CIVA-粒子法の非圧縮性流体解析への応用*

田 中 伸 厚^{*1}

Application of CIVA-particle method to incompressible fluid simulation

TANAKA Nobuatsu^{*2}^{*2} Nuclear Engineering Laboratory, Toshiba Corporation,
4-1 Ukishima-cho, Kawasaki-ku, Kawasaki, 210-0862 Japan

This paper presents an application algorithm of CIVA method, which is so flexible as to enable to integrate the CIP, gridless and particle method, to incompressible fluid simulation. The CIVA-based algorithm that is combined with the methods such as the control volume method, the MAC method, the automatic unstructured mesh generation method makes it possible to simulate many kinds of problems having complex geometries and phenomena with a high accuracy. To confirm the possibility, numerical analyses for some benchmark problems were executed. The results showed that the method achieves high accuracy and has high flexibility even for the flows of high Reynolds number, complicated geometries, moving boundaries and free surface.

Key Words: CIVA, Particle Method, Incompressible Fluid, Control Volume Method, Delaunay Tessellation, Unstructured Mesh

1. はじめに

熱流動解析に最も広く使われている数値解析法として有限差分法(FDM)があるが、使用するメッシュに対する制約が厳しく複雑な形状や現象に対しては限界がある。この問題を解決するため、近年では、メッシュの扱いを簡略化したり省略した、グリッドレス法[1]や粒子法[2,3]といったメッシュフリー手法が注目されている。これらの手法により非圧縮性流体を解析する場合に最も問題となるのは質量保存則の取り扱いである。最近注目されている粒子法では、粒子密度を一定にすることにより質量保存則を考慮している。しかし、この方法では、粒子数が少ないと質量と運動量の保存則を同時に満足させることが難しいものと思われる。一方、メッシュフリー手法にも適用可能な高精度補間法のCIVA法[4]は、補間に利用する幾何学形状は三角形でCIP法[5]型の三次補間を可能とするため、近年研究の進んでいるボロノイ/デローニ分割[6]の手法を用いて対象領域を自動メッシュ分割することができる。このような自動メッシュ分割に基づく解析手法として、谷口らはボロノイ分割に基づく手法を提案している[7]。しかし、本研究では、ボロノイ多角形ではなく、デローニ三角形に注目し、それを質量保存則のコントロール・ボリュームとして、有限体積法(FVM)に基づく非圧

縮性流動解析手法を提案する。移流項評価は、CIVA-粒子法(CIVA-particle法)を用いる。このような方法は、実際にはメッシュを作っているため厳密な意味でメッシュフリー手法とは言えないが、コード内で自動的に行っており、コードを使うユーザーはメッシュを意識せずに解析を実施できるため、疑似的なメッシュフリー手法とも考えられる。

一方、本手法は、計算点の移動を許容する非構造格子を用いた流動解析手法とも考えられる。従来、非構造格子を用いた方法は、移流項の精度良い評価が困難であった。CIVA法を用いた方法では、三次元移流問題に対し、三次から四次精度であることが確認されており[8]、本研究は非構造格子を用いた流動解析手法の高精度化という側面もある。つまり、粒子法などのメッシュフリー手法は、新しい手法であるため、実用的な解析を行うには、今後更に精度・安定性などの検討が必要である。そのため、本解析コードは、基本アルゴリズムはあえてメッシュフリーの手法をとらず、実績のあるFVMやMAC法を採用した。このことにより、従来の資産を生かしつつ、メッシュフリー型の汎用性とCIVA法の高精度性を両立が可能となる。

以上の観点から、本論文ではCIVA法に基づく非圧縮性流動解析手法の一例を提案するとともに、ベンチマーク問題を解析することによりその基本アルゴリズムの妥当性の確認問題点を明らかにすることを目的とする。

* 原稿受付 1998年9月8日。

^{*1} 正員, (株)東芝原子力技術研究所(〒210-0862 川崎市川崎区浮島町4-1)。

E-mail: nobuatsu.tanaka@toshiba.co.jp

2. 解析手法

ここでは、CIVA法を用いて非圧縮性流体解析を行うアルゴリズムについて説明する。

2.1 非圧縮アルゴリズム 非圧縮性流体を対象とし、粒子の移動を考慮する場合の支配方程式は以下の3つの式となる。

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (3)$$

メッシュフリー手法により非圧縮性流体を解析する場合に最も問題となる質量保存則の評価は、自動メッシュ分割法とFVMの組み合わせにより評価する。自動メッシュ分割の方法も様々提案されているが、ここでは、2.2節で説明するデローニ/ボロノイ分割法を用いてコード内で自動的に処理する。全体アルゴリズムは、MAC法[9]をベースとした図1に示す方法を用いた。

Fig.1 MAC based algorithm

FVM+MAC法では、ポアソン方程式は、コントロール・ボリューム Ω で積分され(4)式ようになる。

$$\int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{n} = 1/\Delta t \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad (4)$$

ここで、 $\int_{\partial\Omega} \mathbf{n}$ は境界面での面積分を表し、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は流速の予測値である。そのコントロール・ボリュームとし

ては、ボロノイ多角形(図2)を用いることもでき[7]、低レイノルズ数流れでは解析も可能である(図3はレイノルズ数 $(Re) = 10^2$ のキャビティ流れの例)。しかし、圧力と流速定義点が同一点上にあるため、圧力解が空間的にチェッカーボード状に振動し、高レイノルズ数の流れを解くことは困難となる。この問題を解決するには、有限要素法(FEM)で研究されているような安定化手法を組み込む必要がある。また、この方法では、境界上に流速定義点がないため、CIVA法で利用する微係数に対する境界条件も与えにくい。

一方、本研究では、これらの問題を解決するため、質量保存則に関するコントロール・ボリュームとして、ボロノイ多角形を用いるのではなく、それと相対なデローニ三角形を用いる。更に、圧力定義点として、その三角形の重心位置に仮想的な圧力定義点を設ける

(図4)。この点は三角分割を行って初めて定義点が見られるものとなる。このようなデータ配置は、スタガード型であり圧力の振動を抑えることができる。(4)式の圧力ポアソン方程式は、初期値を粒子上の値から与えて解く。その解より、粒子速度を修正し、粒子の圧力は補間で求め直す。また、拡散項と流速修正における圧力勾配の評価は、三角形の重心点よりなる多角形をコントロール・ボリュームとして評価した。

Fig.2 Voronoi/Delaunay tessellation

Fig.3 Particle velocity by Voronoi based algorithm ($Re=10^2$)

Fig.4 Control volume for mass conservation

2.2 自動メッシュ分割 上記のように、領域のメッシュ分割はデローニ／ポロノイ分割法を用いてコード内で自動的に行う。デローニ三角分割の基本アルゴリズムは参考文献[6]のものを利用した。また、ポロノイ分割は、各辺の垂直二等分線から構成できる。ただし、このような自動メッシュ分割方法は、現在、研究が進められている段階であり、特に、三次元の場合、更なる研究が必要である。

Fig.5 Coordinates for 2-D CIVA

2.3 CIVA法とCIVA-粒子法 計算点再配置の際に必要なデータ補間にはCIVA法を用いる。そのため、図5に示すように、計算点上にはスカラー量だけでなくその空間微係数も配備する。

2.3.1 CIVA法 CIVA法では、対称性を考慮し、三角形内のスカラー量に関する3次関数を、面積座標(L_1, L_2, L_3)を用いて以下の形におく[4]。

$$f(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1(j \neq k)}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_j L_2 L_3) \quad (5)$$

d は1次補間と3次補間の調節パラメータで、本論文では、 $d=1$ の3次補間を用いている。 $L_1 L_2 L_3$ の項は、三角形の頂点ではスカラー値、微係数ともに0となるため、頂点上の情報から c -パラメータを与えることはできず、別の条件により与える必要がある。その他の係数は、 c にかかわらず、また、係数に関する連立一次方程式を解くことなく、以下のように決まるため、計算効率の点でも有利である。

$$\alpha_i = f_i, \quad \beta_{jk} = f_i - f_j + (x_j - x_i) f_i^x + (y_j - y_i) f_i^y \quad (6)$$

c -パラメータの決め方として、三角形の頂点以外の計算点の情報を用いる方法や、最小自乗法を用いる方法も考えられるが、ここではFEMの分野で用いられている定曲率条件[10,11]によって与える。定曲率条件は、三角形内の任意の点での微係数が任意の値をとりうるための条件である。基本的な考え方は、(不完全)三

次多項式(5)が、完全二次多項式を包含するように与える[11]。すなわち、 c を決めたとき(5)式で与えられる関数の作る関数空間を S_3^c ($f \in S_3^c$) とし、完全二次多項式の作る関数空間を S_2 ($g \in S_2$) とすると、

$$S_3^c \supset S_2 \quad (7)$$

となるような c を求める。

まず、面積座標を用いて完全二次多項式は、

$$g(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 a_i L_i + \sum_{j,k=1(j > k)}^3 b_{jk} L_j L_k \quad (8)$$

と書ける。頂点上のスカラー値については、

$$a_i = \alpha_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

で十分であるから、空間微係数だけを考えればよい。頂点上の微係数に関し、(8)式より g^x, g^y を計算し、

$$f_i^x = g_i^x, \quad f_i^y = g_i^y, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

とおく。これらを(6)式に代入し、(5)式を b_{jk} について整理すると以下の式が得られる。

$$f(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + L_1 L_2 (L_1 + L_2 + 2c L_3) b_{12} + L_2 L_3 (2c L_1 + L_2 + L_3) b_{23} + L_1 L_3 (L_1 + 2c L_2 + L_3) b_{13} \quad (11)$$

ここで、面積座標の性質、 $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ を考慮すると、 $c=1/2$ のときに限り三次多項式(5)は、条件(7)を満足し、定曲率条件を満たす。三次元の場合も同様に定式化できる[13]。

Fig.6 CIVA-particle by means of moving cubic spline

2.3.2 CIVA-粒子法 本コードでは、移流項の評価(計算点の再配置も含めて)はCIVA-粒子法(CIVA-particle法)[4]で行う。CIVA-粒子法では、計算点上にはスカラー量だけでなくその空間微係数も配備し、計算点を流れにしたがって移動させることにより移流項

を評価する。この考え方は、図6に示すように、三次スプライン関数を流れにしたがって移動させていることと等価である。CIVA-粒子法では、移流は次の3つのフェーズで計算され、これをLRI法と呼ぶ。

- (C.1) Lagrangian phase . . . 計算点の移動
- (C.2) Rearrangement phase . . . 計算点の再配置
- (C.3) Interpolation phase . . . データの補間

LRI法では、(C.2)の計算点再配置で、計算ステップ毎に計算点を初期化すればグリッドレス型、流れに従って粒子を移動させ再配置を行わなければ粒子法型のアルゴリズムとなる。従って、CIP型の三次補間を行っているCIVA-粒子法は、グリッドレス法、粒子法、CIP法を統合したアルゴリズムであると考えられる。このような計算点の再配置は、グリッドレス法では固定、粒子法では流れに従って移動するため、グリッドレス法や粒子法の計算点は、前ステップの計算点位置と流れ場に依存すると言える。しかし、CIVA-粒子法は、そのどちらにも依存しない計算点で解析が可能である。この場合LRI法は、メッシュフリー型のALE法[12]とも考えられるが、定式化上は「Rezoning phaseにおける移流束評価を風上化により計算するALE法」と等価であることも確認できる(付録参照)。

2.4 計算点再配置アルゴリズム 上述のように、本手法は、計算点の再配置を前ステップの計算点位置や流れ場、粒子密度(非圧縮性条件として用いられることもある[2,3])とは独立にしたことにより、再配置アルゴリズムを自由に選択でき、汎用性が高い。その特長を示す一例は[13]に示されている。そこでは、ランダムに揺らぐ計算点を用いて純粋移流問題を解析しており、そのような厳しい条件にもかかわらず良好な結果が得られている。また、補間に用いる三角形の変形についても調べられており、変形に対するCIVA法の強健さも確認されている。

従来の計算点再配置の方法として最も単純なものは、前ステップの元の位置に戻す方法である。この場合、三角分割は1回のみ行えばよく計算効率は良いが、移動境界などは取り扱えない。その他の代表的な方法としては、粒子密度を一定にする方法[2,3]があるが、ここでは、新しい手法として電荷モデルを提案する。これは、各粒子に電荷を与え、その反発力で粒子密度の均一化を図る方法で、近傍の粒子からのクーロン力に従って粒子を移動させる反復を繰り返すことにより、

クーロン力の合計が最少化される位置に再配置するものである。この方法は、初期の粒子配置決定にも応用でき、粒子の電荷を変えることにより粒子密度を調整する解適合法も考えられる。

(a) Vertical velocity at horizontal center

(b) Horizontal velocity at vertical center
Fig. 7 Comparison of velocity profile

3. 解析結果

3.1 正方空間内キャビティ流れ まず、ベンチマーク問題として標準的な、正方空間内のキャビティ流れ問題を解析した。用いた粒子数は境界を含めて121である。今回は、(1)式の粒子移動を陽的に評価しているため時間刻みを大きくとることはできず[4]、クーラン条件の1/10に固定した。レイノルズ数は $10^2, 10^3, 10^4$ とした。また、壁面法線方向の微係数に対する境界条件は、流体側のスカラー値の分布より与えた。まず、各座標方向中央部での流速をベンチマーク解[14]と比較した。結果を図7に示す。Re=10²の場合、結果は良く一致している。しかし、Reを大きくしていくと特に流速勾配の大きな領域で結果がずれている。この点に関し、粒子数の影響を調べるため、レイノルズ数 10^4 の場合に、用いる粒子数を441と変えた解析を行った。結果を図8に示す。粒子数を増やすことにより壁面付近の速度勾配は

界条件の与え方の影響であると思われる。これらの点については、今後、検討・改良を行っていく予定である。

(a) Vertical velocity at horizontal center

(b) Horizontal velocity at vertical center

Fig. 8 Effect of the variation in particle number ($Re=10^4$)

(a) $Re=10^2$ (b) $Re=10^4$
Fig.9 Particle velocity

Fig.10 Interpolated velocity field with CIVA($Re=10^3$) Fig.11 Tracing particles without rearrangement($Re=10^3$)

次に、粒子速度の分布を図9,10に示す。図10は $Re=10^3$ の場合の速度場をCIVA法で補間して求めた流速

場である。これらの解析では、粒子の再配置に2.4節で説明した電荷モデルを採用しているが、毎時間ステップ計算点再配置をしており、時間刻みが小さいことと相まって粒子はほとんど移動しない。そこで、計算点再配置を行わずに粒子の流れに従って移動させながら解析を行った。結果を図11に示す。流体の挙動が良く再現されている。ただし、この方法では図11に示すように、粒子が壁面に接近したり、粒子数の少ない領域ができたりするため、そのまま解析を継続するのは困難で、粒子の再配置を行う必要がある。

計算時間の観点から見ると、本手法はプロトタイプであり計算効率の最適化を行っていないため単純な比較は出来ないが(タイムステップ毎に初めからメッシュ生成を実施、非効率なボアソン・ソルバー、等)、ほぼFDM(構造格子)の十倍程度であった。元来、本手法はFEMとFDMの中間的な手法と考えられるため、アルゴリズムを最適化することにより、計算時間も、FEMとFDMの中間的なものになると考えられる。

3.2 自由液面流れ 次に、自由液面を有する流体の振動問題[15]を解析した。用いる粒子数は225で、粘性は0とし、初期条件は図12に示すように与えて静止状態から計算を開始した。なお、自由液面の境界条件は圧力を0とし、液面と平行な方向に滑り境界とすることで与えている。また、計算点再配置は鉛直方向のみ考慮し、水平方向は固定した。壁面水位の時刻歴を図13に示す。比較のため、 100×150 のメッシュを用いたFDM-VOFによる結果も含めた。CIVA-粒子法では計算点が少ないにもかかわらず良好な結果が得られている。また、この問題では粘性0であるため、速度ポテンシャル

Fig. 12 Free surface sloshing problem

(a) FDM-VOF (100x150 grid points)

(b) CIVA-particle (225 particles)

Fig. 13 Time history of surface level by left and right wall

Table 1 Comparison of sloshing frequency

	Vector potential	FDM-VOF	CIVA-particle
Frequency	0.882	0.869	0.862

(a) FDM-VOF (Left: at time A, Right: at time B)

(b) CIVA-particle (Left: at time A, Right: at time B)

Fig. 14 Flow vector and pressure distribution

法により振動周期を計算することができる。表1に振動周期の比較を示す。速度ポテンシャル法は線形理論であるため、FDM-VOFとCIVA-粒子法とはやや異なった結果になっているが、FDM-VOFとCIVA-粒子法ではよく一致している。図13中の時刻A,Bにおける流況が図14である。自由液面の挙動が良く再現できている。

3.3 複雑体系内移動境界問題 次に、より複雑な問題の一例として、移動境界を伴う複雑領域内の流れ解析を行った。問題は、図15に示す領域の回転翼による流れである。この問題も、上述の電荷モデルを使うことにより粒子の間隔を一定に保っている。結果を図15に示す。翼により回転流れが形成され、それに伴って右側に二次渦が生成する様子がわかる。

Fig. 15 Particle velocity of flow around rotating wings in a complicated geometry ($Re=10^3$)

4. まとめ

高精度補間法CIVA法と粒子法の組み合わせによる非圧縮性流体解析手法について説明した。その基本アルゴリズムは、有限体積法、MAC法、デローニ自動三角分割法、安定化データ配置、計算点再配置アルゴリズムなどに基づいており、柔軟で高精度な解析を可能とする。その検証問題として、キャビティ流れ、自由液面流れ、複雑体系問題、移動境界問題を取り上げ、有効性を確認した。また、CIVA法における c -パラメータの決め方やCIVA-粒子法とALE法の関係についても考察を行った。

参考文献

- [1] Batina, J.T., AIAA Paper 93-0333(1993).
- [2] 梅垣, 他1名, 数値解析, 43-3 (1992).
- [3] Koshizuka, S., 他1名, CFD Journal, 4-1 (1995).
- [4] 田中, 機論, 64-620, B (1997).
- [5] Yabe, T., 他1名, J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988).
- [6] 谷口, FEMのための要素自動分割, 森北出版 (1992).
- [7] 谷口, 他1名, 機論, 55-513, B (1989).

- [8] 田中, 日本原子力学会1998年秋の大会予稿集(II), G38.
 [9] Harlow, F.H., 他1名, Phys. Fluids, 8-12 (1965).
 [10] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method (3rd Edn.), McGraw-Hill Co. Ltd. (1977).
 [11] Bazeley, G.P., 他3名, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Ohio (1965).
 [12] Hirt, C.W., 他2名, J. Comp. Phys., 14 (1974).
 [13] Tanaka, N., CFD Journal, 8-1 (1999).
 [14] Ghia, U., 他2名, J. Comp. Phys., 48 (1982).
 [15] Ramaswamy, B., J. Comp. Phys., 90 (1990).

付録 CIVA-粒子法とALE法

ここでは、CIVA-粒子法におけるLRI法とALE法の関係について考察を行う。まず、図16に示すように、空間(固定)座標： $x(x, y)$ 、物質座標： $X(X, Y)$ 、ALE基準(移動)座標： $\chi(\chi, \xi)$ と座標系を設定する。以上のそれぞれの座標に対し、移流方程式は以下のように表される。

Fig.16 Coordinate system

$$\text{固定座標表示} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f = 0 \quad (19)$$

$$\text{物質座標表示} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

$$\text{ALE座標表示} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) f = 0 \quad (21)$$

ただし、ALE座標系での座標移動速度を $\mathbf{w}$ とし、 $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ とおいている。

Fig.17 Coordinates in LRI

LRI法 CIVA-粒子法におけるLRI法の各フェーズは、以下の評価を行っていることになる(図17参照)。

(C.1) Lagrangian phase (20)式を評価し、時間ステップを $n \rightarrow n+1$ に進める。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{n+1} &= \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{u} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u} \\ f(t^{n+1}, \mathbf{X}^{n+1}) &= f(t^n, \mathbf{X}^n) \end{aligned} \quad (22)$$

(C.2) Rearrangement phase 計算点の再配置を行い $(n+1)$ 時刻の計算点の位置 $\mathbf{x}^{n+1}$ を決める。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{w} = \mathbf{X}^{n+1} - \Delta t \mathbf{c} \quad (23)$$

(C.3) Interpolation phase 位置 $\mathbf{x}^{n+1}$ におけるデータ $f(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1})$ を求めるため、補間を行う。

$$f(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}) = f(t^{n+1}, \mathbf{X}^{n+1} - \Delta t \mathbf{c}) \quad (24)$$

ここで、(22)式を用いると以下ようになる。

$$f(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}) = f(t^n, \mathbf{X}^n - \Delta t \mathbf{c}) \quad (25)$$

$\mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n$ を考慮すると、LRI法は(C.1)~(C.3)の手順により以下の式を評価しているといえる。

$$f(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}) = f(t^n, \mathbf{x}^n - \Delta t \mathbf{c}). \quad (26)$$

Fig.18 Coordinates in ALE

ALE法 一方、ALE法は、移流問題を陽的に評価する場合、以下の2つのフェーズより成る[12]。

(A.1) Lagrangian phase

(A.2) Rezoning or Convective flux calculation phase

これらの各フェーズは、Fractional steps的な時間ステップの進め方を行い、以下の評価を行う(図18参照)。

(A.1) Lagrangian phase (20)式を評価するが、時間ステップは完全に進めず中間段階Lでの値とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^L &= \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u} \\ f(t^L, \mathbf{x}^L) &= f(t^n, \mathbf{X}^n) \end{aligned} \quad (27)$$

(A.2) Rezoning phase メッシュのリゾーニングを行

い、(n+1)時刻の計算点の位置 $\mathbf{x}^{n+1}$ を決定する。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{w} = \mathbf{x}^L - \Delta t \mathbf{c} \quad (28)$$

更に(n+1)時刻の計算点の位置でのデータを求めるため、(21)式を評価（移流束評価）する。一般に、この評価は、(21)式を離散化して行うが、ここでは式(21)を風上化により評価することを考える。その場合、座標移動を考慮して、以下の式を評価することになる。

$$f(t^{n+1}, \chi^{n+1}) = f(t^L, \chi^L - \Delta t \mathbf{c}). \quad (29)$$

いま、

$$f(t^L, \chi^L) = f(t^L, X^L) \quad (30)$$

が成り立つので、式(29)は式(27)を考慮して以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, \chi^{n+1}) &= f(t^L, X^L - \Delta t \mathbf{c}) \\ &= f(t^n, X^n - \Delta t \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (31)$$

従って、移流束を風上化により評価する場合、 $\chi^{n+1} = \mathbf{x}^{n+1}$, $X^n = \mathbf{x}^n$ を考慮すると、(A.1)～(A.2)のフェーズは、以下の式を評価しているといえる。

$$f(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}) = f(t^n, \mathbf{x}^n - \Delta t \mathbf{c}) \quad (32)$$

式(26)と(32)より、LRI法は、「Rezoning phaseにおける移流束評価を風上化により計算するALE法」と等価であることがわかる。