一様せん断流中の直線渦管まわりの渦度伸長とエネルギー散逸*

河 原 源 太^{*1}, 木 山 公 志^{*2}, 八 木 仁^{*3}

Vorticity Stretching and Energy Dissipation around a Straight Vortex Tube in a Uniform Shear Flow

Genta KAWAHARA^{*4}, Hiroshi KIYAMA and Hitoshi YAGI^{**}Ehime University, Dept. of Mechanical Engineering,
Bunkyo-cho 3, Matsuyama-shi, Ehime, 790-8577 Japan

The interaction of a straight diffusing vortex tube with a background uniform shear flow is investigated analytically. The vortex tube is aligned with the longitudinal uniform shear flow $\beta y e_z$ and simultaneously the tube undergoes the transverse weak shear $\alpha y e_x$. In the limit of $|\alpha|/\beta \ll 1$, the asymptotic solution to the Navier-Stokes equation is obtained to examine energy dissipation as well as axial and cross-flow vorticity components around the vortex tube. Vortex lines of the longitudinal shear are wrapped and stretched by the tube to intensify the azimuthal vorticity. This vorticity stretching and intensification are found to be enhanced (or reduced) when the vorticity of the transverse shear is anti-parallel (or parallel) to that of the tube, which leads to the enhancement (or reduction) of the total energy dissipation around the vortex tube. It is shown that at initial time of evolution $\beta t < 0.623(\Gamma/2\pi\nu)^{1/3}$ the energy dissipation associated with the tube itself is dominant, while at later time $\beta t > 0.623(\Gamma/2\pi\nu)^{1/3}$ the dissipation of the wrapped vortex layers dominates that of the tube, where Γ is the circulation of the tube and ν the kinematic viscosity.

Key Words: Vortex, Shear Flow, Viscous Flow, Fluid Dynamics, Swirling Flow, Vorticity Stretching, Energy Dissipation, Streamwise Vortex, Asymptotic Analysis

1. 緒 言

近年の乱流構造に関する数多くの研究により、乱流中には高い渦度の集中した管状の渦構造が多数存在することが明らかにされてきた⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。最近、この管状渦構造は、一様等方乱流、混合層乱流、壁面乱流、MHD乱流、そして回転乱流などのさまざまな乱流中に普遍的に存在することが明らかにされている⁽⁶⁾。一様等方乱流ではエネルギーの多くが管状渦周辺で散逸されることが観測されており⁽⁷⁾、また壁面乱流では縦渦と呼ばれる流れ方向を向いた管状渦が乱流エネルギー⁽⁸⁾や壁面摩擦応力⁽⁹⁾の生成に重大な寄与をなすことが知られている。このように、管状の渦構造は、乱流中のエネルギーの散逸や生成、また熱、物質および運動量の輸送現象などにおいて中心的な役割を果たすものと期待されている。

乱流中の管状渦の動力学を考えるうえでの最も重要な要素の一つに、渦管とその周囲の流れ場との相互作用がある。少なくとも概念的には、渦周囲の流れは管

状渦を变形させ、一方渦管は周囲の渦線をそれ自身に巻き付けるものと予想されるが、これらの素過程の解析的な記述と理解は十分には進んでいない。Moffattら⁽¹⁰⁾は渦管周囲の渦なし非軸対称ひずみ流による伸長渦管の变形とエネルギー散逸を高レイノルズ数($\Gamma/\nu \gg 1$, Γ は渦の循環, ν は運動粘性係数)の漸近理論で記述した。Jiménezら⁽¹¹⁾はMoffattら⁽¹⁰⁾の理論を非定常拡散渦に対して拡張し、この拡散渦によって二次元減衰乱流中の渦構造の特性を説明できることを示した。また、渦管と渦ありの周囲流との相互作用については、Moore⁽¹²⁾が一様せん断流中の流れに平行な拡散渦の時間発展を高レイノルズ数極限の漸近理論により調べ、渦管による一様せん断流の渦度の巻き込み強化と渦近傍領域での渦度の消滅を明らかにしている。Kawaharaら⁽¹³⁾は、Moore⁽¹²⁾の理論を拡張して、任意の方向を向いた渦管と一様せん断流との時間発展初期での相互作用を高レイノルズにおける漸近理論により調べ、渦管による渦度の巻き込み、変向および伸長過程を明らかにした。しかし、以上のいずれの理論も高レイノルズ数極限に対するものであるため、有限レイノルズ数における渦管と周囲流の相互作用、特にそのレイノルズ数依存性を明らかにするには従来とは異なる理論が必要になる。河原ら⁽¹⁴⁾は、この動機付け

* 原稿受付 1999年6月22日。

^{*1} 正員, 愛媛大学工学部 (〒790-8577 松山市文京町3)。^{*2} 正員, 愛媛大学大学院 (現: (株)東レ)。^{*3} 准員, 愛媛大学大学院 (現: (株)シャープ)。

E-mail: kawahara@dpc.ehime-u.ac.jp

から、有限レイノルズ数における伸長渦と非軸対称渦なしひずみ流との相互作用を弱非軸対称極限での漸近理論によって明らかにしている。

本報では、河原ら⁽¹⁴⁾の渦なし周囲流に対する理論を渦ありの周囲流中の渦管に拡張し、有限レイノルズ数での渦管とその周囲のせん断流の相互作用およびそのレイノルズ数依存性について論ずる。ここでは、特に、一様せん断流に平行に置かれた直線渦管に、その横断方向に弱いせん断が加えられた場合の影響を渦度の伸長とエネルギー散逸の観点から調べる。本報で議論する流れは、実在する流れに比べて著しく単純化されているが、せん断乱流中の有限レイノルズ数の縦渦とその周囲の渦度場の相互作用との接点を持ち、せん断乱流における渦力学を理解するうえで有用な理論的知見をもたらすものと期待される。

2. 定式化

本研究では、図1に示す、一様せん断流

$$\mathbf{U}(y) = \beta y \mathbf{e}_z + \alpha y \mathbf{e}_x \quad (1)$$

に重ね合わせられた渦管を考える。ここに、 $\mathbf{U}$ はせん断流の速度、 $\mathbf{e}_z$ は渦軸方向の単位ベクトル、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は渦軸垂直方向の互いに垂直な単位ベクトルであり、 x, y, z はそれぞれ、渦の中心軸上に原点をもつ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 方向の座標である。渦管の渦度は $+\mathbf{e}_z$ 方向を向いているものとする。 x 方向と z 方向のせん断率 α と β (>0)の比を

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2)$$

と置く。 $\lambda=0$ ($\alpha=0$)の場合には、一様せん断流 $\mathbf{U}$ と渦管とは平行になり、渦管はその横断方向のせん断を受けない。 $\lambda \neq 0$ の場合には、一様せん断流と渦管の方向に (x, z) 面でのがれが生じる。Bernardら⁽⁸⁾は

Fig. 1 Flow configuration

壁面せん断乱流中の縦渦においてこれと同種のせん断流と縦渦との方向のずれを報告している。 $\lambda < 0$ ($\alpha < 0$)なる場合には、せん断流の渦度の z 成分 $-\alpha$ が渦管のそれと同符号になるので、以後この場合をサイクロン(cyclone)と呼ぶ。一方、 $\lambda > 0$ ($\alpha > 0$)なる場合には、せん断流の渦度の z 成分が渦管のそれと反対符号になるので、この場合をアンチサイクロン(anti-cyclone)と呼ぶ。3章の漸近解析では渦管横断方向のせん断が弱い場合 $|\lambda| \ll 1$ を考える。

以下では、流れが z 方向に一様であると仮定し、速度場および渦度場を

$$\mathbf{v} = [u(x, y, t) + \alpha y] \mathbf{e}_x + v(x, y, t) \mathbf{e}_y + w(x, y, t) \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x(x, y, t) \mathbf{e}_x + \omega_y(x, y, t) \mathbf{e}_y + [\omega_z(x, y, t) - \alpha] \mathbf{e}_z \quad (4)$$

のように表現する。渦管垂直方向速度成分に現れる u および v は渦管からの速度場への寄与を表し、 $\omega_z = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ はその渦度場への寄与を表す。 u, v, ω_z は流れ関数 $\phi(x, y, t)$ を用いて

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \omega_z = -\nabla^2 \phi \quad (5)$$

のように表される。式(3), (4)の各成分に現れるその他の部分はせん断流からの寄与を表し、渦度の x, y 成分は $w(x, y, t)$ を用いて

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

で与えられる。流れが z に依存しないことから、渦度方程式およびNavier-Stokes方程式の z 成分はそれぞれ

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \frac{\partial(\phi, \omega_z)}{\partial(x, y)} + \alpha y \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \nu \nabla^2 \omega_z, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial(\phi, w)}{\partial(x, y)} + \alpha y \frac{\partial w}{\partial x} = \nu \nabla^2 w \quad (8)$$

のように表され、 ϕ と w に対して閉じた方程式系を構成する。式(7), (8)から ϕ と w が求められると、渦管の寄与 u, v, ω_z は式(5)から、せん断流の寄与 ω_x, ω_y は式(6)から直ちに得られる。

本研究では、初期時刻 $t=0$ において式(1)の一様せん断流中の z 軸上に循環 Γ の渦糸を置く。このとき、式(7), (8)の初期条件は

$$\phi(x, y, 0) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad w(x, y, 0) = \beta y \quad (9)$$

で与えられる。ここに $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。 $t > 0$ では渦糸は粘性によって拡散して有限の太さをもつ。代表時間としてせん断流の時間スケール $1/\beta$ をとると、拡散渦の太さのスケールは $\sqrt{\nu/\beta}$ となるので、ここでは代表長さを $\sqrt{\nu/\beta}$ にとることとする。このとき、渦

管が誘導する速度スケールは $\Gamma/\sqrt{\nu\beta}$, せん断流の速度スケールは $\beta\sqrt{\nu/\beta}$ となるので, 以下では $t, (x, y)$, ϕ および w を

$$t^* = \beta t, (x^*, y^*) = (x, y)/\sqrt{\nu\beta}, \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi^* = \phi/\Gamma, w^* = w/\sqrt{\nu\beta}$$

のように無次元化する [したがって, $\omega_z^* = \omega_z/(\beta\Gamma/\nu)$]. 式(7), (8)を, 式(10)を用いて無次元化し, さらに平面極座標 (r^*, θ) [$(x^*, y^*) = (r^* \cos \theta, r^* \sin \theta)$] を用いて書き直し, * を省略すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \frac{\partial(\phi, \omega_z)}{\partial(r, \theta)} - \nabla^2 \omega_z \\ = -\lambda \frac{r}{2} \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \omega_z, \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \frac{\partial(\phi, w)}{\partial(r, \theta)} - \nabla^2 w \\ = -\lambda \frac{r}{2} \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

が得られる. ここに

$$Rr = \frac{\Gamma}{\nu} \dots\dots\dots (13)$$

は渦管のレイノルズ数である. 式(11), (12)の右辺は渦管横断方向のせん断の影響を表す.

3. 漸近解析

この章では $|\lambda| \ll 1$ における式(11), (12)に対して

$$\begin{aligned} \phi = \phi^{(0)}(r, \theta, t) + \lambda \phi^{(1)}(r, \theta, t) \\ + \lambda^2 \phi^{(2)}(r, \theta, t) + \dots, \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} w = w^{(0)}(r, \theta, t) + \lambda w^{(1)}(r, \theta, t) \\ + \lambda^2 w^{(2)}(r, \theta, t) + \dots \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

なる形の解を仮定する. このとき, 式(14), (15)の $\phi^{(n)}, w^{(n)} (n=0, 1, 2, \dots)$ に対応する λ^n オーダの渦度は

$$\begin{aligned} \omega_z^{(n)} = -\nabla^2 \phi^{(n)} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi^{(n)}, \\ \omega_x^{(n)} = \frac{\partial w^{(n)}}{\partial y} = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w^{(n)}, \\ \omega_y^{(n)} = -\frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} = -\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w^{(n)} \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

によって与えられる. 式(14)~(16)を式(11), (12)に代入し, λ^0 オーダの項を等置すると

$$\frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \frac{\partial(\phi^{(0)}, \omega_z^{(0)})}{\partial(r, \theta)} - \nabla^2 \omega_z^{(0)} = 0, \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \frac{\partial(\phi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)} - \nabla^2 w^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

が得られ, さらに λ^1 オーダの項を等置すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z^{(1)}}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \left[\frac{\partial(\phi^{(0)}, \omega_z^{(1)})}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial(\phi^{(1)}, \omega_z^{(0)})}{\partial(r, \theta)} \right] - \nabla^2 \omega_z^{(1)} \\ = -\frac{r}{2} \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \omega_z^{(0)}, \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} - \frac{Rr}{r} \left[\frac{\partial(\phi^{(0)}, w^{(1)})}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial(\phi^{(1)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)} \right] - \nabla^2 w^{(1)} \\ = -\frac{r}{2} \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w^{(0)} \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

が得られる. 式(17)~(20)の初期条件は式(9)から

$$\phi^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \ln r, w^{(0)} = r \sin \theta, \dots\dots\dots (21)$$

$$\phi^{(1)} = 0, w^{(1)} = 0$$

となる.

初期条件(21)に対する λ^0 オーダの式(17)の相似解は

$$\omega_z^{(0)} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\eta^2}, \phi^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1-e^{-\eta'^2}}{\eta'} d\eta' \dots\dots\dots (22)$$

で与えられ, Lamb-Oseen 渦(拡散渦)を表す⁽¹⁵⁾. ここに

$$\eta = \frac{r}{2\sqrt{t}} \dots\dots\dots (23)$$

は相似変数である. 次に, 式(18)の解として

$$w^{(0)} = r \operatorname{Re} [if(\eta)e^{-i\theta}] \dots\dots\dots (24)$$

なる変数分離形の相似解を仮定する. ここに, f は複素数値をとる η の関数である. 式(24)を式(18)に代入すると

$$f'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta} \right) f' + i \frac{Rr}{2\pi} \frac{1-e^{-\eta^2}}{\eta^2} f = 0 \dots\dots\dots (25)$$

が得られる. 以後プライムは η に関する微分を表すものとする. 式(25)の境界条件は, $\eta=0$ で rf が正則である. $\eta \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 1$ [式(21), (24)参照] となることであり, 式(25)は, Pearson-Abernathy⁽¹⁶⁾ および Moore⁽¹²⁾ が一様せん断流に平行な渦管(本研究では $\lambda=0$ の場合に相当する)の理論解析において得たものと同一である. 式(25)の $Rr \gg 1$ での漸近解については Moore⁽¹²⁾ および Kawahara ら⁽¹³⁾ を参照されたい.

初期条件(21)の下での λ^1 オーダの式(19)の相似解として

$$\phi^{(1)} = t \operatorname{Re} [g(\eta)e^{-2i\theta}] \dots\dots\dots (26)$$

なる形を仮定し, 式(22), (26), (16)を式(19)に代入すると

$$\begin{aligned} g^{(iv)} + 2 \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) g''' + \left(2 - \frac{9}{\eta^2} \right) g'' \\ - \frac{1}{\eta} \left(10 - \frac{9}{\eta^2} \right) g' + \frac{16}{\eta^2} g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{R_r}{2\pi} \left[\frac{2}{\eta^2} (1 - e^{-\eta^2}) \left(g'' + \frac{1}{\eta} g' - \frac{4}{\eta^2} g \right) + 8e^{-\eta^2} g \right] \\
& = \frac{4i}{\pi} \eta^2 e^{-\eta^2} \dots\dots\dots (27)
\end{aligned}$$

が得られる。ここに、 g は複素数値をとる η の関数である。式(27)の境界条件は、 $\eta=0$ で tg が正則であり、 $\eta \rightarrow \infty$ で $tg \rightarrow 0$ となることである。さらに、式(20)の相似解として

$$w^{(1)} = rt \operatorname{Re} [f_1(\eta)e^{-i\theta} + f_3(\eta)e^{-3i\theta}] \dots\dots\dots (28)$$

なる形を仮定し、式(22)、(26)、(28)を式(20)に代入すると

$$\begin{aligned}
& f_1'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta} \right) f_1' - 4f_1 + i \frac{R_r}{2\pi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} f_1 \\
& = -\frac{2}{\eta} \zeta(\eta), \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_3'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta} \right) f_3' - 4 \left(1 + \frac{2}{\eta^2} \right) f_3 \\
& + 3i \frac{R_r}{2\pi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} f_3 = -\frac{2}{\eta} \xi(\eta) \dots\dots\dots (30)
\end{aligned}$$

が得られる。ここに、 f_1, f_3 は複素数値をとる η の関数であり、非斉次項に現れる関数 ζ, ξ は

$$\begin{aligned}
& \zeta(\eta) = \frac{R_r}{2} \left(\bar{f}g/\eta + \bar{f}'g + \frac{1}{2}\bar{f}g' \right) \\
& - \frac{1}{2}\eta^2 \bar{f}' + 2i\eta \operatorname{Im}(f), \dots\dots\dots (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi(\eta) = -\frac{R_r}{2} \left(fg/\eta + f'g - \frac{1}{2}fg' \right) + \frac{1}{2}\eta^2 f' \\
& \dots\dots\dots (32)
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし $(\bar{})$ は複素共役を表す。式(29)、(30)の境界条件は、 $\eta=0$ で rtf_1, rtf_3 が正則であり、 $\eta \rightarrow \infty$ で $rtf_1 \rightarrow 0, rtf_3 \rightarrow 0$ となることである。

本研究では、常微分方程式(25)、(27)、(29)、(30)の数値解を四次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いたシューティング法⁽¹⁴⁾により求めた。

4. 渦度場の構造

これまでの乱流の直接数値シミュレーションでは、おもに $R_r/(2\pi) \approx 20$ 程度のレイノルズ数の管状渦構造が観測されている⁽⁵⁾。本研究では、この値を考慮して、レイノルズ数を $R_r/(2\pi) = 1 \sim 500$ の範囲で変化させ、渦度場の構造を調べた。その結果、 $R_r/(2\pi) \approx 1$ の低いレイノルズ数では後述する渦線の巻込みがほとんど認められず、一方、 $R_r/(2\pi) \approx 500$ の高いレイノルズ数では従来の高レイノルズ数極限での漸近理論による結果⁽¹²⁾⁽¹³⁾ とほぼ一致することが確認された。そこで、この章では有限レイノルズ数での代表的な渦度場として $R_r/(2\pi) = 10, 100$ における結果を示すことにする。

(a) $R_r/(2\pi) = 10$

(b) $R_r/(2\pi) = 100$

Fig. 2 Spatial distribution of axial vorticity

図2に渦軸方向(z 方向)渦度成分の渦断面での分布を示す。図2中の白黒濃淡分布は、 λ^1 オーダの渦度にレイノルズ数を乗じた $\omega_z^{(1)} R_r$ [式(16)、(26)参照] の空間分布を示し、等値線は、 λ^0 および λ^1 オーダからなる全渦度 $\omega_z = \omega_z^{(0)} + \lambda \omega_z^{(1)}$ [式(16)、(21)、(26)参照] の分布を示す。黒い等値線はサイクロン ($\lambda < 0$) を表し、白い等値線はアンチサイクロン ($\lambda > 0$) を表す。等値線の値は、 $\omega_z = (e^{-1}/2)/(4\pi), e^{-1}/(4\pi), 2e^{-1}/(4\pi)$ である。なお、ここでは $t=1, \lambda = \pm 0.5$ にとった。渦の旋回(正の渦度)の方向は反時計回りである。 $\omega_z^{(1)}$ は四重極状の分布⁽¹⁴⁾ をとり、この四重極による寄与によって全渦度 ω_z の等値線はだ円形にひずむ。四重極状の $\omega_z^{(1)}$ の分布は、レイノルズ数の増加にしたがって反時計回りに回転しており、これに伴い全渦度のだ円状分布の長軸も回転する。低レイノルズ数 [図2(a)] では渦自身による自己誘導回転が弱いため、だ円の長軸はおおむね、横断方向のせん断流の変形速度テンソルの主方向(サイクロンでは $\theta = 135, -45^\circ$ 、アンチサイクロンでは $\theta = 45, -135^\circ$) に向く。レイノルズ数が

(a) Cyclone ($\lambda = -0.5$) (b) Anti-cyclone ($\lambda = +0.5$)Fig. 3 Cross-flow vorticity component for $R_r/(2\pi)=10$

増加すると [図 2(b)], 自己誘導回転が強められるために長軸は反時計回りに回転し, サイクロンでは $\theta = 0, 180^\circ$, アンチサイクロンでは $\theta = 90, -90^\circ$ に向く. 高レイノルズ数では渦度の軸対称成分 $\omega_z^{(0)}$ が支配的になるため, 全渦度の等値線は円形に近くなる.

図 3, 4 は $R_r/(2\pi)=10, 100$ における渦軸垂直方向の全渦度 $\omega_x = \omega_x^{(0)} + \lambda \omega_x^{(1)}$, $\omega_y = \omega_y^{(0)} + \lambda \omega_y^{(1)}$ [式(16), (24), (28)参照] の空間分布をそれぞれ示したものである. 図 3, 4 中の白黒濃淡分布は渦度の大きさ $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}$ の分布を示し, 黒い等値線は渦軸方向の全速度 $w = w^{(0)} + \lambda w^{(1)}$ [式(24), (28)参照] の分布を示す ($w = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10$). 流れが z 軸方向に一樣なため, w の等値線は渦線の (x, y) 面への射影とみなすことができる [式(6)参照]. w は紙面上方 (+ y 方向) にいくにしたがって増加し, また渦線は紙面左から右 (+ x 方向) へと走る. 図 3, 4 でも, 図 2 と同様に $t=1, \lambda = \mp 0.5$ とした. 図 3, 4 の (a) はサイクロン ($\lambda = -0.5$), (b) はアンチサイクロン ($\lambda = +0.5$) を表す. 図 3, 4 のいずれのレイノルズ数においても,

(a) Cyclone ($\lambda = -0.5$) (b) Anti-cyclone ($\lambda = +0.5$)Fig. 4 Cross-flow vorticity component for $R_r/(2\pi)=100$

渦管(図 2)が誘導する反時計回りの旋回流によって, 渦線 (w の等値線) は渦管まわりに巻き付けられ, w の等値線の間隔が狭くなると同時に渦線が引き伸ばされる. w の等値線の間隔が狭く (w の変化率が大) 渦線が引き伸ばされている領域は二つのらせん状の渦層を形成し, そこでは互いに反対符号の強い周方向渦度成分が生成されることになる [式(16)参照]. 図 3 と図 4 を比較すると, レイノルズ数の増加とともに, この渦線の巻付けがより顕著となり, より強い周方向渦度成分をもったらせん状渦層が生成されていることがわかる. また, レイノルズ数が増加すると, 渦の中心付近において渦度の渦軸垂直成分がほぼ消滅⁽¹²⁾ していることがわかる. これは, 渦の中心付近では二つの互いに反対符号のらせん状渦層が非常に密に巻き付けられ, 粘性拡散により相殺するために生じる⁽¹³⁾.

次に, サイクロン [図 3, 4(a)] とアンチサイクロン [図 3, 4(b)] を比較すると, アンチサイクロンのほうがサイクロンに比べて渦軸垂直渦度成分が強くなっていることがわかる. 図 5 は, η 一定の円周上での

Fig. 5 Maximum cross-flow vorticity component against η [thin curve, $R_r/(2\pi)=10$; thick curve, $R_r/(2\pi)=100$]

渦軸垂直方向渦度の大きさの最大値 $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}_{\max}$ を η に対してトレースしたもので、細線と太線はそれぞれ $R_r/(2\pi)=10, 100$ を表す。高レイノルズ数極限での漸近解析⁽¹²⁾⁽¹³⁾により $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}_{\max}$ は $(R_r/2\pi)^{1/3}$ オーダの η において $(R_r/2\pi)^{1/3}$ オーダの最大値をもつことが示されているので、この結果にしたがって η と $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}_{\max}$ をスケールアップしている。図5から、アンチサイクロン(破線)は $\lambda=0$ (実線)より大きくなり、逆にサイクロン(点線)は小さくなっていることが確認できる。

以下、このサイクロンとアンチサイクロンの相違の原因を考察する。サイクロンとアンチサイクロンの相違を生み出す λ^1 オーダの渦軸方向せん断流速 $w^{(1)}$ に対する方程式(20)における生成項(非斉次項)は

$$\frac{R_r}{r} \frac{\partial(\psi^{(1)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)} - \frac{r}{2} \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w^{(0)}$$

である。この第1項は、図2の λ^1 オーダの四重極状渦度分布 $(\omega_z^{(1)} R_r)$ が誘導する渦軸垂直方向の流れによる λ^0 オーダの渦軸方向せん断流速 $w^{(0)}$ の移流を表し、一方、第2項は、渦管横断方向のせん断流 $\lambda y e_x$ による $w^{(0)}$ の移流を表す[式(8)も参照]。図6は、 $R_r/(2\pi)=100$ に対して、これら二つの移流効果をもたらし渦軸垂直方向の流れの流線(流れ関数 $\psi^{(1)} R_r + y^2/2$ の等値線)と $w^{(0)}$ の等値線を示したものである。流線と $w^{(0)}$ の等値線がそれぞれ白線と黒線で示されている[白線: $\psi^{(1)} R_r + y^2/2 = (1.5n)^2 (n=0, 1, 2, 3, 4, 5)$, 黒線: $w^{(0)}=0, \pm 4, \pm 8$]。図6中には $w^{(1)}$ の空間分布も白黒濃淡分布で示した。なお、図6でも $t=1$ にとった。図6の流線(白線)を見ると、渦管横断方向のせん断流が零になる $y=0$ 付近を除いて、この

Fig. 6 λ^1 -order cross-flow streamlines (white), λ^0 -order axial velocity contours (black) and λ^1 -order axial velocity distribution (greyscale)

せん断流の寄与が四重極渦度の誘導する流れのそれより大きいことがわかる。アンチサイクロン($\lambda>0$)では、流線はせん断流の寄与により $y>0$ で紙面左から右(+ x 方向)へ、 $y<0$ で紙面右から左(- x 方向)へと走る。したがって、 $w^{(0)}$ の等値線(黒線、渦線)が巻き付けられてその間隔が狭くなり、かつ y 方向へ顕著に傾く図6の第2象限($x<0, y>0$)あるいは第4象限($x>0, y<0$)では、 $w^{(0)}$ のせん断流による移流効果(生成項の第2項)からそれぞれ正あるいは負の $w^{(1)}$ が生成されることになる。これに対して、サイクロン($\lambda<0$)では、流線は $y>0$ で紙面右から左(- x 方向)へ、 $y<0$ で紙面左から右(+ x 方向)へと走るため、同様の移流効果によって第2象限で負、第4象限で正の $w^{(1)}$ がそれぞれ生成される。図4を見ると、アンチサイクロン[図4(b), $\lambda>0$]では、以上のせん断流による移流効果によって、 w の等値線(黒線、渦線)が $y>0$ で+ x 方向に、 $y<0$ で- x 方向にせん断されているようすが確認できる。一方、サイクロン[図4(a), $\lambda<0$]では w の等値線は $y>0$ で- x 方向に、 $y<0$ で+ x 方向にせん断されている。このせん断効果によって、アンチサイクロンの w の等値線の間隔は第2, 4象限でサイクロンに比べてより狭くなり、したがってそこではより強い渦軸垂直渦度成分が生成されることになる。

5. エネルギー散逸

渦管まわりの運動エネルギーの単位時間、単位質量当たりの無次元粘性散逸率は

$$\frac{\Phi}{\nu \beta^2} = (1 + \lambda^2) + D(x, y) \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。ここに

$$D = R_f^2 \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right] - 2\lambda R_f \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + (\omega_x^2 + \omega_y^2 - 1) \dots \dots (34)$$

であり、式(33)の右辺第1項は渦軸および横断方向の一様せん断流からの寄与を表す。式(34)の D の第1, 2項は渦管自身によるエネルギー散逸⁽¹⁴⁾、第3項は渦線の巻付き伸長によって生じたらせん状渦層(図3, 4)によるエネルギー散逸を表す。式(34)に ψ , ω_x , ω_y の展開(14)~(16)を代入すると

$$D = R_f^2 \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} \right)^2 \right] + [(\omega_x^{(0)})^2 + (\omega_y^{(0)})^2 - 1] + 8\lambda R_f^2 \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial y} + 2\lambda R_f^2 \left(\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} \right) - 2\lambda R_f \left(\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} \right) + 2\lambda (\omega_x^{(0)} \omega_x^{(1)} + \omega_y^{(0)} \omega_y^{(1)}) + O(\lambda^2) \dots \dots (35)$$

が得られる。式(35)の第1, 2項は λ^0 オーダーの寄与であり、それぞれ拡散渦、らせん状渦層(渦軸方向のせん断流)に伴う散逸を表す。第3~6項は λ^1 オーダーの寄与であり、第3, 4項が横断方向のせん断流による渦管の変形に伴う散逸、第5項が横断方向のせん断流と拡散渦の相互作用、そして第6項がらせん状渦層(渦軸方向のせん断流)に伴う高次の散逸を表す。

図7は、 $R_f/(2\pi)=100$ に対するエネルギー散逸[式(35)]の空間分布を白黒濃淡分布で示したものである。図7(a), (b)はそれぞれサイクロン($\lambda=-0.2$)とアンチサイクロン($\lambda=+0.2$)を表す。図7中には w の等値線(渦線)も黒線で示されている($w=0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20$)。図7では、 t を後述の臨界時刻 $t_c=2.94$ にとった。図7のエネルギー散逸分布には、式(35)の第1項の寄与により渦中心付近に円環状の高散逸領域が現れる⁽¹⁴⁾。また、渦周辺には、式(35)の第2項の寄与によって渦層(図4)に伴うらせん状の高散逸領域が現れる。この円環状の高散逸領域は $\eta=O(1)$ ⁽¹⁴⁾に位置し、一方、らせん状の高散逸領域は、渦層が $\eta=O[(R_f/2\pi)^{1/3}]$ ⁽¹²⁾⁽¹³⁾に位置するため(図5)、これと同位置に存在する。円環状の高散逸領域には、式(35)の第5項の寄与(第3, 4項の寄与は第5項に比べて小さい)により二つの極大値[これらの極大値は、図7(a)のサイクロンでは左右に、図7(b)のアンチサイクロンでは上下に並ぶ]が現れる⁽¹⁴⁾。また、らせ

(a) Cyclone ($\lambda=-0.2$)

(b) Anti-cyclone ($\lambda=+0.2$)

Fig. 7 Energy dissipation D for $R_f/(2\pi)=100$

ん状の高散逸領域は、式(35)の第6項の寄与によって、サイクロン[図7(a)]に比べてアンチサイクロン[図7(b)]のほうが強められる。これは、4章で議論したようにアンチサイクロンでは強い渦軸垂直渦度成分が生成され、渦層が強められるためである。

式(35)の D を (x, y) 面で面積積分すると、総エネルギー散逸

$$\iint D(x, y) dx dy = \frac{R_f^2}{8\pi t} + 8\pi I_0 t + 16\lambda\pi I_1 t^2 + O(\lambda^2) \dots \dots (36)$$

が得られる。ここに

$$I_0 = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \eta^2 f' \bar{f}' + \frac{1}{2} \eta (f \bar{f})' + f \bar{f}^{-1} \right] \eta d\eta \dots \dots (37)$$

$$I_1 = \int_0^\infty \text{Re} \left\{ i \left[\frac{1}{2} \eta^2 f' \bar{f}' + \frac{1}{2} \eta (f \bar{f})' + f \bar{f} \right] \right\} \eta d\eta \dots \dots (38)$$

である。式(36)の右辺第1項は式(35)の第1項に由来し、拡散渦に伴う総散逸を表す。式(36)の第2項は式

(35)の第2項に由来し、らせん状渦層に伴う総散逸を表す。 λ^1 オーダーの第3項は式(35)の第6項に由来し、らせん状渦層に伴う高次の総散逸を表す。なお、式(35)の第3～5項からの総散逸への寄与はないことに注意する。積分 I_0 [式(37)]の高レイノルズ数極限での主要項の漸近形は

$$\begin{aligned} I_0 &\sim \frac{1}{8}(R_r/2\pi)^{4/3} \int_0^\infty \kappa^{-3} \exp\left(-\frac{1}{24\kappa^6}\right) d\kappa \\ &= \frac{3^{1/3}\sqrt{3}\pi}{36\Gamma(2/3)}(R_r/2\pi)^{4/3} \\ &= 0.160987\cdots \times (R_r/2\pi)^{4/3} \cdots \cdots (39) \end{aligned}$$

のように評価できる。ここに Γ はガンマ関数である。

式(36)の λ^0 オーダーから、臨界時刻

$$t_c = \frac{1}{4} I_0^{-1/2} R_r/(2\pi) \cdots \cdots (40)$$

において拡散渦の総散逸 [式(36)の第1項] とらせん状渦層の総散逸 [式(36)の第2項] が等しくなり、したがって $t < t_c$ では拡散渦の総散逸が支配的であり、 $t > t_c$ ではらせん状渦層の総散逸が支配的であることがわかる。臨界時刻 t_c の高レイノルズ数極限での漸近形は、式(39)、(40)より

$$t_c = 0.623080\cdots \times (R_r/2\pi)^{1/3} \cdots \cdots (41)$$

となる。図8は、式(40)によって計算された臨界時刻 t_c のレイノルズ数依存性を示したものである。図8中には t_c の高レイノルズ数極限での漸近形(41)も示した。 t_c は低レイノルズ数 $R_r/(2\pi) = O(1)$ ではほぼ一定の値をとるが、レイノルズ数が増加すると緩やかに増加し始め、高レイノルズ数では式(41)に漸近している。図8から比較的低いレイノルズ数 $R_r/(2\pi) = O(10)$ でも式(41)がよい近似を与えることがわかる。

最後に λ^1 オーダーの高次の総散逸 [式(36)の第3項] を考える。図9にこの総散逸に現れる積分 I_1 [式(38)]のレイノルズ数依存性を示す。図9から I_1 がいずれのレイノルズ数においても正の値をもつことがわかる。したがって、渦管横断方向のせん断流が存在しない場合($\lambda=0$)に比べて、横断方向のせん断流が渦管に作用するアンチサイクロン($\lambda>0$)では総散逸(36)が増加し、逆にサイクロン($\lambda<0$)では総散逸(36)が減少することになる。以上から、4章で検討したアンチサイクロン(サイクロン)におけるらせん状渦層の強化(弱化) [図4(a), (b)] は、らせん状高散逸領域を局所的に強める(弱める)ばかりでなく [図7(a), (b)], 総散逸をも増加(減少)させることがわかる。なお、図9を見ると、 I_1 は高レイノルズ数において I_0 [式(39)]と同様に $(R_r/2\pi)^{4/3}$ でスケールされる傾向にある。

Fig. 8 Critical time t_c against $R_r/(2\pi)$

Fig. 9 Integral I_1 against $R_r/(2\pi)$

6. 結 言

本報では、一様せん断流における有限レイノルズ数の直線渦管と渦あり周囲流との相互作用を表すNavier-Stokes方程式の漸近解を弱い渦管横断方向せん断の極限で求め、渦管まわりの渦度伸長とエネルギー散逸への横断方向せん断の影響を調べた。以下に、本研究で得られたおもな知見をまとめる(以下では有次元量を用いる)。

(1) 一様せん断流 $\beta y e_z$ に平行な $+e_z$ 向きの渦管(循環 Γ)は粘性により拡散すると同時に、一様せん断流の渦線を自分自身に巻き付け、渦線の伸長により渦軸垂直方向、特に周方向の渦度を強める。その結果、渦管周辺に互いに反対符号の強い周方向渦度成分をもつ二つのらせん状渦層が生成される。

(2) これら二つの渦層に横断方向の弱い一様せん断 $\alpha y e_x$ が作用すると、渦管と横断方向せん断の渦度が平行になる $\alpha < 0$ の場合(サイクロン)とそれらが反平行になる $\alpha > 0$ の場合(アンチサイクロン)とで異なる影響が現れる。

(3) アンチサイクロンでは、二つの反対符号のらせん状渦層が横断方向にせん断されることで両者の間

隔が狭くなるため、渦層の渦度が強められ、総エネルギー散逸が増加する。

(4) サイクロンでは、二つのらせん状渦層がアンチサイクロンとは反対の方向にせん断されることで両者の間隔が広くなり、渦層の渦度が弱められ、総エネルギー散逸が減少する。

(5) 壁面せん断乱流の縦渦はスパン方向への傾きをもち⁽⁸⁾、その傾き方に応じてサイクロンとアンチサイクロンが現れることが知られている⁽¹⁷⁾。上記(3)、(4)の結果はせん断乱流中のこれら2種類の縦渦の動力学を理解するうえで有用であると考えられる。

(6) 一様せん断流中の渦管まわりの総エネルギー散逸には、渦管自身とらせん状渦層からの二つの寄与があるが、両者の寄与が等しくなる時刻の高レイノルズ極限 ($\Gamma/\nu \gg 1$) での漸近形は $\beta t_c = 0.623(\Gamma/2\pi\nu)^{1/3}$ で与えられ、比較的低いレイノルズ数でもよい近似を与える。 $t < t_c$ では渦管に伴うエネルギー散逸が支配的となり、 $t > t_c$ ではらせん状渦層に伴うエネルギー散逸が支配的となる。

文 献

(1) Sigga, E. D., *J. Fluid Mech.*, **107**(1981), 375-406.

- (2) Kerr, R. M., *J. Fluid Mech.*, **153**(1985), 31-58.
- (3) She, Z. -S., ほか2名, *Nature*, **344**(1990), 226-228.
- (4) Kida, S. and Ohkitani, K., *Phys. Fluids*, **4**-5, A(1992), 1018-1027.
- (5) Jiménez, J., ほか3名, *J. Fluid Mech.*, **255**(1993), 65-90.
- (6) 店橋護・宮内敏雄, *ながれ*, **17**-6 (1999), 417-425.
- (7) Hosokawa, I. and Yamamoto, K., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **58**(1989), 20-23.
- (8) Bernard, P. S., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **253**(1993), 385-419.
- (9) Kravchenko, F. G., ほか2名, *Phys. Fluids*, **5**-12, A(1993), 3307-3309.
- (10) Moffatt, H. K., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **259** (1994), 241-264.
- (11) Jiménez, J., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **313**(1996), 209-222.
- (12) Moore, D. W., *Proc. R. Soc. London*, **399**, Ser. A, (1985), 367-375.
- (13) Kawahara, G., ほか3名, *J. Fluid Mech.*, **353** (1997), 115-162.
- (14) 河原源太・ほか2名, *機論*, **65**-640, B(1999), 3977-3985.
- (15) Saffman, P. G., *Vortex Dynamics*, (1992), 253-254, Cambridge Univ. Press.
- (16) Pearson, C. F. and Abernathy, F. H., *J. Fluid Mech.*, **146**(1984), 271-283.
- (17) 河原源太・ほか3名, *機論*, **61**-592, B(1995), 4297-4304.