非構造格子上における非定常非圧縮流れの計算*

加藤 琢真^{*1}, 村山 光宏^{*2}
伊藤 靖^{*2}, 中橋 和博^{*1}

Computation for Unsteady Incompressible Flow on Unstructured Grid

Takuma KATO^{*3}, Mitsuhiro MURAYAMA,
Yasushi ITO and Kazuhiro NAKAHASHI^{*3} Tohoku University, Dept. of Aeronautics and Space Engineering,
Aramaki-Aoba 01, Aoba-ku Sendai, Miyagi, 980-8579 Japan

The artificial compressibility algorithm for incompressible flows is applied to an unstructured grid method. It is based on a finite volume cell-vertex upwind technique and uses a time-marching procedure to efficiently solve the continuity equation as well as the momentum equations. The Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel (LU-SGS) approximate factorization scheme is implemented with the Navier-Stokes solver on arbitrary three-dimensional unstructured grid. Numerical simulation is performed for steady and unsteady incompressible flow problems, 2-D wake of cylinder, 3-D stenosed tube and branched tube.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Volume Method, Viscous Flow, Unstructured Grid Method, Artificial Compressibility Method, Incompressible Flow

1. 緒 言

近年, CFDが工業的, 科学的に広く応用されるにつれて, より複雑な形状まわりの流れを取り扱うことが多くなった. このため, 現在の計算方法は, 様々な複雑形状における, 速度範囲の広い流れに対応することが要求されてきている.

従来の圧縮性流れに対するアルゴリズムは時間発展的であり非常に効率的である. しかし, 低速流れに対して適用されると硬直性が現れるという欠点があった. これは, 音速と流れの速度に対する対流時間スケールの大きな違いのためである. そのため, 低速の非圧縮性流れにはふつう, 圧力場に対する独立した方程式, すなわち Poisson 方程式を解く方法が用いられてきた.

Chorin⁽¹⁾ は, 圧力に対しても時間発展的な方程式を用い, 低速の非圧縮流れに対しても効率的に流れを解くことができる擬似圧縮性法を提案した. 現在この擬似圧縮性法によって, 多くの有用な研究が行われてい

る⁽²⁾⁽³⁾.

非構造格子法は, 有限体積法に基づき, 格子セルの形状に任意性を許した計算方法であり, 3次元複雑形状に対しても格子生成が容易である. また, 流れ場を解くことによる局所格子適合も非構造格子法の大きな利点である. 最近, この格子形成の柔軟性と解適合格子細分化の容易さから, 非構造格子が複雑形状周りの流れを計算するのに用いられ, 一般的になりつつあるが, メモリ量の増大により一般的な陰的時間積分法が困難であるため, 計算時間がかかるという欠点があった.

最近, LU-SGS 陰的時間積分の任意の非構造格子法への拡張とハイブリッド格子の適用⁽⁴⁾により, Navier-Stokes 方程式の計算が可能になってきている. その結果, 非構造格子法はCPU時間で構造格子法と並ぶほどになってきている^{(5)~(7)}. しかしながら, 非構造格子上での擬似圧縮性を用いた計算の実際への適用例は数少なく, その有効性および精度検証が不十分である.

本研究では, 擬似圧縮性法と任意の3次元非構造格子上でのLU-SGS陰的時間積分法を組み合わせ, 擬似圧縮性を用いた非圧縮流れ解析の精度および効率を検証することを目的としている. 検証例としては2次元円柱後流, 3次元狭窄管内流れおよび3次元分岐管内流れを取り上げて計算を行った.

* 原稿受付 1999年6月21日.

^{*1} 正員, 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 01).^{*2} 東北大学大学院.

E-mail: katoh@ad.mech.tohoku.ac.jp

2. 支配方程式

支配方程式は、擬似圧縮性法を導入した3次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式で、検査体積 Ω および検査体積境界面 $\partial\Omega$ に対して積分形表示により次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{\partial\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \dots \quad (2)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \beta\theta \\ \theta u + pn_x \\ \theta v + pn_y \\ \theta w + pn_z \end{Bmatrix}, \quad (\theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad (3)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ \tau_{yx}n_x + \tau_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \tau_{zz}n_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$\mathbf{Q}$ は変数ベクトル、 $\mathbf{F}$ は非粘性流束ベクトル、 $\mathbf{G}$ は粘性流束ベクトルであり、 $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ 、 $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ および p はそれぞれ速度ベクトル、 x, y, z 方向の単位法線ベクトルおよび圧力である。また、 β は人工的な圧縮性のパラメータ、 Re はレイノルズ数である。

3. 計算方法

支配方程式はセル節点有限体積法によって離散化され、非構造格子上で解かれる。検査体積は非重合二重格子と呼ばれるものであり、辺に基づくデータ構造である。そのため、任意の格子セル形状に容易に対応できる。

3・1 対流項の計算 流束の計算は検査体積の表面に沿った点を用いて各検査体積について行われる。各変数はセル表面では連続でないため、流束は Riemann 問題の近似解法⁽⁶⁾を用いて計算される。ここでは流束差分法⁽⁹⁾が用いられている。スキームの精度を高めるために、Riemann 問題は、検査体積表面で再構築された基礎物理変数 $\mathbf{Q}$ の値に対して解かれる。また、スキームを単調にするために、Venkatakrishnan の制限関数⁽¹⁰⁾が用いられる。

3・2 粘性項の計算 粘性応力項を計算するため、各検査体積表面での基礎物理変数 $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ の空間一階微分を計算する必要がある。セル節点法では、節点での勾配を単純に評価し、それを用いて辺の中点での平均値を求めることにより評価できる。しかしながら、文献⁽¹¹⁾において指摘されているように、この評価法を用いると数値的な振動が発生することがある。これを抑制するため、空間微分は各辺上で直接計算する。 $\mathbf{Q}$ の勾配は、すべての格子セルに対して勾配を計算し、それを体積平均して辺上の勾配とする。この方法では、辺のデータとともに要素のデータも必要となるため全体の計算容量は増大するが、数値的な振動は抑制される。

3・3 支配方程式の離散化 各検査体積において、式(1)を次のように代数方程式で記述する。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \left[\sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{h}_{ij} + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{G}_{ij} \right] \quad (5)$$

$\sum_{j \in i}$ は i 点と対をなす全ての点について和をとることを意味し、 $\mathbf{h}$ は検査体積境界面の面に垂直な非粘性流束を表す。非粘性流束 $\mathbf{h}$ は Roe の数値流束関数⁽¹²⁾を用いると以下のように書くことができる。

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^+, \mathbf{n}) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}^-, \mathbf{n})] - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^-) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{Q}^+$ 、 $\mathbf{Q}^-$ はその辺について検査体積境界面の両側における保存変数ベクトルの値である。また、 $\mathbf{A}$ は流束のヤコビ行列であり、

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & \beta n_x & \beta n_y & \beta n_z \\ n_x & \theta + un_x & un_y & un_z \\ n_y & vn_x & \theta + vn_y & vn_z \\ n_z & wn_x & wn_y & \theta + wn_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R} |\mathbf{A}| \mathbf{L} \quad (8)$$

$|\mathbf{A}|$ は流束行列 $\mathbf{A}$ の固有値を要素に持つ対角行列であり、 $\mathbf{R}$ および $\mathbf{L}$ は行列 $\mathbf{A}$ の右固有行列および左固有行列である。また、各固有値は以下のように与えられる。

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \{\theta - S, \theta + S, \theta, \theta\}$$

$$(S = \sqrt{\theta^2 + \beta})$$

4. 時間積分

高レイノルズ数流れの計算では、壁面近傍の細かい格子に起因する厳しい安定条件のために、時間積分には陰解法を適用するのが有利である。ここでは、非構造

格子法のために拡張されたLU-SGS (Lower-Upper Symmetrical Gauss-Seidel) 陰的時間積分法を適用する。

$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$ として陰的時間積分を適用すると、式(5)は次のようになる。

$$\Delta \mathbf{Q}_i = -\frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{h}_{ij}^{n+1} + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{G}_{ij}^{n+1} \dots (9)$$

いま、流束ベクトル $\mathbf{h}$ に対して線形化および風上化の操作を行うと、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{n+1} &= \mathbf{h}^n + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{h}^n + \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{h}^n + (\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-) \Delta \mathbf{Q} \dots (10) \end{aligned}$$

$\mathbf{A}^+$ は正の固有値からなる行列、 $\mathbf{A}^-$ は負の固有値からなる行列である。これを用い、かつ、風上差分と同様な取り扱いをすると、節点 $i-j$ 間に関しての $n+1$ 時刻での流束ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{h}_{ij}^{n+1} = \mathbf{h}_{ij}^n + \mathbf{A}_i^+ \Delta \mathbf{Q}_i + \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j \dots (11)$$

これを式(9)に代入して整理すると次のようになる。

$$\left(\frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_i^+ \right) \Delta \mathbf{Q}_i + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j = \mathbf{R}_i \quad (12)$$

ここで $\mathbf{I}$ は単位行列であり、また、

$$\mathbf{R}_i = -\sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{h}_{ij}^n + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{G}_{ij}^n \dots (13)$$

非構造格子上でLU-SGS法を適用するために、式(12)の左辺第2項において、節点 i と対をなす全ての点 $j \in i$ を $j \in L(i)$ と $j \in U(i)$ の2つのグループに分ける。すると式(12)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_i^+ \right) \Delta \mathbf{Q}_i + \sum_{j \in L(i)} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j \\ + \sum_{j \in U(i)} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j = \mathbf{R}_i \dots (14) \end{aligned}$$

これは、以下の2ステップで解くことができる。

第1スイープ：

$$\Delta \mathbf{Q}_i^* = \mathbf{D}^{-1} \left[\mathbf{R}_i - \sum_{j \in L(i)} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j^* \right] \dots (15)$$

第2スイープ：

$$\Delta \mathbf{Q}_i = \Delta \mathbf{Q}_i^* - \mathbf{D}^{-1} \sum_{j \in U(i)} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j \dots (16)$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \left(\frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_i^+ \right) \dots (17)$$

式(17)の行列 $\mathbf{D}$ の計算には、Jameson と Turkel⁽¹³⁾ によって提案されたヤコビ行列の分割法を用いる。

$$\mathbf{A}^\pm = 0.5(\mathbf{A} \pm \rho_A \mathbf{I}) \dots (18)$$

$\rho_A = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| + \sqrt{\beta}$ は、アルゴリズムを線形化して計算を安定にするために用いられる、ヤコビ行列 $\mathbf{A}$ のスペクトル半径である。また、粘性を考慮して ρ_A の代わりに、

$$\rho_A^* = \rho_A + 2 \frac{\mu}{Re \cdot \rho \cdot h} \dots (19)$$

を用いる。ここで、 μ は分子粘性係数、 h は節点 i と j の間の距離である。また、ヤコビ行列の性質から次のことがいえる。

$$\sum_{i \in j} \Delta S_{ij} \mathbf{A} = 0 \dots (20)$$

これらにより、式(17)は次のように対角化される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \left(\frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} (\mathbf{A} + \rho_A^* \mathbf{I}) \right) \\ &= \left(\frac{V_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{j \in i} \rho_A^* \right) \mathbf{I} \dots (21) \end{aligned}$$

同様に、式(12)内の項を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} \mathbf{A}_j^- \Delta \mathbf{Q}_j &= \frac{1}{2} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} (\mathbf{A} - \rho_A^* \mathbf{I}) \Delta \mathbf{Q}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in i} \Delta S_{ij} (\Delta \mathbf{h}_j - \rho_A^* \Delta \mathbf{Q}_j) \cdot (22) \end{aligned}$$

ここでは、数値流束の増分 $\Delta \mathbf{h}$ を以下のように計算し、ヤコビ行列の演算を除いている。

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{Q} \approx \Delta \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) - \mathbf{h}(\mathbf{Q}) \dots (23)$$

以上の単純化により、最終的に非構造格子でのLU-SGS法の式は次のようになる。

前進スイープ：

$$\Delta \mathbf{Q}_i^* = \mathbf{D}^{-1} \left[\mathbf{R}_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in L(i)} \Delta S_{ij} (\Delta \mathbf{h}_j^* - \rho_A^* \Delta \mathbf{Q}_j^*) \right] \quad (24)$$

後退スイープ：

$$\Delta \mathbf{Q}_i = \Delta \mathbf{Q}_i^* - \mathbf{D}^{-1} \frac{1}{2} \sum_{j \in U(i)} \Delta S_{ij} (\Delta \mathbf{h}_j - \rho_A^* \Delta \mathbf{Q}_j) \cdot (25)$$

LU-SGS 陰解法による計算では、時間精度は維持されない。そこで非定常計算を行う場合、Crank-Nicolson法を用いたNewton反復法を使用し内部反復をすることにより、線形化や近似因子化による誤差を減らし時間精度を維持する。式(24)、(25)はNewton反復法を組み込むことによって次式のように表され、各時間ステップ毎に収束解を求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_i^{*(m)} &= \mathbf{D}^{-1} \left[R H S_i^{(m)} - \frac{1}{2} \theta \sum_{j \in L(i)} \Delta S_{ij} (\Delta \mathbf{h}_j^{*(m)} - \rho_A^* \Delta \mathbf{Q}_j^{*(m)}) \right] \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_i^{(m)} &= \Delta \mathbf{Q}_i^{*(m)} - \mathbf{D}^{-1} \left[\frac{1}{2} \theta \sum_{j \in U(i)} \Delta S_{ij} (\Delta \mathbf{h}_j^{(m)} - \rho_A^* \Delta \mathbf{Q}_j^{(m)}) \right] \dots (27) \end{aligned}$$

ここで,

$$\Delta Q^{(m)} = Q^{(m+1)} - Q^{(m)} \dots\dots\dots (28)$$

$$RHS^{(m)} = -(Q^{(m)} - Q^n) - \Delta t \cdot L^*(\theta Q^{(m)} + (1-\theta)Q^n) \quad (29)$$

$\theta = 1/2$ のとき Crank-Nicolson 法となり, 時間精度は2次精度になる. ここで L^* は, 支配方程式をベクトル型で表示した式,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + L(Q) \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

における L の差分演算子を意味し, m は Newton 反復の回数を表している. ここで, 式(26) ~ (29)において $m = 0$ のとき $Q^{(m)} = Q^n$, $m \rightarrow \infty$ のとき $\Delta Q^{(m)} \rightarrow 0$ より $Q^{(m)} = Q^{n+1}$ となる. この計算方法では, 各時間ステップ毎に3 ~ 5 回の Newton 反復で十分に収束する.

5. 計算結果

擬似圧縮性法による非圧縮粘性流れの計算法の検証を行うために, 計算例として2次元円柱後流と3次元狭管管内流れ, 分岐管流れの計算を取り上げる.

5・1 2次元円柱後流 上記アルゴリズムに基づくソルバーは3次元非構造格子に対して書かれているため, 2次元計算は1層のプリズムから成る3次元プリズム格子を用いて行った. 円柱近傍の計算格子の拡大図を図1に示す. 格子点数は72720点, 円柱直径に基づくレイノルズ数は $Re = 226$ である. 境界条件は, 流入境界においては圧力 $p = 0$, 速度を一樣流速とし, 流出境界においては, 各変数の一階微分が0となるようにする. また, 壁面境界では滑りなし条件とする. 初期条件として全ての点で速度0が与えられている.

本計算によって得られた円柱後流における渦度分布の時間変化を図2に示す. 周期的なカルマン渦列が放出されていることがわかる. このときの渦放出周波数のストローハル数 St を, 管内らの有限差分法による結果⁽¹¹⁾ および実験結果と比較したものを表1に示す. 本計算の結果と管内らの計算結果はよく一致していることがわかる. 計算結果が実験値よりも大きいのは, 実験結果には3次元性が現れているためであると考えられる.

Table 1. Comparison of Strouhal number

	Experiments	DNS (Miyachi <i>et al.</i>)	Present Computation
St	0.184 ~ 0.196	0.205	0.213

Fig. 1. Unstructured grid around cylinder

(a) $t = 1/4T$

(b) $t = 1/2T$

(c) $t = 3/4T$

(d) $t = T$

Fig. 2. Iso-vorticity contours around cylinder

5・2 狭窄管内流れ 3次元問題の例として、狭窄管内流れの計算を行った。この問題は、血管内の動脈瘤部分における血液の流れの解析問題として研究されている⁽¹²⁾。計算モデルの概略および狭窄部の計算格子を図3に示す。管直径を基にしたレイノルズ数は $Re = 1000$ 、格子点数は134522点である。流入条件は一様流入、壁面は滑りなし条件とする。

図4に、狭窄部近傍における平均流の流線を示す。狭窄部後方に大規模なはく離泡が発生している様子が分かる。また、狭窄部前方にも再循環領域が発生している。このはく離の様子を山内の可視化実験および計算結果⁽¹²⁾と比較したものを図5に示す。ここで、図5(a)は本計算によって得られた流れ方向の等速度線図であり、黒い部分がはく離領域を示している。図5(b)は、山内らによる可視化実験結果である。再付着点に注目すると、その位置Cは狭窄部後縁から管直径の1.5倍離れた位置になっている。これは山内の結果とも一致する。

Fig. 3. Outline and computational grid of stenosed tube

Fig. 4. Streamlines of separation bubble in stenosed tube

次に、流れの非定常性について山内の結果との比較を行う。図5(c)は山内の計算結果（流跡線図）であり、図5(d)は、本計算によって得られたある瞬間の全体の渦度場から平均流の渦度場を差し引いた渦度変動分布を示している。Bに相当する位置に、はく離泡に伴うと思われる、時間的に変動する渦度変動が現れている。また、再付着点直後のDの位置にも周囲よりも変動が強い領域が存在している。これは山内の結果と定性的に一致している。以上より、本計算は流れの定性的な特徴をよくとらえているといえる。

Fig. 5. Comparison of reattachment point and fluctuations

(a) outline

(b) computational grid

Fig. 6. Outline and computational grid of branched tube

5・3 分岐管内流れ 次に、3次元分岐管流れの計算を行った。この問題は、血管が分岐する部分において血管内壁が損傷しやすいという現象を解明するために研究されている問題である⁽¹³⁾。計算モデルの概略および分岐部の計算格子を図6に示す。主管直径は $\phi = 1$ 、枝管直径は $\phi = 0.5$ 、主管と枝管の流量比は4:1とする。分岐角度は45度とし、分岐部には $R = 0.05 \sim 2.0$ の丸みがつけられている。流入条件は一樣流入、壁面は滑りなし条件とする。格子点数は179080点、主管直径を基にしたレイノルズ数は $Re = 800$ である。

図7に、本計算の速度分布を山口らの実験値⁽¹³⁾と比較したものを示す。両者を比較すると、管路中央部ではほぼ一致しているが、壁面近傍での速度分布にずれが見られる。これは、本計算に用いた計算格子が壁面近傍で十分に細かくなかったためであると思われる。

図8は分岐部における流線を示したものである。管路中央部の流れは、分岐部において一部が枝管に入流している。しかし、これとは別に、管路外側の流れもその一部が大きく流れの方向を曲げられ枝管へ流入している様子が分かる。これは実験で観測されている様子と定性的に一致している。

(a) Profiles at section P1

(b) Profiles at section P2

Fig. 7. Velocity profiles in branched tube
(— present computation, -o- Yamaguchi et al.)

Fig. 8. Streamlines in branched tube

6. 結 言

圧縮性流れに対する非構造格子ソルバーを、擬似圧縮性法を用いて非圧縮流れに拡張した。また、LU-SGS 陰解法を Newton 反復法により非定常計算に拡張し、円柱後流、狭窄管内流れ、分岐管内流れなどに対して計算を行った。本研究の計算結果は、従来の計算方法による結果および実験とよい一致を見た。よって、本計算のアルゴリズムは、LU-SGS 陰解法および Newton 反復法により、複雑形状まわりの定常、非定常流れに対して有効なアルゴリズムであることがわかった。今後は、並列化による計算時間の短縮、物理モデルの導入による広範囲の流れへの拡張を行う。

文 献

- (1) Chorin, A. J., *J. Computational Physics*, **2**, (1967), 12.
- (2) Yoon, S. and Kwak, D., *AIAA J.*, **29**, (1991), 874.
- (3) Rogers, S. E., Kwak, D. and Kiris, C., *AIAA J.*, **29**, (1991), 603.
- (4) Sharov, D. and Nakahashi, K., *AIAA J.*, **36**, (1998), 157.
- (5) Soetrisno, M., Imlay, S. T., Roberts, D. W. and Tafin, D. E., *AIAA 96-0167*, (1996).
- (6) Men'shov, I. and Nakamura, Y., *6th Int. Symp. on CFD, Collection of Tech. Papers*, **2**, (1995), 815.
- (7) Sharov, D. and Nakahashi, K., *AIAA J.*, **36**, (1998), 484.
- (8) Obayashi, S. and Guruswamy, G. P., *AIAA 94-2268*, (1994).
- (9) Steger, J. L. and Warming, R. F., *J. Comp. Phys.*, (1981), 263.
- (10) Venkatakrishnan, V., *AIAA 93-0880*, (1993).
- (11) Holmes, D. G. and Connell, S. D., *AIAA 89-1932-CP*, (1989), 25.
- (12) Roe, P. L., *J. Comp. Phys.*, (1981), 357.
- (13) Jameson, A. and Turkel, E., *Math. of Comp.*, **37**, (1981), 385.
- (14) 宮内, 平田, 店橋: 日本機械学会論文集B編, 63巻607号 (1997), 757.
- (15) 山内: 日本機械学会論文集B編, 60巻579号 (1994), 3630.
- (16) 山口, 向当: 日本機械学会論文集B編, 61巻582号 (1995), 579.