_i} \right) \\ &\quad - \Delta t \gamma_k N_i^{k-1} - \Delta t \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 x_i} \left(\frac{\delta_1 \Delta p^k}{\delta_1 x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 x_i} \left(\frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 x_i} \right) \\ = \frac{1}{2\Delta t \beta_k} \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_1 \bar{u}_i^{k1x_i}}{\delta_1 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \bar{u}_i^{k2x_i}}{\delta_2 x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$u_i^k = \bar{u}_i^k - 2\Delta t \beta_k \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Delta p^k}{\delta_4 x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$${}^m F_i^k = \bar{u}_i^{k mx_i} - 2\Delta t \beta_k \frac{\delta_m \Delta p^k}{\delta_m x_i}, \quad m=1, 2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$p^k = p^{k+1} + \Delta p^k \quad \dots\dots\dots (30)$$

上記空間四次精度の計算アルゴリズムでは 2 種類の補間速度 ${}^1 F_i^k$ および ${}^2 F_i^k$ が用いられている。対流項に発散形を用いる場合、 N_i^k は次式となる。

$$N_i^k = \frac{4}{3} \frac{\delta_1^1 F_j u_i^{k1x_j}}{\delta_1 x_j} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2^2 F_j u_i^{k2x_j}}{\delta_2 x_j} \quad \dots\dots\dots (31)$$

空間四次精度の修正アルゴリズムにおいて u_i^k で定義される連続の式に対する誤差は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 u_i^k}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 u_i^k}{\delta_4 x_i} \right) &= 2\Delta t \beta_k \\ &\times \left[\frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 x_i} \left(\frac{\delta_1 \Delta p^k}{\delta_1 x_i} - \frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Delta p^k}{\delta_4 x_i} \right)^{1x_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 x_i} \left(\frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 x_i} - \frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Delta p^k}{\delta_4 x_i} \right)^{2x_i} \right] \\ &\sim 2\Delta t \beta_k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^6 \Delta p^k}{\partial x_1^6} h_1^4 + \frac{\partial^6 \Delta p^k}{\partial x_2^6} h_2^4 + \frac{\partial^6 \Delta p^k}{\partial x_3^6} h_3^4 \right) \right] \\ &= O(\Delta t^2 h_1^4, \Delta t^2 h_2^4, \Delta t^2 h_3^4) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

なお、空間四次精度の修正アルゴリズムとの比較のため、式(26)の圧力項を取り除き式(27)～(29)の Δp^k を p^k として用いるものを従来形の空間四次精度の計算アルゴリズムとする。

3・3 NS 方程式の修正アルゴリズム 次に、3・1

節で示された非粘性流に対する空間二次精度の修正アルゴリズムを NS 方程式へ拡張する。NS 方程式中の粘性項を陽的に扱う場合には、式(12)で定義される N_i^k に粘性項を加えるだけで NS 方程式の計算アルゴリズムが構成される。しかし、粘性項に対する陽解法の使用には一般に壁面方向格子幅の二乗に比例する非常に厳しい時間刻み幅の制限が課される。本論文では NS 方程式による数値計算の対象として平板チャネル乱流を取り上げ、壁面方向 (x_2) の 2 階微分項にクランク・ニコルソン法、他の項に RK 3 を適用する RK 3/CN 混合時間進行法を基に、コロケート格子系差分における NS 方程式の計算アルゴリズムを構築する(粘性項を 3 方向ともクランク・ニコルソン法とすることも可能であり、その場合でも以下の議論の本質は変わらない)。

$$\begin{aligned} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} &= \beta_k [L(u_i^k) + L(u_i^{k-1})] - 2\beta_k \frac{\delta_2 p^k}{\delta_2 x_i} \\ &\quad - \gamma_k N_i^{k-1} - \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1 F_i^k}{\delta_1 x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで、

$$L(u_i^k) = \nu \frac{\delta_1}{\delta_1 x_2} \frac{\delta_1 u_i^k}{\delta_1 x_2} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned} N_i^k &= \frac{\delta_1 F_j^k u_i^{k1x_j}}{\delta_1 x_j} - \nu \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 x_1} \frac{\delta_1 u_i^k}{\delta_1 x_1} + \frac{\delta_1}{\delta_1 x_3} \frac{\delta_1 u_i^k}{\delta_1 x_3} \right) \\ &\quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

である。式(33)、(34)をコロケート格子系差分に適用するためにはさらにスプリッティング法の導入が必要となる。非粘性流に対する従来形のコロケート格子系差分の計算アルゴリズムに対応する NS 方程式の計算アルゴリズムは次式、

$$\begin{aligned} (1 - \Delta t \beta_k L) \bar{u}_i^k &= (1 + \Delta t \beta_k L) u_i^{k-1} \\ &\quad - \Delta t \gamma_k N_i^{k-1} - \Delta t \zeta_k N_i^{k-2} \quad \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

および式(14)～(16)を用いるものとなる。これは Kim-Moin のスプリッティング法⁽¹⁵⁾に対応する。この場合の $\delta_2 u_i^k / \delta_2 x_i$ の値は式(17)で与えられる。一方、3・1節で示した修正アルゴリズムを NS 方程式に適用すると次式、

$$\begin{aligned} (1 - \Delta t \beta_k L) \bar{u}_i^k &= (1 + \Delta t \beta_k L) u_i^{k-1} \\ &\quad - 2\Delta t \beta_k \frac{\delta_2 p^{k-1}}{\delta_2 x_i} - \Delta t \gamma_k N_i^{k-1} - \Delta t \zeta_k N_i^{k-2} \\ &\quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

および式(19)～(22)を用いる計算アルゴリズムとなる。これは Dukowicz-Dvinsky のスプリッティング法⁽¹⁶⁾に対応し、 $\delta_2 u_i^k / \delta_2 x_i$ の値は式(23)で与えられる。NS 方程式に対する空間四次精度の計算アルゴリズムも同様に構成できる。

4. 周期的非粘性流の数値計算

4.1 計算条件 周期的非粘性流では運動エネルギーの空間平均値が時間的に保存されなければならないため、この流れ場は前報⁽⁸⁾において差分スキームの運動エネルギー保存特性の評価に導入されている。流れ場は $2\pi \times 2\pi$ の二次元領域で各方向に周期境界条件が課される。差分格子数は 16×16 とする。各計算例での速度場の初期条件は同一の流れ関数から計算される。この流れ関数は圧力の定義点上に発生させた一様乱数である。連続の式の離散式と整合する差分オペレータを用いて流れ関数からソレノイダル速度場を計算し、その速度場を $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle = 0$ および $\langle K \rangle = \langle u_1^2 + u_2^2 \rangle / 2 = 1 (= \langle K_0 \rangle)$ となるように正規化して初期条件とする。ここで $\langle \rangle$ は 16×16 個のデータによるアンサンブル平均値を表す。コロケート格子系差分の従来形の計算アルゴリズム (Collocated) として式 (13) ~ (16) を、3.1 節で示した修正アルゴリズム (M. Collocated) として式 (18) ~ (22) を用いる。圧力のポアソン方程式 (14), (19) は離散フーリエ変換を用いる直接法で解かれ、 F^k による連続の式 $\delta_1 F^k / \delta_1 x_i = 0$ は計算機の丸め誤差のオーダー [倍精度計算であるので $O(10^{-14})$] で満足される。Collocated と M. Collocated を空間四次精度化した計算アルゴリズム (3.2 節参照) による数値計算も同時に実行する。時間刻み幅 Δt には 0.2, 0.1, 0.01, 0.001 および 0.0001 の 5 種類を用いる。

4.2 計算結果と考察 今回行ったすべての計算例において、運動エネルギーの空間平均値の誤差は散逸的で $-\langle K - K_0 \rangle$ は時間とともに増加し、また時間刻み幅が小さくなると誤差も小さくなる。図 3 に、時刻 $t=10$ での誤差 $-\langle K - K_0 \rangle$ を時間刻み幅に対して

Fig. 3 Kinetic energy conservation error as a function of Δt

対数グラフで示す。図 3 には前報⁽⁸⁾で実行したスタガード格子系差分 (空間二次精度, 対流項は発散形, 時間進行法は本報と同様 RK3) による計算結果 (Staggered) も同時にプロットされている。コロケート格子系差分の計算結果は, Collocated, M. Collocated それぞれについて二次および四次精度の結果がほぼ重なっている。運動エネルギーに関するスタガード格子系差分の離散的保存特性は満足なものであり⁽⁸⁾, 運動エネルギーの誤差は時間進行法のみ依存して時間刻み幅 Δt の三乗に比例して減少する。一方, Collocated の誤差は Δt の一乗でしか減少しない。これに対し M. Collocated の誤差は Δt の二乗で減少し、修正アルゴリズムの有効性が確認される。

図 4 に、時刻 $t=10$ での u_i による速度の発散 $D_R = \delta_2 u_i / \delta_2 x_i$ の絶対値の空間平均値 $\langle |D_R| \rangle$ を時間刻み幅に対して対数グラフで示す。図 4 より, Collocated および M. Collocated による $\langle |D_R| \rangle$ の値はそれぞれ Δt の一乗 [式 (17)] および二乗 [式 (23)] に比例して減少し、コロケート格子系差分での運動エネルギーの誤差が D_R に比例することおよび 2, 3 章の解析の正当性が確認される。

5. 平板チャンネル乱流の数値計算

5.1 計算条件 3.3 節で構成された NS 方程式に対するコロケート格子系差分の計算アルゴリズムを用い、平板チャンネル乱流の数値計算を実行する。平板チャンネル乱流は静止した平行 2 平板間の発達乱流で、密度、壁面摩擦速度およびチャンネル半幅により無次元化された平均圧力こう配 $dp/dx_1 = -1$ により流れが維持される。チャンネル半幅 h と壁面摩擦速度 u_τ によるレイノルズ数は $Re = 180$ ($Re = u_\tau h / \nu$) と設定する。コロケート格子系差分の従来形の計算アルゴリズム

Fig. 4 Error of the divergence as a function of Δt

(Collocated)では式(37)および式(14)~(16), 修正アルゴリズム(M. Collocated)では式(38)および式(19)~(22)を用いて時間進行が行われる。圧力のポアソン方程式(14), (19)は x_1 - x_3 面内に離散フーリエ変換および x_2 方向に三重対角行列解法を用いる直接法で解かれ, F_i^k による連続の式 $\delta_i F_i^k / \delta_i x_i = 0$ は計算機の丸め誤差のオーダー [$O(10^{-14})$] で満足される。主流(x_1), 壁(x_2)およびスパン(x_3)方向の計算領域は $4\pi h \times 2h \times 4\pi h/3$ で, $32 \times 32 \times 32$ の差分格子を用いる。壁方向の差分格子はハイパブリックタンジェント形関数により壁面近傍で密となるように構成されている。それぞれの方向の格子解像度は壁座標で $\Delta x_1^+ = 70.7$, $\Delta x_2^+ = 1.0 \sim 27.2$, $\Delta x_3^+ = 23.6$ である。壁面方向の不等間隔格子の差分には有限体積法と等価なものが用いられている(壁面方向の運動エネルギー保存特性は完全ではない)。壁面境界条件として, 速度に滑りなし条件を課している。式(15), (38)で必要となる p の壁面境界条件には壁面上で $\delta_1 p / \delta_1 x_2 = 0$, 式(20)で必要となる Δp の壁面境界条件には壁面上で $\delta_1 \Delta p / \delta_1 x_2 = 0$ の条件を課している。初期条件として, まず平均速度分布に乱数を加えてCollocatedに対する速度場の初期値とし, それ以外の計算例には十分発達した後の流れ場の計算結果を用いる。時間刻み幅 Δt を0.003と設定して, 十分発達した流れ場を得た後(せん断応力分布および流量の時間変化により確認), 時間(10 000ステップ)および x_1 - x_3 面上のデータを用いたアンサ

ンプル平均(ここでは $\langle \rangle$ で表現)により乱流統計平均量が計算される。計算アルゴリズムの差をより正確に評価するため, 非常に低い格子解像度ではあるが本研究ではSGSモデルを使用していない。そのかわり, 速度と圧力を変数とするスペクトル法⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾の数値計算を差分法と同じ格子数で実行し, 参照データ(Spectral)を作成している。

5.2 修正アルゴリズムの効果 図5に, u_i による速度の発散 $\partial_2 u_i / \partial_2 x_i$ の絶対値のアンサンプル平均値 $\langle |D_R| \rangle$ を示す。図中の y^+ は壁座標($=u_\tau x_2 / \nu$)である。流路全域にわたってM. Collocatedによる $\langle |D_R| \rangle$ の値がCollocatedによる値よりも小さく, 平板チャネル乱流の数値計算においても修正アルゴリズムの効果が確認できる。壁面近傍で速度の発散 D_R の値が大きいのは壁面近傍で差分格子幅の伸縮比が高いためと考えられる。

図6および図7それぞれに平均速度および乱流成分の計算結果を示す。 U^+ は主流方向の平均速度, $u', v', w', \langle u'v' \rangle$ はそれぞれ主流, 壁面, スパン方向の乱流強度およびレイノルズ応力である。同じ計算条件によるスタガード格子系の二次精度差分による計算結果⁽⁸⁾(Staggered)も示されている。図中のRegularについては5.4節で説明する。修正アルゴリズム導入の効果は平板チャネル乱流の平均速度および乱流強度の分布に対してはあまり現れず, CollocatedとM. Collocatedによる計算結果の差はわずかである。

Fig. 5 Error distribution of the divergence

Fig. 6 Mean streamwise velocity with the second order schemes

Fig. 7 Velocity fluctuations with the second order schemes

Fig. 8 Pressure strain terms

図8に、レイノルズ応力輸送方程式中に現れる圧力ひずみ相関項,

$$\phi_{ij} = \left\langle p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle \dots\dots\dots (39)$$

の対角成分 ϕ_{11} , ϕ_{22} , ϕ_{33} およびそのトレース ϕ_{kk} の値を示す。 ϕ_{kk} の値は本来連続の式により零になるが, Collocated では図5に示されるとおり, u_i による連続の式が十分に満足されず ϕ_{kk} の値も十分に小さくならない. 流路中央部での ϕ_{kk} の値は Collocated では 10^{-4} , M. Collocated では 10^{-7} のオーダーとなり, M. Collocated の値がほぼ時間刻み幅 Δt のオーダーだけ小さい. このように, 連続の式に直接関連する乱流統計平均量に関しては修正アルゴリズムの導入により数値データの信頼性が向上する.

5.3 空間四次精度化の効果 非粘性流に対する空間四次精度の修正アルゴリズム(3.2節)に相当するNS方程式の修正アルゴリズムを用いて平板チャネル乱流の数値計算を先と同様に実行した. ただし, このアルゴリズムにおいて壁面近傍は空間二次精度としてある. 図9および図10それぞれに平均速度および乱流成分の分布を示す. 空間二次および四次精度の修正アルゴリズムによる結果はそれぞれ M. Collocated, 2nd および M. Collocated, 4th で示されている. 比較のため, スタガード格子系の空間二次および四次精度差分による結果(対流項は発散形)⁽⁸⁾ もそれぞれ Staggered, 2nd および Staggered, 4th で示されている. コロケート格子系差分においても空間高次精度化の効果が確認できる.

5.4 差分格子系の違いによる計算結果の差異

図9および図10に見られる平均速度, 主流および壁面方向乱流強度の計算結果について, 同じ空間精度ならばコロケート格子系よりもスタガード格子系差分のほうがスペクトル法により近い計算結果を与えている. コロケートおよびスタガード格子系差分による計算結果の差異を説明するため, レギュラ格子系の二次

精度差分⁽⁸⁾(Regular)による平板チャネル乱流の計算コードも作成しこれまでと同様の条件で数値計算を実行した. レギュラ格子系差分の速度と圧力の離散点はコロケート格子系差分における速度 u_i および圧力 p と同様に配置されている. コロケート格子系差分とレギュラ格子系差分との違いは, レギュラ格子系差分の対流項では F_j を用いずにこれが $\overline{u_j^{1x_j}}$ に置き換わること⁽⁸⁾, 圧力のポアソン方程式は $\delta_2 u_i / \delta_2 x_i = 0$ が離散的に満足されるように1方向ステンシル5の離散式となること⁽⁸⁾である. この圧力のポアソン方程式の使用は圧力の空間的数値振動の存在を許すので一般的に実用には向かないが, 今回の平板チャネル乱流の数値計算では顕著な圧力の数値振動は見られなかった.

レギュラ格子系の空間二次精度差分による計算結果は図6および図7に示されている. 計算結果の差異を説明するため, スタガード, コロケートおよびレギュラ格子系の発散形の二次精度対流項差分の精度評価を行う. ここでは, 代表として運動方程式の x_1 方向成分中に見られる項 $\partial v_2 v_1 / \partial x_2$ について等間隔格子の場合の差分近似式のテイラー展開の結果を示す. スタガード格子系差分の速度成分を U_j とすると⁽⁸⁾ 左辺の差分近似式は次式の右辺のように展開される.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 \overline{U_2^{1x_1}} \overline{U_1^{1x_2}}}{\delta_1 x_2} &= \frac{\partial v_2 v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) h_2^2 \\ &+ \frac{1}{24} \frac{\partial^3 v_2 v_1}{\partial x_2^3} h_2^3 + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) h_1^2 \\ &+ O(h_2^2, h_1^2 h_2^2, h_1^4) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

レギュラ格子系差分の速度成分を u_j として⁽⁸⁾ 同様に展開すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 \overline{u_2^{1x_2}} \overline{u_1^{1x_2}}}{\delta_1 x_2} &= \frac{\partial v_2 v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) h_2^2 \\ &+ \frac{1}{24} \frac{\partial^3 v_2 v_1}{\partial x_2^3} h_2^3 + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) h_2^2 \\ &+ O(h_2^2) \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

本論文で注目しているコロケート格子系差分の差分近似式は次のようになる.

Fig. 9 Mean streamwise velocity with the fourth order schemes

Fig. 10 Velocity fluctuations with the fourth order schemes

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 F_2 \bar{u}_1^{-1x_2}}{\partial_1 x_2} &= \frac{\partial v_2 v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) h_2^2 \\ &+ \frac{1}{24} \frac{\partial^3 v_2 v_1}{\partial x_2^3} h_2^2 + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) h_2^2 \\ &+ \frac{\Delta t \beta_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v_1 \frac{\partial^3 \Delta p}{\partial x_2^3} \right) h_2^2 + O(h_2^4) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

式(42)は修正アルゴリズムに対するものであるが、 Δp を p に置き換えれば従来形の計算アルゴリズムに対するものとなる。ここで、式(40)～(42)中、右辺第1項が近似したい項、右辺第2、3項がスタガード、レギュラおよびコロケート格子系差分に共通に現れる打ち切り誤差項、右辺最後の項は四次精度以上の打ち切り誤差項である。式(40)～(42)中の右辺第4項に注目すると、レギュラおよびコロケート格子系差分は共通の打ち切り誤差項を持ちスタガード格子系差分のそれとは異なる。また、式(42)の右辺第5項はコロケート格子系差分に特有の補間から生じる打ち切り誤差項である。図6および図7においてコロケートとレギュラ格子系差分との計算結果の間に差異がほとんど見られないことから、式(42)の右辺第5項は計算結果にあまり影響を及ぼさないと結論づけられる。これに加えてスタガードとレギュラ格子系差分とによる計算結果に差異が見られるので、コロケートとスタガード格子系差分との間の計算結果の差異は、コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の欠如が原因ではなく、式(40)、(42)中の右辺第4項の打ち切り誤差項が主な原因であり、両差分格子系の速度定義点の違いによるものであることが結論づけられる。なお図7および図10より、スパン方向乱流強度についてはレギュラおよびコロケート格子系差分の計算結果がスタガード格子系差分の計算結果よりもスペクトル法の計算結果に近いことから、スタガード格子系差分がレギュラおよびコロケート格子系差分よりも常に優れた結果を与えるとは言えない。

6. 結 論

本論文では、コロケート格子系差分の圧力項の運動エネルギー保存特性を改善する修正アルゴリズムおよびその空間四次精度化手法を提案した。周期的非粘性流の数値計算において修正アルゴリズムの有効性が確

認された。平板チャネル乱流の数値計算では、平均速度および乱流強度については従来形の計算アルゴリズムと修正アルゴリズムとによる計算結果にほとんど差異が見られないこと、修正アルゴリズムは連続の式および圧力ひずみ相関項の誤差を大きく減少させ数値データの信頼性を向上させること、平均速度および乱流強度分布に見られるコロケート格子系差分とスタガード格子系差分とによる計算結果の差異はコロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の欠如が原因ではなく速度定義点の違いが主な原因であること、が示された。

文 献

- (1) Harlow, F. H. and Welch, J. E., *Phys. Fluids*, 8(1965), 2182-2189.
- (2) Rhie, C. M. and Chow, W. L., *AIAA J.*, 21-11(1983), 1525-1532.
- (3) Perić, M., A Finite Volume Method for the Prediction of Three Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts, *PhD Thesis*, (1985), University of London.
- (4) Perić, M., Kessler, R. and Sheuerer, G., *Comput. Fluids*, 16-4(1988), 389-403.
- (5) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., *J. Comput. Phys.*, 114(1994), 18-33.
- (6) 梶島岳夫・太田貴士・岡崎和彦・三宅裕, 機論, 63-614, B(1997), 3247-3254.
- (7) 佐竹信一・笠木伸英, 第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1994-12), 321-324.
- (8) 森西洋平, 機論, 62-604, B(1996), 4090-4112.
- (9) Morinishi, Y., Lund, T., Vasilyev, O. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, 143(1998), 90-124.
- (10) 大岡龍三・村上周三・持田灯, 第10回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1996-12), 156-157.
- (11) 梶島岳夫・太田貴士・三宅裕, 日本機械学会創立100周年東海支部記念式典・講演会講演論文集, (1997-9), 226-227.
- (12) 稲垣昌英・安部賢一, 日本機械学会創立100周年東海支部記念式典・講演会講演論文集, (1997-9), 230-231.
- (13) Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M., *J. Comput. Phys.*, 96(1991), 297-324.
- (14) Van Kan, J., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7-3(1986), 870-891.
- (15) Kim, J. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, 59(1985), 308-323.
- (16) Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S., *J. Comput. Phys.*, 102(1992), 336-347.
- (17) Kleiser, L. and Schumann, U., in *Proceedings, 3rd GAMM Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, (1987), 165-173.
- (18) Werne, J., *J. Comput. Phys.*, 120(1995), 260-265.