重力振動場における円筒容器内自然対流に関する数値解析*

宮西 貴子^{*1}, 平田 勝哉^{*2}, 谷川 博哉^{*3}A Numerical Study of Natural Convection in a Cylindrical Cavity
with Gravity ModulationTakako MIYANISHI, Katsuya HIRATA^{*4} and Hirochika TANIGAWA^{**} Department of Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto, 610-0321 Japan

To investigate natural convection in a cylindrical cavity with sinusoidal gravity modulation, the authors calculated it by the finite difference method. The full Navier-Stokes equations in axisymmetric cylindrical coordinates are simplified with the Boussinesq approximation. The Rayleigh number Ra and the Prandtl number Pr are equal to 2.8×10^5 and 0.7, respectively. While except for a few cases, non-dimensional gravity acceleration amplitude η is fixed at 0.1, non-dimensional angular frequency ω is varied from 10^0 to 10^5 . In the tested range, velocities and temperatures at any points fluctuate sinusoidally at the same frequency as the gravity acceleration does, while their amplitudes are varied against ω . Temperature's amplitudes are much smaller than velocity's ones, everywhere. It is made clear that the velocity's amplitude can have a maximum value at a certain angular frequency $\omega_{\max}$, although any instantaneous flow patterns are similar to that without gravity modulation. More specifically, globally $\omega_{\max} \approx 200$, but $\omega_{\max}$ varies from 10^1 to 10^3 depending on the location. In addition, further results with much larger acceleration amplitudes are presented at $\omega = 200$.

Key Words: Natural Convection, Finite Difference Method, Axisymmetric Motion, Boussinesq Approximation

1. 緒言

よく知られているように、自然対流は物質移動、熱伝達の重要なメカニズムである。自然対流の応用は多岐にわたり、気象学、地質学や原子炉の安全面などの様々な分野に使われている⁽¹⁾。そのため、内部対流問題については数多くの研究がなされている。例えば、鉛直円筒容器内の対流問題に限っても、坂田⁽²⁾⁽³⁾による側壁部分加熱による自然対流の数値解析や、Torrance⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾による下面部分加熱における、実験と差分法による解析結果との比較などが、行われている。

一方、自然対流への重力振動の影響に関する研究は、平行平板間、及び、2次元矩形容器内などの単純な形状を対象にした線形安定性解析や特定の振動数での数値シミュレーションのみであり⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾、周波数応答特性など未解明な部分が多い。この工学的応用としては、振動による対流の促進・抑制といった流れの制御や、それに伴う伝熱・物質拡散の促進などが期待できる。また、最近、宇宙船

内などでの結晶製造などに諸々の振動が悪影響を及ぼすことから、微小重力場での重力変動による対流の発生も問題になっている⁽⁹⁾⁻⁽¹⁰⁾。

そこで本研究では、Torrance⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾と同様な単純な状況、すなわち、円筒容器内部の空気の流れを考え、下面中央部分加熱、その他の面において冷却を境界条件とし、レイリー数 $Ra=2.8 \times 10^5$ 、プラントル数 $Pr=0.7$ として、有限差分法による数値解析を行った。このレイリー数前後で流れは軸対称定常層流であって大きな変化はない。よって、流れは軸対称性を仮定した。まず、微小な無次元重力加速度振幅 $\eta=0.1$ を与え、無次元角振動数 ω を $10^0 \sim 10^5$ の間で変化させて、周波数特性について調べた。さらに、 $\eta=0.1$ において運動エネルギーの振幅の最大値を示す角振動数 $\omega=200$ で、 η を $0.1 \sim 5.0$ で変化させ、運動エネルギー、内部エネルギーの変化を調べた。

2. 基礎方程式と計算方法

図1のような円柱座標系 (r^*, z^*, θ) を用いて数値計算を行った。

解析にあたって、次のような仮定をおく。(1)流れおよび温度分布は軸対称である。(2) Boussinesq近似

* 原稿受付 1998年7月6日。

*¹ 同志社大学大学院(〒610-0321 京田辺市多々羅都谷1-3)。*² 正員、同志社大学工学部。*³ 正員、舞鶴工業高等専門学校(〒625-8511 舞鶴市字白屋234)。

E-mail: khirata@doshisha.ac.jp

Fig.1 Cylindrical enclosure and co-ordinate system

が成立し、動粘度 ν^* , 熱拡散係数 α^* , 体積膨張率 β^* 等の物性値は一定と見なす。(3) 加熱壁の温度 T_h^* および冷却壁の温度 T_c^* は一定に保たれている。以上の仮定と、本研究では、対流解析に用いられ Boussinesq 近似の浮力項に重力振動 $g^*(1 + \eta \sin \omega t)$ があるものとし、以下の無次元化支配方程式系を用いた。

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \dots (1)$$

$$\zeta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \dots (2)$$

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r}{r} \zeta \\ = \frac{\partial \zeta^2}{\partial r^2} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} - \frac{Ra}{Pr} (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned} \dots (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \dots (5)$$

なお、変数については、速度 $(v_r, 0, v_z)$, 流れ関数 ψ , 渦度 ζ , 温度 T である。式中の無次元パラメータは、

$$\text{レイリー数} \quad Ra = \frac{g^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) R^{*3}}{\nu^* \alpha^*},$$

$$\text{プラントル数} \quad Pr = \frac{\nu^*}{\alpha^*},$$

$$\text{無次元角振動数} \quad \omega = \frac{\omega^* R^{*2}}{\nu^*},$$

$$\text{無次元周期} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\text{無次元重力加速度振幅} \quad \eta,$$

である。なお、時間 $t = t^*/(R^{*2}/\nu^*)$, 座標 $r = r^*/R^*$, $z = z^*/R^*$, 速度 $v_r = v_r^*/(\nu^*/R^*)$, $v_z = v_z^*/(\nu^*/R^*)$, 温度 $T = (T^* - T_c^*)/(T_h^* - T_c^*)$ でそれぞれ、無次元化を行っている。ここで * は有次元量であることを示す。

境界条件は、壁で non-slip 条件、中心軸上で軸対称条件を用いる。なお図 1 の加熱部に関しては、

$$T = 1.0, \quad (0 \leq r^* < R_h^*)$$

$$T = 0.5, \quad (r^* = R_h^*)$$

とし、他の壁ではすべて $T = 0$ となる。

計算方法は、時間に対してクランク・ニコルソン法を、空間に対しては 2 次精度の中心差分法を使った有限差分法を用いた。計算手順は、タイムステップ Δt ごとの領域内の ζ と T を式 (4) と (5) から陰的に求めて、次に式 (3) から ψ を SOR 法で計算した。式 (3), (4) と (5) の収束判定条件は、計算領域の全メッシュ点において、前に計算された値と新たに計算して得られた値の差が、新たに計算された最大値のそれぞれ 10^{-11} , 10^{-9} , 10^{-4} になった時、次の計算に進むようにした。計算メッシュについては、重力振動時も流れ場に大きな変化がない (後掲) ので、Torrance ら⁽⁴⁾ と同様に、高さ方向に 0.05, 半径方向に 0.02 (格子点数 $N_r \times N_z = 21 \times 51$) とした。時間刻み幅は、大部分 $\pi \times 10^{-4}$ とし、大きな ω では必要に応じてさらに小さくした。なお、計算結果が、さらに時間刻み幅を小さくした結果と比較してほとんど同じになることを前もって確認した。

空間平均運動エネルギーと空間平均内部エネルギーに関しては、次式を用いて、計算を行った。

平均運動エネルギー

$$\bar{K} = \frac{2}{(N_r - 2)(N_z - 2)R} \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=2}^{N_z-1} \frac{1}{2} r_i^2 (v_{r,i,j}^2 + v_{z,i,j}^2),$$

平均内部エネルギー

$$\bar{T} = \frac{2}{(N_r - 2)(N_z - 2)R} \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=2}^{N_z-1} r_i^2 T_{i,j}.$$

Brunt-Vaisala 周波数⁽¹⁾, すなわち内部重力波の高周波限界は, 次式を用いて求めた.

$$\omega_{BV} = \left(\frac{Ra}{Pr} \frac{dT}{dz} \right)^{1/2}.$$

3. 結果及び考察

レイリー数 $Ra = 2.8 \times 10^5$, プラントル数 $Pr = 0.7$ (空気) の条件の下で, 無次元重力加速度振幅 $\eta = 0.0$, すなわち, 無振動時の数値計算を行った時に得られた定常解を図2に示す. Torrance らが, 同じ条件の下で数値計算を行って得た定常解⁽⁴⁾と図2を比較したところ, 流線のパターンはほとんど一致した. ただし, 流れ関数の最大値は, 本研究の方が0.66大きい. Torrance らが差分の方法を変えて定常解を求めたところ, 差分法によって定常解が異なる結果が得られたと, 報告されている⁽⁶⁾ので, 計算精度は十分であると考えた.

図2の定常解を初期値として, 重力を $g^*(1 + \eta \sin \omega t)$ で振動させた. 例として, $\eta = 0.1$, $\omega = 200$ の振動を与え, 十分時間が経った時の $(r, z) = (0.5, 0.5)$ における渦度, 温度, 流れ関数を図3にそれぞれ示す. 図3を見ると, それぞれの値は, それぞれにある振幅を持って, 重力加速度振動数で正弦的に振動することがわかる. 他の全ての ω においても, 同じように一定幅で振動する周期解が得られた. また, 同様に, 平均運動エネルギー $\bar{K}$ と平均内部エネルギー $\bar{T}$ に関して, 図4のように時間に対して, 重力振動数で正弦的に振動する周期解が得られた.

Fig. 2 Stream lines, isothermal lines and vorticity contour lines for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, no jitter.

Fig. 3 Time evolutions of ζ , T and ψ for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $\eta = 0.1$, $\omega = 200$, $(r, z) = (0.5, 0.5)$.

Fig. 4 Time evolutions of kinematic energy $\bar{K}$ and internal energy $\bar{T}$ for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $\eta = 0.1$, $\omega = 200$.

3.1 周波数特性

3.1.1 平均運動エネルギーと平均内部エネルギー

微小な無次元重力加速度振幅 $\eta = 0.1$ のもとで, 無次元角振動数 ω を $10^0 \sim 10^5$ の間で変化させた時の $\bar{K}$ と $\bar{T}$ の周期解の振幅 ($\bar{K}_{amp}$ と $\bar{T}_{amp}$) を調べた. その結果を図5に示す. ここに, $\bar{K}$ と $\bar{T}$ の時間平均値 ($\bar{K}_{ave}$ と $\bar{T}_{ave}$) は, ω によらずほぼ一定値であった. 図5を見ると, ω が小さくなると一定値に漸近し, ω が大きくなると振幅0の無振動状態に漸近していくことがわかる. ω を小さくした時の漸近値は, 振幅は $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 0.9$ と $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 1.1$ の $\eta = 0.0$ での定常解の差に収束することがわかる. これは, 本研究において, 重力

が $g^*(1+\eta\sin\omega t)$ で振動しており、 ω が小さくなるとゆっくりとした振動を与えることになり、瞬間、瞬間において準静的な変化をするためである。

さらに、図5から $(\bar{K})_{\text{amp}}$ は、 $\omega=200$ で振幅が最大になっていることがわかる。一方、 $(\bar{T})_{\text{amp}}$ は $(\bar{K})_{\text{amp}}$ に見られるような振幅の最大値を示さなかった。このこと、及び、振幅のオーダーから、温度場よりも、むしろ速度場の方が、重力を振動させることによる影響を受けやすいと、考えられる。この運動エネルギーに見られるような周期解の振幅が最大になる時の ω を最大角振動数 ω_{max} と本研究では呼ぶことにする。

$\bar{K}$ と $\bar{T}$ の位相図を図6に示す。図6を見ると、全ての ω において、 $\bar{K}$ と $\bar{T}$ とともに $\eta=0.0$ での値を中心に変動していることがわかる。さらに、 ω が小さい場合、 $\bar{K}$ が最大になると $\bar{T}$ は最小になり、 $\bar{T}$ が最大になると $\bar{K}$ が最小になることがわかる。つまり、 $\bar{K}$ と $\bar{T}$ の位相差は π である。これは、先ほど述べたように、 ω が小さい時はゆっくりとした振動を与える準静的な変化になる。したがって、 $\bar{K}$ が最大になった時、盛んな対流のため大部分の壁面で冷却が促進されるため、内部エネルギーが小さくなると、考えられる。 $\bar{K}$ が最小になる時はその逆のことがいえる。しかし、 π であった位相差は、 ω が増加するにつれて、少しずつずれていく。そして、 ω_{max} を境に $\bar{K}$ と $\bar{T}$ の振幅変化は小さくなりながら、最後には、 $\eta=0.0$ の定常解へと漸近するするので、位相図では、ほぼ一点の無振動状態に近づく。

次に、冷却部の平均ヌセルト数（冷却部壁面の局所ヌセルト数の空間平均値）の時間平均値 $(\overline{Nu_c})_{\text{ave}}$ を調べた結果を図7に示す。図7を見ると、 $\omega=1000$ で、最大値を持ち、運動エネルギーの振幅の最大値を持つ $\omega (=200)$ とは異なる。後に示すように、空間平均値のかわりに局所的物理量を見ると、この差異の理解が容易になる。すなわち、 $\bar{K}$ に比べて $\overline{Nu_c}$ は壁近傍の流れの影響をより強く受けがちであるが、例えば、加熱部近傍では、200 よりもずっと大きな ω で流れはより盛んに変動する（図11, 12. 後掲）。よって、工学的応用を考えた時、容器内の物質拡散では $\omega=200$ 、伝熱促進では $\omega=1000$ 程度の振動が最も効果的であることが暗示されている。

3.1.2 最大角振動数における流れ 3.1.1 で述べたように、平均運動エネルギーは、 $\omega=200$ で最大角振幅を持つことがわかった。そこで、 $\eta=0.1$ 、 $\omega=200$ において、流線の1周期分の変化を調べた結果を図8に示す。図8と図2に示す流線を比較すると、図8は、 $t=2\pi/4$, $3\pi/4$ において、図2の定常解より流れ関数の値が大きくなっているのがわかる。しかし、その流線の形は、図2の流線とほとんど同じである。

Fig.5 Amplitudes of $\bar{K}$ and $\bar{T}$ against ω for $Ra=2.8 \times 10^5$, $Pr=0.7$, $\eta=0.1$. Dotted line indicates difference between the value for $Ra=2.8 \times 10^5 \times 0.9$ and that for $Ra=2.8 \times 10^5 \times 1.1$, at $\eta=0.0$.

Fig.6 Trajectories of $(\bar{K}, \bar{T})$ for $Ra=2.8 \times 10^5$, $Pr=0.7$, $\eta=0.1$.

3.1.3 円筒容器内の局所的な変化 $\eta=0.1$ において、 ω を $10^0 \sim 10^5$ の間で変化させて、 $(r, z) = (0.2, 0.2)$ と $(0.5, 0.5)$ における渦度 ζ 、温度 T 、そして、流れ関数 ψ 、それぞれの値の振幅 $(\zeta)_{\text{amp}}$, $(T)_{\text{amp}}$, $(\psi)_{\text{amp}}$ を調べた。その結果を図9と図10に示す。なお、時間平均値 $(\zeta)_{\text{ave}}$, $(T)_{\text{ave}}$, $(\psi)_{\text{ave}}$ は ω によらずほぼ一定であった。図9と図10を見ると、 ω を小さくすると一定値に漸近し、 ω を大きくすると振幅0の定常状態に漸近し

ていくことがわかる. ω を小さくした時の漸近値は, 3.1.1 と同様に, $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 0.9$ と $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 1.1$ における $\eta = 0.0$ の定常解を求めた時の差に, 収束することがわかる. また, ω を大きくすると, 無振動状態に近づくが, この時の解は $\eta = 0.0$ の定常解と一致することが確認できた.

また, 図 9 より $(r, z) = (0.2, 0.2)$ で, $\omega_{\max} = 700$ であることがわかる. しかし, 図 10 より $(r, z) = (0.5, 0.5)$ では, $\omega_{\max} = 100$ となることがわかる. しかし, 温度に関しては, 図 9, 図 10 ともに, $\omega_{\max}$ を持たないことがわかる. 計算領域内の他の全ての点について, 同じように調べたところ, $\omega_{\max}$ は場所によって, 更に ζ か ψ によって異なる値を取ることがわかった (図 11, 図 12 参照). 渦度, 流れ関数とも $\omega_{\max}$ が存在した. 加熱部からその上部にわたって, $\omega_{\max}$ は高く, 右側面から右下部にかけて, $\omega_{\max}$ は低くなっていることがわかる.

計算領域の鉛直方向に温度が正の勾配を持つ安定成層部分において, Brunt-Vaisala 周波数 ω_{BV} を用いて計算した結果を図 13 に示す. 図 13 と図 11, 12 の安定成層部分を比較すると, オーダ的に近い部分もあるが, ω_{BV} の方が $\omega_{\max}$ より小さくなりがちであり, また, 分布の形も異なっている.

Fig. 7 Amplitude of mean Nusselt number on cold parts against ω for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $\omega = 200$.

Fig. 9 Amplitudes of ζ , T and ψ against ω for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $\eta = 0.1$, $(r, z) = (0.2, 0.2)$.

Dotted line indicates difference between the value for $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 0.9$ and that for $Ra = 2.8 \times 10^5 \times 1.1$, at $\eta = 0.0$.

Fig. 8 A sequence of stream lines in one period τ for $Ra = 2.8 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $\eta = 0.1$, $\omega = 200$.

Fig. 10 Amplitudes of ζ , T and ψ against ω for $Ra=2.8 \times 10^5$, $Pr=0.7$, $\eta=0.1$, $(r, z)=(0.5, 0.5)$.

Dotted line indicates difference between the value for $Ra=2.8 \times 10^5 \times 0.9$ and that for $Ra=2.8 \times 10^5 \times 1.1$, at $\eta=0.0$.

Fig. 11 Contours of resonance frequency $\omega_{\max}(\zeta)$ of vorticity for $Ra=2.8 \times 10^5$, $Pr=0.7$, $\eta=0.1$.

Fig. 13 Contours of Brunt-Vaisala frequency ω_{BV} in stably stratified region.

Fig. 12 Contours of resonance frequency $\omega_{\max}(\psi)$ of stream function for $Ra=2.8 \times 10^5$, $Pr=0.7$, $\eta=0.1$.

3.2 重力加速度振幅効果 η に関する $(\bar{K})_{\text{amp}}$ と $(\bar{T})_{\text{amp}}$ の変化を図14に示す. 図14を見ると, $\eta=1.0$ までは, $(\bar{K})_{\text{amp}}$, $(\bar{T})_{\text{amp}}$ はともに, η につれて, 線形的に増加していることがわかる. しかし, η が1.0より大きくなると, この線形性が失われる. これは, $\eta>1$ になると, 重力が鉛直方向上向きにかかる時間が生じ始めることによると, 考えられる.

図15と図16には, それぞれ, $\eta=1.0$, 2.0 での $t=0.0$ における流線, 等温度線図, 等渦度線図を示す. 2組の図の比較から, η が1より大きくなると, 流れ場などが大きく異なってくることをわかる.

Fig. 14 Amplitudes of $\bar{K}$ and $\bar{T}$ against η for $Ra=2.8 \times 10^5, Pr=0.7, \omega=200$.

Fig. 16 Stream lines, isothermal lines and vorticity contour lines for $Ra=2.8 \times 10^5, Pr=0.7, \eta=2.0, \omega=200$.

Fig. 15 Stream lines, isothermal lines and vorticity contour lines for $Ra=2.8 \times 10^5, Pr=0.7, \eta=1.0, \omega=200$.

4. 結言

重力振動場における円筒容器内の自然対流に関する数値解析を行った結果、以下のような結言を得た。

- (1) 平均運動エネルギー振幅 $(\bar{K})_{\text{amp}}$ は、 $\omega=200$ を持つ。また、 ω が小さい時、 π であった $(\bar{K})_{\text{amp}}$ と内部エネルギー振幅 $(\bar{T})_{\text{amp}}$ の位相差は、 ω が増加するにつれて、少しずつずれながら、最後には、 $\eta=0.0$ の定常解と一致する。
- (2) 無次元重力加速度振幅 $\eta=0.1$ では、流れ場は、 $\eta=0.0$ の時とほぼ同じであった。
- (3) 計算領域のすべての点で、局所的な最大角振動数 ω_{max} が存在し、その値は、位置、及び、考えている物理量に依存する。
- (4) $(\bar{K})_{\text{amp}}, (\bar{T})_{\text{amp}}$ は、 $\eta \leq 1.0$ の時は η に対して線形的に増加する。しかし、 $\eta > 1.0$ の時は線形的に増加しなくなる。

また、今後の課題としては、局所的な最大角振動数の説明、レイリー数 Ra 、プラントル数 Pr の影響の検討などが挙げられる。

謝 辞

同志社大学教授，矢野秀雄博士，水島二郎博士の助言と，同志社大学大学院生，佐々木知明氏の論文作成への援助に感謝する。

文 献

- (1) T. C. Jue & B. Ramaswamy : Numerical study of unstable natural convection in rectangular cavities, *HTD-Vol.198, Natural Convection in Enclosures*, ASME (1992), 29-38.
- (2) 坂田光雄:側面部分加熱による鉛直円筒キャビティ内自然対流の数値解析, *ながれ*, 13 (1989) 131-142.
- (3) M.Sakata : Numerical study of natural convection in a cylindrical cavity bounded by a partially-heated vertical wall, *Fluid Dynamics Research*, 18 (1996), 223-235.
- (4) K.E.Torrance & J.A.Rockett : Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below-creeping flow to the onset of laminar instability, *J. Fluid Mech.*, 36 (1969), 33-54.
- (5) K.E.Torrance, L.Orloff & J.A.Rockett : Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below, *J. Fluid Mech.*, 36 (1969), 21-31.
- (6) K.E.Torrance : Comparison of finite-difference computations of natural convection, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 72B (1968), 281-301.
- (7) P.M.Gresho & R.L.Sani : The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer, *J.Fluid Mech.*, 40-4 (1970), 783-806.
- (8) S.Biringen & L.J.Peltier : Numerical simulation of 3-D Benard convection with gravitational modulation, *Physics of Fluids A*, 2-5 (1990), 754-764.
- (9) S.Biringen & G.Danabasoglu : Computation of convective flow with gravity modulation in rectangular cavities, *J.Thermophysics*, 4 (1990), 357-365.
- (10) Y.Kamotani, A.Prasad & S.Ostrach : Thermal convection in an enclosure due to vibrations aboard spacecraft, *AIAA Journal*, 19-4(1981), 63-84.
- (11) D. J. Tritton : *Physical Fluid Dynamics* (2nd ed.), Oxford University Press (1988), 208-209.