粗面流路における熱伝達率と圧力損失の相関について*

加藤 健 司^{*1}, Kwing-So CHOI^{*2}, 東 恒 雄^{*1}A Relationship between Heat Transfer Enhancement
and Pressure Loss over Rough SurfacesKenji KATOH^{*3}, Kwing-So CHOI and Tsuneo AZUMA^{*3} Osaka City University, Dept. of Mechanical Engineering, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585 Japan

A theoretical study of a turbulent channel flow was conducted to investigate the relationship between the heat transfer enhancement and the drag increase over rough surfaces using the timespace averaged momentum and energy equations. The results confirmed that the efficiency of the heat transfer surface, (i. e., the ratio of the heat transfer increase to the drag increase) is in general less than unity when the molecular Prandtl number Pr of the working fluid is less than the turbulent Prandtl number Pr_t . When Pr is greater than Pr_t , on the other hand, it was shown that the efficiency can be greater than unity as long as the roughness height is within the transitional region. It is suggested that the breakdown of the Reynolds analogy being experimentally observed over the heated riblet surface seems to be due to the inhomogeneity of the heat flux over the riblet surface when the thermal boundary layer is not yet fully developed.

Key Words: Forced Convection, Heat Transfer, Heat Transfer Enhancement, Rough Surface, Pressure Loss, Prandtl Number, Riblets Surface, Theoretical Analysis

1. 緒 言

熱効率改善のため、種々の工業装置において対流伝熱促進を図る多くの手法が提案されている⁽¹⁾。流路壁面上に二次元、あるいは三次元形状の粗さ要素を設置して乱れや渦を誘起し、熱伝達率の増加を図る手法は、その中でも代表的なものの一つである。粗さ要素を設置した場合、熱伝達率は滑面に比べ数十～数百%増加するが、圧力損失もそれ以上に増加する場合が多い。圧力損失をできる限り低く抑えた伝熱促進は、省エネルギーの観点からも重要な問題である⁽²⁾。種々の粗面に対して行われた従来の実験結果を概略すれば、作動流体としてよく用いられる空気など、プラントル数 Pr が1に近い場合、圧力損失の滑面からの増加は、熱伝達率のそれよりもかなり大きいのが一般的である^{(3)~(5)}。一方、 $Pr > 1$ の場合、逆に熱伝達率の増加割合のほうが大きくなるという報告結果も見られ

る⁽⁶⁾⁽⁷⁾。また、乱流抵抗が逆に減少するリブレット壁面上で、熱伝達率が滑面より若干増加するという報告もある⁽⁸⁾。粗面における運動量と熱伝達の相似、非相似性に関して、多くの実験結果が示されているが、その物理的根拠を明確にした文献は見あたらない。特に、粗面における効率 $\eta = (\text{熱伝達率の増加率}) / (\text{圧力損失の増加率})$ が1を超える条件を明らかにすることは、工学的に非常に重要な問題と考えられる。

本研究では、上記 η の値について理論的に考察することを目的としている。滑面と粗面流路での圧力損失および伝熱特性を比較するため、粗面流路において流路内で積分平均した運動およびエネルギー方程式を導く。これらの方程式を用い、適当な仮定に基づき、熱伝達および圧力損失の滑面からの増加とそれらの間の相関関係について考察を行う。まず、 $Pr \ll 1$ の流体における、 η の限界について検討を行う。その考察結果をふまえ、 $Pr \gg 1$ の場合、 η が1を超えるための条件の提示を試みる。また、粗さにより乱流抵抗が減少する、リブレット壁面上における熱伝達率増加の機構について、若干の考察を行う。

2. 基礎方程式

二次元あるいは三次元任意形状の粗さ要素が壁面に

* 原稿受付 1998年12月18日。

^{*1} 正員, 大阪市立大学工学部 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138)。^{*2} 正員, Department of Mechanical Engineering, University of Nottingham, (University Park, Nottingham, NG7 2RD, UK)。

E-mail: kato@mech.eng.osaka-cu.ac.jp

設置された場合の、圧力損失および熱伝達率の変化を滑面と比較して考察する。ここでは、図1(a)のように、平行平板間の発達した乱流流れを扱う。座標系は流れ方向、壁面に垂直方向およびスパン方向にそれぞれ x, y, z 軸をとる。粗さは図1(b)のように設置され、流量および壁面からの熱流束 $\dot{q}$ を滑面、粗面流路で同一とした場合を考える。

2.1 滑面流路 滑面流路内の乱流流れに対して、次の x 方向 Navier-Stokes 方程式およびエネルギー方程式の時間平均を考える。

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad \dots (1)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \dots (2)$$

ここで ρ, μ, c_p, λ は、それぞれ密度、粘度、比熱および熱伝導率を表す。上式の時間平均を行う際、速度 (U, V, W) および圧力 P については通常のレイノルズ分解を、温度 T については、 x 方向への平均温度こう配を考慮して次式のように表す。

$$T = \bar{T} + \left(\frac{dT}{dx} \right) x + \theta \quad \dots (3)$$

$\bar{T}$ は時間平均温度、 θ は変動分である。また、ここでは、等熱流束条件を考え、

$$\left(\frac{dT}{dx} \right) = \frac{\dot{q}}{\rho c_p \Gamma}$$

($\dot{q}$ は単位面積当たり壁からの熱流束、 Γ は流路単位幅当たりの体積流量)である。式(1)および(2)の時間平均を行い、さらに壁面 $y=0$ より y 方向に積分すれば、周知の次式が成り立つ。

(a) Smooth wall

(b) Rough wall

Fig. 1 Coordinate system of channel flow with heat transfer from the wall surface

$$-\left(\frac{dP}{dx} \right) (b-y) = \mu \frac{d\bar{U}}{dy} - \rho \overline{uv} = \rho (\nu + \epsilon_t) \frac{d\bar{U}}{dy} \quad \dots (4)$$

$$q \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \int_0^y \bar{U} dy \right) = \lambda \frac{d\bar{T}}{dy} - \rho c_p \overline{v\theta} = \rho c_p \left(\alpha + \frac{\epsilon_t}{Pr_t} \right) \frac{d\bar{T}}{dy} \quad \dots (5)$$

ここで、 (dP/dx) は x 方向への平均的な圧力こう配、 b は流路半幅、 $\bar{U}$ は時間平均速度、 $-\rho \overline{uv}$ はレイノルズ応力を表す。 ν および α は、動粘度および温度伝導率である。式(4)、(5)において、乱れによる輸送項を、渦粘性係数 ϵ_t および乱流プラントル数 Pr_t を用いて書き直してある。また、式(5)において、温度として壁温 T_w からの差 $(T_w - T)$ を新たに T として用いている。

2.2 粗面流路 ここでは、二次元あるいは三次元任意形状の粗さ面において、流路内の平均的な圧力損失および熱伝達率の、滑面からの差異について考察を行う。この目的のため、図1(b)の粗面に対し、流路内 xz 平面内で平均した運動、エネルギー方程式を導く。

2.2.1 運動方程式 まず、運動方程式について、速度成分を次式のように、時間- xz 平面内での平均値と、それからの変動分に分けて、以下のように表す。

$$U = \bar{U} + u', \quad V = v', \quad W = w' \quad \dots (6)$$

$\bar{U}$ は、ある y の位置での、時間および xz 平面内での積分平均値、 u', v', w' は、それからの変動を表す。今後、' は粗面流路に対する諸量を、 $\bar{}$ は時間- xz 平面内の平均量を表すものとする。圧力こう配は、 x 方向の平均的な圧力こう配 (dP/dx) とそれからの変動分に分けて、次式のように表す。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{dP}{dx} \right)' + \frac{\partial P'}{\partial x} \quad \dots (7)$$

なお、ここでは発達した流れを扱い、いくつかの粗さ要素を含む領域で、式(6)や式(7)中の積分平均値が定義できるものとしている。式(1)に式(6)、(7)の関係を代入し、時間および xz 平面内で積分平均を行い、さらに y について積分を行う。

式(1)の左辺について、連続の方程式を利用して計算を行うと、次の関係を求めることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^y dy \frac{1}{A} \iint_{xz} dx dz \\ & \times \left\{ \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right\} \\ & = a \cdot \rho \overline{u'v'} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

ここに、 τ, A は、それぞれ、平均を行う時間および面積を表す。また、 a は y の関数であり、面積 A のう

ち、粗さ突起以外の、流体が流れる部分の割合を示す [$0 \leq a(y) \leq 1$]. 次に、式(1)右辺の積分は、ガウスの積分定理および連続の方程式を用いると、壁面、突起表面ならびに $y = \text{一定}$ の面に作用する x 方向応力の面積分に置き換えることができ、次式が求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^y dy \frac{1}{A} \iint_{xz} dx dz \\ & \times \left\{ -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right\} \\ & = -\left(\frac{dP}{dx} \right)' (y-b) + a \cdot \mu \frac{dU'}{dy} + f_{\text{pro}} \dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、 f_{pro} は、流路単位長さ当たり、 y より上の突起から受ける抗力の平均値を表す。式(8)と式(9)から、粗面流路に対する、時間-平面内で平均化した運動方程式として、次式を導くことができる。

$$-\left(\frac{dP}{dx} \right)' (b-y) = \rho a (\nu + \varepsilon_t') \frac{dU'}{dy} + f_{\text{pro}} \dots (10)$$

ここで、粗面流路における渦粘性係数 ε_t' を用いている。

2・2・2 エネルギー方程式 速度と同様に、温度についても、時間- xz 平面内の平均値とそれからの変動を考え、次のように表す。

$$T = \overline{T} + \left(\frac{dT}{dx} \right) x + \theta' \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\overline{T}$ は、時間および xz 平面内での平均値、 θ' はそれからの変動である。粗面における流量および熱流束は滑面の場合と同一なので、 x 方向平均温度こう配は式(3)中の滑面の値と等しく、 (dT/dx) としている。式(11)を式(2)に代入し、2・2・1項と同様に、時間および xz 面内で積分平均を行い、さらに y 方向に積分を行う。運動方程式と同様、連続の方程式およびガウスの積分定理を利用すれば、次式を求めることができる。

$$\begin{aligned} & \rho c_p \left(\frac{dT}{dx} \right) \int_0^y a \overline{U'} dy + a \cdot \rho c_p \nu' \theta' \\ & = \dot{q} - \dot{q}_{\text{pro}} + a \cdot \lambda \frac{d\overline{T}'}{dy} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに、 $\dot{q}_{\text{pro}}$ は、単位面積当たり、 y より上の突起から流体への伝熱量を表す。温度として壁温からの差を考え、式(12)を整理すると、粗面に対するエネルギー方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \dot{q} \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \int_0^y a \overline{U'} dy \right) = a \cdot \rho c_p \left(a + \frac{\varepsilon_t'}{Pr_t'} \right) \frac{d\overline{T}'}{dy} \\ & + \dot{q}_{\text{pro}} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、粗面に対する乱流プラントル数 Pr_t' を用いている。

3. 粗面における圧力損失と熱伝達率の関係

乱れを増し、熱伝達率を増加させる通常の粗面、ならびに抵抗が減少するリブレット面上での熱伝達率を、滑面の値と比較する。2章で求めた滑面、粗面に対する運動方程式ならびにエネルギー方程式(4)、(5)、(10)、(13)を、壁変数を用いて無次元化した以下の式(15)~(18)について検討する。なお、無次元化には、滑面の摩擦速度 u^* を用い、粗面の滑面に対する圧力損失の倍率を c として、

$$-b \left(\frac{dP}{dx} \right) = \rho u^{*2}, \quad -b \left(\frac{dP}{dx} \right)' = c \cdot \rho u^{*2} \dots (14)$$

の関係を用いている。

・滑面

$$1 - \frac{y^+}{b^+} = \left(1 + \frac{\varepsilon_t}{\nu} \right) \frac{d\overline{U}^+}{dy^+} \dots\dots\dots (15)$$

$$E = \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_t}{Pr_t \nu} \right) \frac{d\overline{T}^+}{dy^+}, \quad \left(E = 1 - \frac{1}{\Gamma} \int_0^y \overline{U} dy \right) \dots\dots\dots (16)$$

・粗面

$$\left(1 - \frac{y^+}{b^+} \right) (1 - R_d) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\varepsilon_t'}{\nu} \right) \frac{d\overline{U}^{'+}}{dy^+} \dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ R_d = \frac{f_{\text{pro}}}{-(dP/dx)'(b-y)} \right\} \\ & E'(1 - R_h) = a \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_t'}{Pr_t' \nu} \right) \frac{d\overline{T}^{'+}}{dy^+} \dots\dots\dots (18) \\ & \left(E' = 1 - \frac{1}{\Gamma} \int_0^y a \overline{U'} dy, \quad R_h = \frac{\dot{q}_{\text{pro}}}{\dot{q} E'} \right) \end{aligned}$$

無次元温度は次式で定義した。

$$\overline{T}^+ = \frac{\rho c_p u^* \overline{T}}{q} \dots\dots\dots (19)$$

式(17)および式(18)において、 R_d および R_h は、 y より上に存在する突起表面の抗力および伝熱量の全体への寄与率を表す。

滑面、粗面に対する熱伝達率 h および h' を次式で定義する。

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\rho c_p u^*} = \frac{1}{\Delta T^+} = \frac{1}{\int_0^{b^+} \frac{dT^+}{dy^+} dy^+}, \\ & \frac{h'}{\rho c_p u^*} = \frac{1}{\Delta \overline{T}^{'+}} = \frac{1}{\int_0^{b^+} \frac{d\overline{T}^{'+}}{dy^+} dy^+} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

3・1 抗力が増加する場合 以下では、粗面流路における効率 η が1より大きくなるか、すなわち滑面からの熱伝達率の増加率が式(14)中の圧力損失の倍率 c より大きくなりうるかについて考察を行う。熱伝達率の定義式(20)において、分母の温度差を比較する。

次式について検討を行う。

$$\Delta \overline{T^+} - c \Delta \overline{T'^+} = \int_0^{b^+} \left(\frac{d\overline{T^+}}{dy^+} - c \frac{d\overline{T'^+}}{dy^+} \right) dy^+ \quad \dots\dots\dots (21)$$

上式が正になれば、粗面の熱伝達率は滑面の c 倍以上となる。滑面に対して式(15), (16)を、また粗面に対して式(17), (18)を用いれば、上式中の被積分関数は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{T^+}}{dy^+} &= \frac{E}{\left(1 - \frac{y^+}{b^+}\right)} \frac{Pr_t \left(1 + \frac{\varepsilon_t}{\nu}\right)}{\left(\frac{Pr_t}{Pr} + \frac{\varepsilon_t}{\nu}\right)} \frac{d\overline{U^+}}{dy^+} \quad \dots\dots\dots (22) \\ c \frac{d\overline{T'^+}}{dy^+} &= \frac{E'}{\left(1 - \frac{y^+}{b^+}\right)} \frac{(1-R_h)}{(1-R_d)} \frac{Pr_t' \left(1 + \frac{\varepsilon_t'}{\nu}\right)}{\left(\frac{Pr_t'}{Pr} + \frac{\varepsilon_t'}{\nu}\right)} \frac{d\overline{U'^+}}{dy^+} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

以下では、式(22)と式(23)の比較について検討を行う。

3・1・1 $Pr \leq Pr_t$ の場合 式(22)中に現れる乱流プラントル数の値について、さまざまな報告がある⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。それらを包括すれば、壁面のごく近傍で $Pr_t > 1$ の領域があるが、どのような流体においても壁面から離れるにつれ、 $Pr_t \approx 0.85$ に漸近する傾向がある。ここでは、 $Pr \leq Pr_t$ ($Pr \leq 0.85$) の場合について考える。任意の y の位置において、式(22), (23)中、次の関係が成り立つ。

$$E' > E \quad \dots\dots\dots (24)$$

これは、式(16)および式(18)の E, E' の定義において、粗面では壁面近傍の流量が減少するからである。

まず、粗面上、突起高さ k^+ より大きい y^+ の領域について考える。式(23)中、 $R_h = R_d = 0$ である。また、Pimenta らの実験結果によれば、対数法則域で、粗面の乱流プラントル数は滑面の値に等しく、 $Pr_t' = Pr_t$ としてよい⁽¹¹⁾。以上の関係ならびに式(24)および $\varepsilon_t' > \varepsilon_t$ を考慮すれば、式(22), (23)中の速度こう配に掛かる係数について、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\frac{E'}{(1 - y^+/b^+)} \frac{Pr_t' (1 + \varepsilon_t'/\nu)}{(Pr_t'/Pr + \varepsilon_t'/\nu)} \\ &> \frac{E}{(1 - y^+/b^+)} \frac{Pr_t (1 + \varepsilon_t/\nu)}{Pr_t/Pr + \varepsilon_t/\nu} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

次に、壁面近傍の、突起高さより低い y^+ の領域において、次の関係が成立すると仮定する。

$$(1 - R_h) > (1 - R_d) \quad \dots\dots\dots (26)$$

上式は、突起の伝熱への寄与 R_h は、抗力への寄与 R_d より小さいことを意味している。これは、突起には伝熱とは非相似な圧力抗力が作用することによる⁽¹²⁾。実際、Hosni らの、半球状突起をもつ粗面に対する計

算結果によれば、両者にはかなりの差がある⁽¹³⁾。一例として、彼らの実験において、ピッチと球径の比が4の場合、 R_h は0.3程度、 R_d は0.6程度であり、式(26)両辺には2倍近くの差がある。次に、 Pr_t' について、突起高さ以下の領域でその値がどのように変化するかは未知であるが、上述のように、 $y^+ > k^+$ で $Pr_t' = Pr_t$ となること、また粗面に対し $Pr_t' = 0.9$ (一定) として行った熱伝達率の計算値が実験値とだいたい一致すること⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ から、滑面の値 Pr_t から大きな変化はないと予想できる。式(26)および式(24)の関係を考慮すれば、式(22)および式(23)中の係数について、式(25)と同様、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\frac{E'}{(1 - y^+/b^+)} \frac{(1 - R_h)}{(1 - R_d)} \frac{Pr_t' (1 + \varepsilon_t'/\nu)}{(Pr_t'/Pr + \varepsilon_t'/\nu)} \\ &> \frac{E}{(1 - y^+/b^+)} \frac{Pr_t (1 + \varepsilon_t/\nu)}{(Pr_t/Pr + \varepsilon_t/\nu)} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

上式の関係は、 Pr_t' が Pr_t よりかなり小さいか、あるいは Pr が Pr_t より大きくなり、上式中、 $Pr_t (1 + \varepsilon_t/\nu) / (Pr_t/Pr + \varepsilon_t/\nu)$ が $Pr_t' (1 + \varepsilon_t'/\nu) / (Pr_t'/Pr + \varepsilon_t'/\nu)$ より大きくなると成り立たない場合がある。 $Pr \gg Pr_t$ の場合については、3・1・2項で検討を行う。

式(25)および式(27)より、式(21)の積分について、次の不等式を書くことができる。

$$\begin{aligned} &\int_0^{b^+} \left(\frac{d\overline{T^+}}{dy^+} - c \frac{d\overline{T'^+}}{dy^+} \right) dy^+ \\ &< \int_0^{b^+} g^+ \left(\frac{d\overline{U^+}}{dy^+} - \frac{d\overline{U'^+}}{dy^+} \right) dy^+ \\ &= g^+(b^+) \{ \overline{U^+}(b^+) - \overline{U'^+}(b^+) \} \\ &+ \int_0^{b^+} \frac{dg^+}{dy^+} (\overline{U'^+} - \overline{U^+}) dy^+ \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} g^+(y^+) &= \frac{E}{(1 - y^+/b^+)} Pr_{\text{eff}}, \\ \left\{ Pr_{\text{eff}} &= \frac{Pr_t (1 + \varepsilon_t/\nu)}{(Pr_t/Pr + \varepsilon_t/\nu)} \right\} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

上式中、 Pr_{eff} は有効プラントル数である⁽⁹⁾。式(28)中、最右辺2項目の積分について考える。粗面の速度 $\overline{U'^+}$ は、ある y の位置以下で滑面の $\overline{U^+}$ より小さく、それ以上では $\overline{U^+}$ より大きくなる⁽¹⁶⁾。一方、滑面の速度分布ならびに Pr_{eff} に対する Yakhot の理論式⁽¹⁵⁾を参照すれば、 (dg^+/dy^+) は壁面のごく近傍を除き、正の単調減少関数となる。 (dg^+/dy^+) の大きい領域で $\overline{U^+} > \overline{U'^+}$ となること、および粗面と滑面で流量が同一であることを考慮すれば、式(28)中の最後の積分項は負の値となる。また、流路中心での速度について、 $\overline{U'^+}(b^+) > \overline{U^+}(b^+)$ である。したがって式(28)より、最終的に次の関係が成立する。

$$\int_0^{b^+} \left(\frac{dT^+}{dy^+} - c \frac{dT'^+}{dy^+} \right) dy^+ < 0 \dots\dots\dots (30)$$

すなわち, $Pr \leq Pr_t (=0.85)$ のとき, $y^+ < k^+$ の領域で Pr_t' が著しく小さくならない限り, 粗面の熱伝達率は, 圧力損失の倍率以上に大きくなることはない. 以上は, 突起面の抗力への寄与が熱伝達への寄与より大きいこと[式(26)], および $Pr \leq Pr_t$ の条件からの結果である. 後者の条件について考えてみる. 式(22)や式(23)の導出からわかるように, Pr_{eff} は, 運動量輸送と熱輸送の有効渦拡散係数の比を表している. すなわち, Pr_{eff} が小さいと, 運動量輸送に比して熱輸送がより活発に行われる. 粗面において, $\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_t'$ へと増加したとすれば, $Pr \leq Pr_t$ のときには, $Pr_{eff} \leq Pr_{eff}'$ となり, 滑面と比較して, 熱輸送は運動量輸送ほど大きくはならない. 以上のことから, 式(30)の結論が導かれるといえる.

3・1・2 $\eta > 1$ となる条件について 上述の議論から, Pr が大きく, $Pr \gg Pr_t$ のときには, 渦粘性係数 ε_t の増加は, 熱輸送に対してより効果的に作用するようになる. したがって, 圧力損失の増加に対し, より効率的に熱伝達を促進する可能性がある. Pr を大きくすることによる効果を見るため, 温度伝導率を減少させ, $Pr \gg Pr_t$ とした場合を考えてみる. 式(16)および式(18)より, 式(21)について次式が得られる. なお, 以下の議論では, Pr の変化の影響を概観することを目的とし, $Pr_t = Pr_t'$ を仮定する.

$$\begin{aligned} \int_0^{b^+} \left(\frac{dT^+}{dy^+} - c \frac{dT'^+}{dy^+} \right) dy^+ \\ \cong \int_0^{b^+} \left\{ E \frac{Pr_t \nu}{\varepsilon_t} - \frac{c}{a} E' (1 - R_h) \frac{Pr_t \nu}{\varepsilon_t'} \right\} dy^+ \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

上式の積分範囲のうち, まず y^+ が突起高さより大きい領域を考える. $y^+ \geq k^+$ の領域で, 一般に, 粗面と滑面で混合距離は変化しない⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾. このことから, $y^+ \geq k^+$ では渦粘性係数の比 $(\varepsilon_t'/\varepsilon_t)$ は, 摩擦速度の比に等しく, ここでの定義によれば $\sqrt{c}$ となる. $R_h = 0$ ならびに $a = 1$, また式(24)の関係 $E' > E$ を考慮すれば, 式(31)より,

$$\begin{aligned} \int_{k^+}^{b^+} \left(\frac{dT^+}{dy^+} - c \frac{dT'^+}{dy^+} \right) dy^+ \\ < \int_{k^+}^{b^+} Pr_t \nu E \frac{1 - \sqrt{c}}{\varepsilon_t} dy^+ < 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

となり, $c > 1$ より上式左辺は負の値となる.

次に, $y^+ \leq k^+$ の領域での積分を考える. 壁のごく近傍では $E' \approx E \approx 1$ である. $y^+ \leq k^+$ で渦粘性係数がどのように変化するかは未知の問題であるが, 簡単のため, $(\varepsilon_t'/\varepsilon_t) = \sqrt{c}$ として, $y^+ \leq k^+$ の領域で, 式

(31)の積分が正になる可能性について検討してみる. 上記の関係を式(31)に適用し整理すれば, 次式を得ることができる.

$$\begin{aligned} \int_0^{k^+} \left(\frac{dT^+}{dy^+} - c \frac{dT'^+}{dy^+} \right) dy^+ \\ = \int_0^{k^+} Pr_t \nu E \frac{a - \sqrt{c} (1 - R_h)}{a \varepsilon_t} dy^+ \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

式(32)は負となるが, 式(33)の $y^+ \leq k^+$ の領域でその分を補うことができれば, 熱伝達率は滑面の c 倍以上となることができる. 式(33)が正になるためには, 粗さ要素による流路の閉そくがあまり大きくない(a が小さくならない)こと, 圧力損失の増加率 c があまり大きくないこと, 突起の伝熱への寄与 R_h が大きいことが条件となる. 一例として, Hosni ら⁽¹³⁾ の計算結果を参照すれば, ピッチと半球状突起直径の比 $L/d_0 = 4$, 流速 12 m/s のとき, $a \approx 0.95$, $c \approx 1.25$, $R_h \approx 0.3$ より式(33)は正となりうる. なお, $R_h = 0$, すなわち突起からの伝熱がない場合を考えると, 式(33)は負となり, たとえ $Pr \rightarrow \infty$ となっても, 熱伝達率の上昇は圧力損失のそれを上回ることはない.

Pr の変化による, 粗面の圧力損失と熱伝達率の相関関係を概略的に見るため, 粗面における効率 η [= (熱伝達率の倍率)/(圧力損失の倍率)] を, 簡単に試算してみる. 熱伝達率は, 式(16)および式(18)中の温度こう配を積分して流路中央と壁温との差を算出して求める. 上述の Hosni らの空気に対する計算結果を参考にし, $L/d_0 = 4$, 風速 12 m/s および 58 m/s の場合について, それぞれ突起高さ $k^+ = 20$ および $k^+ = 80$ のとき, $y = 0$ での $R_h = 0.3$ を用いて近似的な計算を行う. 上述のように, 流路全体を通して $(\varepsilon_t'/\varepsilon_t) = \sqrt{c}$ ($k^+ = 20$ のとき $c = 1.25$, $k^+ = 80$ のとき $c = 1.85$) とする. 粗面の式(18)を積分するに当たり, Hosni らが用いた突起上での局所熱伝達率の整理式を参照して R_h の分布を求めた. また, $Pr_t' = Pr_t = 0.85$ として計算を行った. 空気および水については, Pr_t の y に対する関数形が提案されているが⁽⁹⁾, $Pr_t = 0.85$ とした結果と η には数%程度の差しか認められなかった. 図2に η の計算結果を示す. $k^+ = 80$ ではすべての Pr で $\eta < 1$ であるが, $k^+ = 20$ では Pr が5以上になると, $\eta > 1$ となるのがわかる. この結果は, Dipprey-Sabersky の実験結果⁽⁶⁾ や, Webb らの実験整理式⁽¹⁸⁾ の傾向と一致している. すなわち, プラントル数が大きく, 粗さ高さが遷移域 ($5 \leq k^+ \leq 70$) 程度の大きさのとき, $\eta > 1$ となる場合がありうる. k^+ が遷移域より大きくなると, 式(33)中の c が R_h の増加以上に大きくなり, η の低下が生じるものと考えることができ

Fig. 2 Efficiency of heat transfer for rough walls

る。

3.2 リブレット面での熱伝達 これまでは、粗さを設置して、抗力が増大する場合を考えてきた。乱流抵抗を減少させる手法として、壁面上に縦溝をつけるリブレット面は、レイノルズ数や流体の物性によらず最大10%の抵抗減少が達成できるため、実際にもよく用いられている⁽¹⁹⁾。Choiらは、リブレット面上での熱伝達率の測定を行い、抵抗が減少するにもかかわらず、熱伝達率が増加することを示している⁽⁸⁾。ここでは、壁面にリブレットを設け、乱流抵抗が減少する場合の熱伝達率の変化について考察を行う。

滑面および粗面に対する式(16)および式(18)より、壁温と流路中心温度の差 ΔT の、リブレット面と滑面との差を考えてみる。

$$\Delta T^+ - \Delta T'^+ = \int_0^{b^+} \left\{ \frac{E}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_t}{Pr_t}\right)} - \frac{E'(1-R_h)}{a\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_t'}{Pr_t'}\right)} \right\} dy^+ \quad \dots\dots\dots (34)$$

上式が正となれば、熱伝達率はリブレット面のほうが滑面より大きくなる。上式中、リブレット面では、滑面からの速度分布の変化はごく小さく、 $E \cong E'$ としてよい。 $Pr_t' = Pr_t$ としたとき、リブレット面で熱伝達率が増加する可能性について検討してみる。図3は、Choiらの温度分布の測定結果である。熱伝達率の増加に対応し、壁温との温度差はリブレット面のほうが滑面より小さくなっている。この実験の場合、温度境界層は完全に発達しておらず、温度差は $\Delta T'^+ \approx 8$ と非常に小さい。抵抗減少が生じるとき、仮想原点からリブレット頂部までの高さは、粘性底層厚さ程度となる⁽⁸⁾。したがって、突起頂点までの領域で $\Delta T'^+$ の20~30%が含まれているのがわかる。このように突起頂点までに温度差のかなりの部分が含まれる場合、突起高さが非常に小さいにもかかわらず、その影響、す

Fig. 3 Log-law plot of mean temperature profiles over smooth and riblet surface

なわち式(34)中の $(1-R_h)/a$ の影響を無視することはできない。図3を見ると、突起直上の $y^+ = 5$ で、リブレット面の温度が、滑面のものよりすでに下方にずれている。すなわち、壁面に近い領域で、熱抵抗はリブレット面のほうが小さい。そして、そのずれがそのまま外層まで影響を与えており、滑面との温度差に寄与を及ぼしているのがわかる。このことは、突起高さ以下の領域で、式(34)の $(1-R_h)/a$ が1より小さく、突起表面からの伝熱の寄与 R_h が単純な面積比 $(1-a)$ 以上になっていることを示唆している。滑面とリブレット面の渦粘性係数において、 $\epsilon_t > \epsilon_t'$ であることに注意すれば、突起より上の対数法則域 $[(1-R_h)/a = 1]$ で、式(34)の被積分関数は負となる。したがって、発達した温度場で対数法則域が十分大きい場合、全体として熱伝達率の低下を生じる。しかしながら、 $\Delta T'^+$ が小さい場合、上述の底層内の突起の影響は無視できず、熱伝達率の増加に寄与する効果があるものと考えられる。

4. 結 言

粗面流路について、流路内 xz 平面内で平均した運動量、エネルギー方程式を導き、滑面からの熱伝達率と圧力損失の増加割合の比、すなわち粗面における効率 η に関する考察を行った。プラントル数 Pr が乱流プラントル数 Pr_t より小さい場合には、 η は1より小さく、粗面の熱伝達率は、圧力損失の増加を超えて大きくなるのは困難である。これは、粗面における突起の抗力への寄与が、伝熱量への寄与より大きいことに起因する。 Pr が Pr_t より大きい場合、粗面による渦粘性係数の増加は、熱伝達に対してより効果的に作用するため、 $\eta > 1$ の場合もありうる。 $\eta > 1$ となるためには、粗さ要素による流路の閉そくがあまり大きくないこと、滑面からの圧力損失増加があまり大きくなら

ないこと、および突起表面からの伝熱の寄与が大きいことが条件となる。

抵抗が減少するリプレット面において、滑面より熱伝達率が増加する理由として、以下の原因が考えられる。すなわち、温度境界層が未発達なとき、壁面近傍の温度場の挙動が無視できない。その結果、突起近傍の熱抵抗が小さいリプレット面のほうが、熱伝達率が大きくなる可能性がある。

文 献

- (1) Bergles, A. E., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **119**-1(1997), 8-19.
- (2) 稲岡恭二・ほか2名, 機論, **57**-537, B(1991), 1734-1739.
- (3) Tiggelbeck, St., ほか2名, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **116**-4(1994), 880-885.
- (4) Han, J. C. and Zhang, Y. M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**-2(1992), 513-523.
- (5) 廣田真史・ほか4名, 機論, **63**-608, B(1997), 1327-1335.
- (6) Dipprey, D. F. and Sabersky, R. H., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **6**-5(1963), 329-353.
- (7) Cheng, L., ほか3名, *Proc. 10th Int. Heat Transf. Conf.*, (1994), 13-18.
- (8) Choi, K. S. and Orchard, D. M., *Exp. Thermal Fluid Sci.*, **15**(1997), 109-124.
- (9) Kays, W. M., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **116**-2(1994), 284-295.
- (10) Kasagi, N., ほか2名, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **114**-3(1992), 598-606.
- (11) Pimenta, M. M., ほか2名, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **101**-2(1979), 193-198.
- (12) Kozlu, H., ほか2名, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **114**-2(1992), 348-353.
- (13) Hosni, M. H., ほか2名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **34**-4(1991), 1067-1082.
- (14) Hosni, M. H., ほか3名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **36**-1(1993), 147-153.
- (15) Yakhot, V., ほか3名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **30**-1(1987), 15-22.
- (16) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., (1979), 617, McGraw-Hill.
- (17) 大坂英雄・ほか2名, 機論, **64**-619, B(1998), 709-716.
- (18) Webb, R. L., ほか2名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **14**-4(1971), 601-617.
- (19) Walsh, M. J. (Bushnell, D. M. and Hefner, J. N., eds.), *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers*, (1990), 203-261, AIAA.