非圧縮性乱流数値解析に適した一般座標系差分スキーム*

(第1報, 座標変換後の基礎方程式の解析的保存特性と
適切な差分スキームの一般座標系への拡張)小垣哲也^{*1}, 小林敏雄^{*2}, 谷口伸行^{*3}Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible
Turbulent Flow in Generalized Curvilinear Coordinates
(1st Report, Analytical Conservation Properties of Coordinate Transformed
Basic Equations and Extension of the Proper Finite Difference Schemes
to Generalized Curvilinear Coordinates)

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

In order to conduct direct numerical simulation (DNS) or large eddy simulation (LES) of turbulent flows in complicated flow geometry, accurate finite difference methods are needed in generalized curvilinear coordinate system. Recently, it was shown that the analytical conservation properties of the set of basic equations are needed to be satisfied properly even in discretized basic equations in order to obtain accurate and stable solutions in simulations of incompressible turbulent flow using finite difference method. The basic equations treated here are the continuity equation, the Navier-Stokes equation and the transport equations of the square values of velocity components and the kinetic energy. In this paper, finite difference schemes in generalized curvilinear coordinate system that are suitable for simulations of incompressible turbulent flow are constructed from relatively simple extension of the proper finite difference schemes derived in equidistant Cartesian coordinate system. The extension of finite difference scheme into generalized curvilinear coordinate system is based on the fact that the analytical conservation properties of the coordinate transformed basic equations for incompressible viscous flows are identical with that in Cartesian coordinates.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Turbulent Flow, Finite Difference Method, Numerical Analysis, Incompressible Flow, Coordinate Transformation, Conservation Property, Staggered Grid Layout, Colocated Grid Layout

1. 緒 言

非圧縮性乱流の計算手法として, スペクトル法, 有限差分法, 有限体積法, 有限要素法, 渦法といった方法があり, 流れ場の特性や必要とされる計算精度に応じて, 計算方法を選択することが重要である. 有限差分法により高精度な直接数値計算(DNS: Direct Numerical Simulation)やラージエディシミュレーション(LES: Large Eddy Simulation)を行うには, 高精度な離散化手法の確立, 流入・流出境界条件の検討, そして, 特に LES の場合, SGS(subgrid scale)モデルの定式化やモデル係数の算出手法の一般座標系への

拡張といった問題が克服すべき課題として残されている. まず, 第1段階として, 有限差分法による DNS の有効性が平行平板間乱流で検証され, スペクトル法による DNS の計算結果と比較した結果, 乱流統計量, レイノルズ応力収支がほぼ一致する結果が得られることがわかった⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾. また, 最近, 基礎方程式の解析的な保存特性が離散化式においても適切に近似されることが, 高精度で安定な解を得るのに必要であることが示され, そのような差分スキームが“適切な(proper)”差分スキームであるとされた⁽⁵⁾. これまでに使用されてきた差分スキームは, 必ずしも運動量, 速度二乗量および運動エネルギーの保存特性が適切であるとは限らないことが指摘され, 要求される解析的保存特性を適切に近似する差分スキームが再確認あるいは新たに提案された⁽⁵⁾⁽⁶⁾. しかし, これら差分スキームの保存特性に関する議論は, 基本的には等間隔正規直交座標系において議論されている. したがって, 任意の幾何形状の流れ場に対して高精度な DNS や LES を行うためには, これらを一般座標系に拡張する

* 原稿受付 1998年7月21日.

^{*1} 正員, 東京大学大学院 (☎ 113-8656 東京都文京区本郷7-3-1) [現: 工業技術院機械技術研究所, ☎ 305-8564 つくば市並木1-2].^{*2} 正員, 東京大学国際・産学共同研究センター (☎ 106-8558 東京都港区六本木7-22-1).^{*3} 正員, 東京大学生産技術研究所 (☎ 106-8558 東京都港区六本木7-22-1).

E-mail: kogaki.t@mel.go.jp

ことが望まれる。

そこでまず第1報において、座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性が座標変換前とまったく等しくなるという事実から、等間隔正規直交座標系における適切な差分スキーム⁽⁵⁾⁽⁶⁾が比較的容易に一般座標系に拡張可能であることが示される。ここでは、最近の有限差分法によるDNS, LES計算でよく使用されている、スタガードおよびコロケート格子系について考え、それぞれの格子系における二次精度および四次精度の一般座標系差分スキームを構成する。

2. 記号

x, y, z : 物理座標, $x_i (i=1, 2, 3)$
 ξ, η, ζ : 計算座標, $\xi_m (m=1, 2, 3)$
 u, v, w : 直交速度成分, $u_i (i=1, 2, 3)$
 U, V, W : 体積フラックス, $U_m (m=1, 2, 3)$
 $x_\xi \sim z_\zeta$: 座標変換のメトリック
 J : ヤコビアン
 p : 圧力/密度
 t : 時間
 ν : 動粘性係数

3. 座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性

複雑な形状をした流れ場を有限差分法で解析する場合、図1(a)のように流れ場の幾何形状に適した計算格子が作成される。計算格子が等間隔直交格子である場合、支配方程式系は最も容易に離散化することができる。そこで、物理座標系 $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ における基礎方程式を、格子間隔 $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$ の等間隔正規直交座標系である計算座標系 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ に座標変換することを考える。

ある変数 Φ の1階微分は、変数変換により次のように物理座標系から計算座標系へ変換される。

Fig.1 Coordinate transformation from physical space into computational space

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_m} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、以降ことわりのない場合、一つの項の中で同じ指標が二度現れるときはその指標を変えた総和を表す。アインシュタインの和の規約に従うものとする。式(1)の保存形式を導くと、以下のようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Phi \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 J は物理空間から計算空間への変換で定義されるヤコビアンであり、三次元の場合、

$$J^{-1} = \det \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\xi y_\zeta z_\eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。式(3)中の x_ξ は偏微分 $\partial x / \partial \xi$ を表し、その他 y_ξ 等も同様である。また、ある変数 Φ の2階微分は1階微分を繰返すことにより、以下のよう導くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) &= J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right) \quad \dots\dots\dots (4) \\ \Delta \Phi &= \nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

式(5)中の G^{mn} は、物理空間における計算格子のひずみの度合いを表す格子ひずみテンソル(mesh skewness tensor)であり⁽⁷⁾次式で与えられる。

$$G^{mn} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここでは、森西⁽⁵⁾に従い、座標変換を施した基礎方程式の解析的保存特性を再確認する。非圧縮性流体の支配方程式である連続の式およびNavier-Stokes方程式に座標変換を施すと以下のようになる。

$$(\text{Cont.}) \equiv \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i}{J} \right) + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i + (\text{Visc.})_i = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(7)中の記号(Cont.)は連続の式を表している。また、 U_m は体積フラックス(または反変速度成分にヤコビアンの逆数を乗じた量)であり、次式で与えられる。

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(8)中の(Pres.)_iおよび(Visc.)_iは、それぞれNavier-Stokes方程式中の圧力項および粘性項を表し、次のように定義される。

$$(\text{Pres.})_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$(\text{Visc.})_i \equiv - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

連続の式(Cont.), Navier-Stokes 方程式中の圧力項(Pres.)_iと粘性項(Visc.)_iは,それぞれ式(7), (10), (11)で示されるように発散形で記述されるのですべて保存形である. 座標変換を施したNavier-Stokes 方程式(8)中の対流項(Conv.)_iは,発散形(Div.)_i, こう配形(Adv.)_iおよび混合形(Skew.)_iが定義できる.

$$(\text{Div.})_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) \dots\dots\dots (12)$$

$$(\text{Adv.})_i \equiv U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \dots\dots\dots (13)$$

$$(\text{Skew.})_i \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) + \frac{1}{2} U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \dots\dots\dots (14)$$

これらの対流項を座標変換前の対流項と比較すると,対流成分 u_j が体積フラックス U_m になっていることを除いて,形式的に大きな違いがないことがわかる. Navier-Stokes 方程式中の対流項の各形は,座標変換前とまったく同様に次のように関係づけられる.

$$(\text{Adv.})_i = (\text{Div.})_i - u_i(\text{Cont.}) \dots\dots\dots (15)$$

$$(\text{Skew.})_i = (\text{Div.})_i - \frac{1}{2} u_i(\text{Cont.}) \\ = (\text{Adv.})_i + \frac{1}{2} u_i(\text{Cont.}) \dots\dots\dots (16)$$

式(12)~(16)から,対流項の発散形が保存形であり,式(16)の連続の式が満たされる場合,こう配形と混合形は発散形と等価となり保存形となることがわかる.

次に,式(8)の $i=1$ 成分に u_1 を乗じ,速度二乗量 $u_1^2/2$ の輸送方程式を導くと以下のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \frac{u_1^2}{2} \right) + u_1(\text{Conv.})_1 + u_1(\text{Pres.})_1 \\ + u_1(\text{Visc.})_1 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

左辺第2項は,Navier-Stokes 方程式中の対流項の形に応じて,次のように変形できる.

$$u_1(\text{Div.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \dots\dots\dots (18)$$

$$u_1(\text{Adv.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) - \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \\ \dots\dots\dots (19)$$

$$u_1(\text{Skew.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) \dots\dots\dots (20)$$

速度二乗量の輸送方程式中では,混合形のみが保存形であり,式(7)の連続の式が満足されると,こう配形および発散形が混合形と等価となり保存形となる. 圧力項および粘性項は,以下のように変形できる.

$$u_1(\text{Pres.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(p \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \\ - p \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \dots\dots\dots (21)$$

Table 1 Analytical conservation properties of the basic equations for incompressible flows [extracted from Ref.(5)]

Terms in transport eqs.		u_i	$u_i^2/2$	$K = u_i^2/2$
(Conv.)	(Div.)	⊙	○	○
	(Adv.)	○	○	○
	(Skew.)	○	⊙	⊙
(Pres.)		⊙	×	○
(Visc.)		⊙	×	×

$$u_1(\text{Visc.})_1 = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(u_1 \nu G^{mn} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \right) \\ + \nu G^{mn} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \dots\dots\dots (22)$$

これらは発散形に変形できないため,保存形とはならない. その他の速度二乗量成分, $u_2^2/2$, $u_3^2/2$ の輸送方程式の場合も, $u_1^2/2$ の輸送方程式と同様な保存特性が得られる.

式(18)の i 成分に u_i を乗じて縮約を取り,運動エネルギー K の輸送方程式を導出すると以下のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{K}{J} \right) + u_i(\text{Conv.})_i + u_i(\text{Pres.})_i \\ + u_i(\text{Visc.})_i = 0 \dots\dots\dots (23)$$

対流項の保存特性は,速度二乗量の輸送方程式の場合とほぼ同様に評価できる. 圧力項および粘性項は,次のように変形できる.

$$u_i(\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (p U_m) - p(\text{Cont.}) \dots\dots\dots (24)$$

$$u_i(\text{Visc.})_i = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(u_i \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \\ + \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \dots\dots\dots (25)$$

圧力項は式(7)の連続の式が満足されると保存形となる. 粘性項は発散形に変形できないため,保存形とはならない. 式(25)中の右辺第2項は,分子粘性による運動エネルギー K の散逸を表している.

以上をまとめると,座標変換を施した基礎方程式(連続の式, Navier-Stokes の方程式, 速度二乗量および運動エネルギー K の輸送方程式)の解析的保存特性は,表1で示される座標変換前の基礎方程式の解析保存特性⁽⁵⁾とすべて一致している. したがって,等間隔正規直交座標系における差分スキーム⁽⁵⁾⁽⁶⁾が比較的容易に一般座標系に拡張可能であることがわかる.

4. 離散オペレータの定義

3章において,座標変換された基礎方程式中の速度,

圧力といった基礎変数の微分は、すべて等間隔直交座標系である (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 空間上における微分に変換された。したがって、基本的な差分および補間スキームは、等間隔直交座標系で定義されていればよい。任意の変数 Φ の間隔 nh_1 の ξ_1 方向の差分、補間および任意の二つの変数 Φ, Ψ の積に対する補間は、森西⁽⁵⁾ に従い、次のように定義する。

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\Phi(\xi_1 + nh_1/2, \xi_2, \xi_3) - \Phi(\xi_1 - nh_1/2, \xi_2, \xi_3)}{nh_1} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \Phi^{n\xi_m} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\Phi(\xi_1 + nh_1/2, \xi_2, \xi_3) + \Phi(\xi_1 - nh_1/2, \xi_2, \xi_3)}{2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} \left. \widehat{\Phi\Psi}^{n\xi_m} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} &= \frac{1}{2} \Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Psi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \\ &+ \frac{1}{2} \Psi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(26)と式(27)は、それぞれ計算空間上で二次精度の差分近似および補間である。離散式の表記において、補間の方向を表す上付き添字は、アインシュタインの和の規約の適用外とする。

四次精度の差分および補間スキームは、異なる間隔の二次精度離散オペレータを組合せることにより構成可能である⁽⁵⁾。

5. 一般座標系差分スキームの構成

速度、圧力といった変数の定義点の配置として、これまで、レギュラ、スタガード、コロケート格子系等が実際の計算で用いられている。この中で、レギュラ格子系は圧力場にチェス盤状の振動が生じることで知られている。したがって、ここでは最近の乱流計算に

広く用いられている、スタガード格子系とコロケート格子系をとりあげ、それぞれの格子系における一般座標系差分スキームを構成する。

5・1 スタガード格子系における一般座標系差分スキーム 速度と圧力のデカップリングを防ぐ方法として、直交速度成分の定義点が、圧力の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に定義されるスタガード格子系 [図2(a)] が直交座標系における計算において広く用いられてきた。しかし、この本来のスタガード格子系は、一般座標系において計算格子が90°回転した場合を考えると、直交速度成分がセル界面に沿ってしまい、スタガード配列の利点が失われて解が不安定になる。これに対して Maliska らは、すべての直交速度成分をそれぞれのセル界面に定義したスタガード格子系 [図2(b)] を提案した⁽⁸⁾。この格子配列の場合、本来のスタガード格子系と比較して空間次元数倍の運動量方程式を解く必要があるが、不安定性の問題が軽減されるため、ここではこの Maliska のスタガード格子系を一般座標系におけるスタガード格子系として取扱うことにする。

一方、基礎変数として反変あるいは共変速度成分をスタガード配置する方法(例えば、Demirdzic ら⁽⁹⁾, Karki ら⁽¹⁰⁾)があるが、この場合、基礎方程式中にソース項が現れて強保存形式がくずれること、また、直交速度成分を基礎変数とする方法と比較すると、離散化が煩雑であり、高次精度化が容易ではない。したがって、ここでは、基礎変数が直交速度成分である場合のみを考える。

連続の式と圧力項の二次精度の離散化は、正規直交座標系における差分スキーム⁽⁵⁾を拡張し、次のように与えられる。

$$(\text{Cont.} - \text{M2})_i \equiv \frac{\partial_1 U_m}{\partial_1 \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned} (\text{Pres.} - \text{M2})_i &\equiv \frac{\partial_1}{\partial_1 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^* \right) \\ &\cong \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial_1 p^*}{\partial_1 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

上式のカッコ内、-M2は Maliska のスタガード格子系における二次精度差分スキームであることを示している。また、上付き添字#は、その量が、明示的でない補間を必要とすることを示している。一般的に、このような明示的でない補間を必要とする項に乘じられるメトリックは、その他の項に乘じられるメトリックに比べて相対的に小さい。したがって、格子の変形がなめらかで格子の直交性が近似的に満足されていれば、明示的でない補間を導入することによる解の精度およ

Fig. 2 Staggered grid layouts

び安定性への影響は小さいことが期待できる。また、式(30)において、圧力項の保存形式と非保存形式は、離散的には厳密に等しくないが近似的に等しいとみなして取扱われる。これら近似の導入により、本研究で構成される一般座標系差分スキームは、その保存特性に関して厳密性が失われている。近似の保存特性に対する影響は、第2報において検証される。

運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性は、森西⁽⁵⁾に従い、大域的に取扱うと、

$$\sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} u_i (\text{Pres.} - M2)_i = \sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} U_m \frac{\delta_1 p^*}{\delta_1 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$U_m \frac{\delta_1 p^*}{\delta_1 \xi_m} = \frac{\delta_1 p^*}{\delta_1 \xi_m} U_m - p(\text{Cono.} - M2) \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。したがって、連続の式の離散式(29)が満足される場合、圧力項の離散式(30)は、運動エネルギーの輸送方程式中で大域的保存形⁽⁵⁾となることがわかる。ただし、この関係式の導出の過程において、圧力項の離散化式は式(30)中の非保存形式が用いられている。

圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして、フラクショナルステップ法を考える。

$$u_i^* = u_i^{k-1} - J\Delta t [(\text{Conv.} - M2)_i + (\text{Visc.} - M2)_i] \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$(\text{Cont.} - M2)^k = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$u_i^k = u_i^* - J\Delta t (\text{Pres.} - M2)_i \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 Δt は時間間隔、上付き添字 k は時間ステップ数、上付き添字 $*$ は時間ステップ k と $k+1$ との間の中間的な時間ステップを示している。式(35)を式(34)に代入して、次式で表される二次精度の圧力方程式が得られる。

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 p^*}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont.} - M2)^* \quad \dots\dots\dots (36)$$

上式の導出においても、圧力項の離散化式(29)の非保存形式が用いられている。二次精度の対流項差分スキームは、正規直交座標系における差分スキーム⁽⁵⁾を拡張し、次のように定義する。

$$(\text{Div.} - M2)_i = \frac{\delta_1 U_m^{1\xi_c} u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$(\text{Adv.} - M2)_i = U_m^{1\xi_c} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$(\text{Skew.} - M2)_i = \frac{1}{2} (\text{Div.} - M2)_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - M2)_i \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで、対流項中の体積フラックスの補間の方向を表す上付き添字 ξ_c 中の下付き添字 C は、直交速度成分が定義されているセル界面(以降、C.S. と略記、Cell

Fig. 3 Numbering of cell surfaces

Surface)の番号を表している。C.S.の番号は、本来のスタガード格子系[図2(a)]の場合の u_1 のC.S.が1番、 u_2 のC.S.が2番、 u_3 のC.S.を3番と定義する。二次元におけるC.S.の番号付けを図3に示す。体積フラックスの補間の方向を式(37)~(39)のように定義することにより、格子が回転した場合でも、補間に用いられる体積フラックスの位置関係が普遍的になる。

式(37)~(39)の対流項差分スキームの各形は、離散式においても厳密に次のように関係づけられる。

$$(\text{Adv.} - M2)_i = (\text{Div.} - M2)_i - u_i (\text{Cont.} - M2)^{1\xi_c} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$u_i (\text{Div.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(U_m^{1\xi_c} \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2} \right) + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - M2)^{1\xi_c} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$u_i (\text{Adv.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(U_m^{1\xi_c} \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2} \right) - \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - M2)^{1\xi_c} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$u_i (\text{Skew.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(U_m^{1\xi_c} \frac{\widetilde{u_i u_i}}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (43)$$

式(40)は式(15)を、式(41)~(43)は式(18)~(20)を適切に近似している。したがって、式(37)~(39)の対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギー K の保存特性に関して適切な離散式であることがわかる。

拡散項差分スキームは、Navier-Stokes 方程式中でのみ保存形であればよいので、次式で定義する。

$$(\text{Visc.} - M2)_i = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_n} \right) \quad \dots\dots\dots (44)$$

四次精度の場合も同様に、正規直交座標系における適切な差分スキーム⁽⁵⁾を一般座標系に拡張でき、その結果のみを示すと、以下ようになる。

連続の式

$$(\text{Cont.} - M4) = \frac{9}{8} \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 U_m}{\delta_3 \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

Navier-Stokes 方程式

Fig. 4 Colocated grid layout

$$(\text{Pres.} - \text{M4})_i = \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^* \right) - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^* \right) \quad (46)$$

$$(\text{Div.} - \text{M4})_i = \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[\left(\frac{9}{8} \overline{U_m^{-1\epsilon_c}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{-3\epsilon_c}} \right) u_i^{1\epsilon_m} \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[\left(\frac{9}{8} \overline{U_m^{-1\epsilon_c}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{-3\epsilon_c}} \right) u_i^{3\epsilon_m} \right] \quad (47)$$

$$(\text{Adv.} - \text{M4})_i = \frac{9}{8} \left(\frac{9}{8} \overline{U_m^{-1\epsilon_c}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{-3\epsilon_c}} \right) \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8} \left(\frac{9}{8} \overline{U_m^{-1\epsilon_c}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{-3\epsilon_c}} \right) \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 \xi_m} \quad (48)$$

$$(\text{Skew.} - \text{M4})_i = \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{M4})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{M4})_i \quad (49)$$

$$(\text{Visc.} - \text{M4})_i = -\frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[\nu G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 u_i^*}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_1 u_3^*}{\delta_1 \xi_3} \right) \right] + \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[\nu G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 u_i^*}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_1 u_3^*}{\delta_1 \xi_3} \right) \right] \quad (50)$$

圧力方程式

$$\frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 p^{k*}}{\delta_3 \xi_n} \right) \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 p^{k*}}{\delta_3 \xi_n} \right) \right] = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont.} - \text{M4})^* \quad (51)$$

これら Maliska のスタガード格子系における四次精度差分スキームも、二次精度の場合と同様な離散的保存特性を持つ。

5.2 コロケート格子系における一般座標系差分スキーム コロケート格子系⁽¹¹⁾⁽¹²⁾は、図4に示されるように、直交速度成分 u_i と圧力 p がセル中心に、コロケート格子系における特有な補間から計算される

体積フラックス F_m がセル界面に定義される。連続の式と圧力項の二次精度の離散化は、次のようになる。

$$(\text{Cont.} - \text{C2}) = \frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \quad (52)$$

上式のカッコ内、 $-\text{C2}$ はコロケート格子系における二次精度差分スキームであることを示している。Navier-Stokes 方程式の圧力項は、次式で表されるレギュラー格子系の $(\text{Pres.} - \text{R2})_i$ を用いる。

$$(\text{Pres.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \approx \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \quad (53)$$

圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして、フラクショナルステップ法を考える。

$$u_i^* = u_i^{k-1} - \Delta t [(\text{Conv.} - \text{C2})_i + (\text{Visc.} - \text{C2})_i] \quad (54)$$

$$(\text{Cont.} - \text{C2})^k = 0 \quad (55)$$

$$u_i^k = u_i^* - \Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^k \right) \quad (56)$$

ここで、体積フラックス F_m は、次式で表される補間を用いて計算される。

$$F_m^k = U_m^{*1\epsilon_m} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} \quad (57)$$

この体積フラックス F_m^k は、セル中心の体積フラックスをセル界面に補間するときに、速度の離散化式を構成し直して、圧力の差分テンシルを小さくすることによって圧力とのカップリングを改善したものとして解釈できる。

圧力方程式は、式(56)を式(54)に代入して得られる。

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{*1\epsilon_m}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (58)$$

二次精度の対流項差分スキームは以下のように一般座標系に拡張される。

$$(\text{Div.} - \text{C2})_i = \frac{\delta_1 F_m u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (59)$$

$$(\text{Adv.} - \text{C2})_i = F_m \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (60)$$

$$(\text{Skew.} - \text{C2})_i = \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{C2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{C2})_i \quad (61)$$

これらの対流項スキームは、離散的に次式を満足する。

$$(\text{Adv.} - \text{C2})_i = (\text{Div.} - \text{C2})_i - u_i (\text{Cont.} - \text{C2}) \quad (62)$$

$$u_i (\text{Div.} - \text{C2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(F_m \frac{\widetilde{u_1 u_i}}{2} \right) + \frac{u_1 u_i}{2} (\text{Cont.} - \text{C2}) \quad (63)$$

$$u_1(\text{Adv.} - \text{C2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(F_m \frac{\widetilde{u_1 u_1}^{1\epsilon_m}}{2} \right) - \frac{u_1 u_1}{2} (\text{Cont.} - \text{C2}) \dots\dots\dots (64)$$

$$u_1(\text{Skew.} - \text{C2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(F_m \frac{\widetilde{u_1 u_1}^{1\epsilon_m}}{2} \right) \dots\dots\dots (65)$$

式(62)は式(15)を、式(63)～(65)は式(18)～(20)を適切に近似している。したがって、これらの対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギー K の保存特性に関して適切な離散式となっている。

拡散項差分スキームは、Navier-Stokes 方程式中でのみ保存形であればいいので、次式で定義する。

$$(\text{Visc.} - \text{C2})_i = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i^*}{\delta_1 \xi_n} \right) \dots\dots\dots (66)$$

以上で構成した一般座標系におけるコロケート格子系差分スキームは、正規直交座標系におけるコロケート格子系差分スキーム⁽⁵⁾と同様、圧力項の運動エネルギーの保存特性に時間一次精度かつ空間二次精度の誤差が含まれる。

5.3 修正コロケート格子系差分スキームの一般座標系への拡張 最近、森西は、Van Kan 修正⁽¹³⁾を導入してコロケート格子系差分スキームの圧力項の運動エネルギーの保存特性を改善した修正コロケート格子系差分スキーム⁽⁶⁾を提案した。当初、修正コロケート格子系差分スキームは、一般座標系に拡張できないと考えられていたが⁽¹⁴⁾、調査の結果、座標変換を導入することにより一般座標系へ拡張できることがわかった。修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張すると、以下のようなSMAC法に類似した計算アルゴリズムが構成される。

$$u_i^* = u_i^{k-1} - J \Delta t [(\text{Conv.} - \text{MC2})_i + (\text{Pres.} - \text{R2})_i + (\text{Visc.} - \text{MC2})_i] \dots\dots\dots (67)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{*1\epsilon_m}}}{\delta_1 \xi_m} \dots\dots\dots (68)$$

$$u_i^k = u_i^* - J \Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^k \right) \dots\dots\dots (69)$$

$$F_m^k = \overline{U_m^{*1\epsilon_m}} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} \dots\dots\dots (70)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p \dots\dots\dots (71)$$

ここで、式(67)中の $-\text{MC2}$ は修正コロケート格子系における二次精度差分スキームであることを示している。コロケート格子系差分スキームの対流項および粘性項の離散化式は、保存特性に関して問題なかった。したがって、 $(\text{Conv.} - \text{MC2})_i$ および $(\text{Visc.} - \text{MC2})_i$ は、式(59)～(61)および式(66)で与えられるコロケート格子系における差分スキームと同じ差分形式で定義する。

式(53)に u_i を乗じて運動エネルギーの輸送方程式

の圧力項の保存特性を調べると以下ようになる。

$$u_i(\text{Pres.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_1 \widetilde{p U_m^{1\epsilon_m}}}{\delta_1 x_i} - p(\text{Cont.} - \text{R2}) \dots\dots\dots (72)$$

$$(\text{Cont.} - \text{R2}) = \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \dots\dots\dots (73)$$

したがって、式(73)で表されるレギュラ格子系における連続の式 $(\text{Cont.} - \text{R2})$ が満たされなければ圧力項差分スキームの運動エネルギーの保存特性が適切でないことがわかる。修正コロケート格子系差分スキームの場合、時間ステップ k における $(\text{Cont.} - \text{R2})$ は、式(71)から $\Delta p^k = O(\Delta t^1)$ となることに注意すると⁽⁶⁾、テイラー展開を用いて次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 U_m^k}{\delta_2 \xi_m} &= \Delta t \left[\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} - G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^{k*1\epsilon_m}}{\delta_2 \xi_n} \right) \right] \\ &= \Delta t \left[-\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^{k*}}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left(G^{mn} \frac{\partial \Delta p^{k*}}{\partial \xi_n} \right) h_m^2 + O(h^4) \right] \\ &= O(\Delta t^2 \cdot h^2) \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

したがって、一般座標系に拡張された修正コロケート格子系差分スキームは、等間隔直交座標系において定式化された森西の修正コロケート格子系差分スキームと同様に、運動エネルギー K の輸送方程式中の圧力項の保存特性が時間二次精度かつ空間二次精度となり改善される。

修正コロケート格子系差分スキームの空間四次精度化は、直感的な方法により行くと、運動エネルギー保存特性が Van Kan 修正⁽¹³⁾ によって改善されない。森西⁽⁶⁾ は、新たにレギュラ格子系における差分スキームと同様な補間および差分を用いて Van Kan 修正を導入する空間四次精度修正コロケート格子系差分スキームを提案している。この空間四次精度修正コロケート格子系差分スキームも一般座標系に拡張可能であり、その結果を示すと、以下のような計算アルゴリズムが構成される。

$$u_i^* = u_i^{k-1} + J \Delta t [-(\text{Conv.} - \text{MC4})_i - (\text{Pres.} - \text{R4})_i - (\text{Visc.} - \text{MC4})_i] \dots\dots\dots (75)$$

$$(\text{Cont.} - \text{MC4})^k = 0 \dots\dots\dots (76)$$

$$\begin{aligned} u_i^k &= u_i^* - J \Delta t \left[\frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^k \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^k \right) \right] \dots\dots\dots (77) \end{aligned}$$

$$F_m^k = \overline{U_m^{*1\epsilon_m}} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k*}}{\delta_1 \xi_n} \quad (l=1,2) \dots\dots\dots (78)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p \dots\dots\dots (79)$$

連続の式

$$(\text{Cont.} - \text{MC4}) \equiv \frac{4}{3} \frac{\delta_1^1 F_m}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2^2 F_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (80)$$

Navier-Stokes 方程式

$$(\text{Div.} - \text{MC4})_i \equiv \frac{4}{3} \frac{\delta_1^1 F_m \overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2^2 F_m \overline{u_i}^{2\xi_m}}{\delta_2 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (81)$$

$$(\text{Adv.} - \text{MC4})_i \equiv \frac{4}{3} F_m \frac{\delta_1^1 \overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} F_m \frac{\delta_2^2 \overline{u_i}^{2\xi_m}}{\delta_2 \xi_m} \quad \dots\dots\dots (82)$$

$$(\text{Skew.} - \text{MC4})_i \equiv \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{MC4})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{MC4})_i \quad \dots\dots\dots (83)$$

$$(\text{Visc.} - \text{MC4})_i \equiv \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\delta_1 \overline{u_i}}{\delta_1 \xi_n} \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\delta_2 \overline{u_i}}{\delta_2 \xi_n} \right) \quad \dots\dots\dots (84)$$

圧力方程式

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^k}{\delta_1 \xi_n} \right] - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 \xi_n} \right] = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{4}{3} \frac{\delta_1 \overline{U_m}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \overline{U_m}^{2\xi_m}}{\delta_2 \xi_m} \right] \quad \dots\dots (85)$$

運動エネルギー K の輸送方程式中の圧力項の保存特性の誤差

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \frac{\delta_2 \overline{U_m}^k}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \overline{U_m}^k}{\delta_4 \xi_m} \\ &= \Delta t \left[\frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left\{ G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^k}{\delta_1 \xi_n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - G^{mn} \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Delta p^k}{\delta_4 \xi_n} \right)^{1\xi_m} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left\{ G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 \xi_n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - G^{mn} \left(\frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Delta p^k}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Delta p^k}{\delta_4 \xi_n} \right)^{2\xi_m} \right\} \right] \\ &= \Delta t \left[\frac{1}{32} \frac{\partial^5}{\partial \xi_m^5} \left(G^{mn} \frac{\partial \Delta p^k}{\partial \xi_n} \right) h_m^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{32} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\partial^5 \Delta p^k}{\partial \xi_n^5} \right) h_n^4 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{144} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left(G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^k}{\partial \xi_n^3} \right) h_m^2 h_n^2 + O(h^6) \right] \\ &= O(\Delta t^2 \cdot h^4) \quad \dots\dots\dots (86) \end{aligned}$$

ここで、空間四次精度修正コロケート格子系差分スキームにおける直交速度成分、体積フラックスおよび圧力の定義位置を図4(b)に示す。空間四次精度においては、新たにセル中心定義される体積フラックス ${}^2F_m^k$ が導入されている。

6. 結 論

任意の幾何形状の非圧縮性乱流場に対して、信頼性

の高いDNSおよびLESを行うため、基礎方程式系の解析的保存特性を適切に近似する高精度一般座標系差分スキームを構成するための基礎研究を行った。まず、座標変換した基礎方程式系の解析的保存特性が座標変換前の基礎方程式系の解析的保存特性とまったく同じになるという事実に基づき、等間隔正規直交座標系における適切な差分スキームを一般座標系に拡張し、スタガードおよびコロケート格子系における一般座標系差分スキームを構成した。本研究で構成した一般座標系差分スキームは、等間隔直交格子に適用した場合、メトリック、ヤコビアン、格子ひずみテンソルなどの座標変換係数がすべて定数となるため、等間隔正規直交座標系における適切な差分スキーム⁽⁵⁾⁽⁶⁾に帰着する。しかし、一般座標系に拡張の際、近似を導入したことにより、本研究で構成された一般座標系差分スキームは、その保存特性に関して厳密性が失われている。

本研究を遂行するにあたり、名古屋工業大学 森西洋平助教からご指導いただいた。記して謝意を表す。本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費(No. 7186)および同研究員に対する文部省科学研究費補助金の援助を受けた。

文 献

- (1) Rai, M.M. and Moin, P., Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes, *J. Comput. Phys.*, **96**(1991), 15-53.
- (2) 鈴木哲也・河村洋, 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性, 機論, **60**-578, B(1994), 3280-3286.
- (3) 梶島岳夫・太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕, コロケート格子系による非圧縮性流れの高次差分解析, 機論, **63**-614, B(1997), 3247-3254.
- (4) 佐竹信一, 乱流摩擦抵抗低減機構に関する基礎的研究, 東京大学博士論文, (1994).
- (5) 森西洋平, 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性(第1~3報), 機論, **62**-604, B(1996), 4090-4112.
- (6) 森西洋平, コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法, 機論, **65**-630, B(1999), 505-512.
- (7) Zang, Y., Street, R.L. and Koseff, J.R., A Non Staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, *J. Comput. Phys.*, **114**(1994), 18-33.
- (8) Maliska, C.R. and Raithby, G.D., A Method for Computing Three Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary Fitted Co-Ordinates, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **4**(1984), 519-537.
- (9) Karki, K.C. and Patankar, S.V., Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations, *AIAA J.*, **27**(1989), 1167-1174.
- (10) Demirdzic, I., Gosman, A.D., Issa, R.I. and Perić, M., A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries, *Comput. Fluids*, **15**(1987), 251-273.

- (11) Rhie, C.M. and Chow, R.L., Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, *AIAA J.*, **21** (1983), 1525-1532.
 - (12) Perić, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, *Comput. Fluids*, **16**-4(1988), 389-403.
 - (13) Van Kan, J., A 2nd-Order Accurate-Pressure-Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**-3(1986), 870-891.
 - (14) 森西洋平, コロケート格子系差分のエネルギー保存特性の改善方法, 第13回生研NSTシンポジウム講演論文集, (1998), 15-19.
 - (15) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行, 修正コロケート格子系差分スキームの一般座標系への拡張, 機講論, No. 98-3 (II) (1998), 13-14.
-