壁乱流の LES における差分精度と格子解像度の影響*

森 西 洋 平^{*1}, 市 川 明 洋^{*2}
奥 村 隆^{*3}, 中 林 功 一^{*1}Effects of the Order of Accuracy of Finite-Difference Method
and Grid Resolution on LFS of Wall TurbulenceYouhei MORINISHI^{*4}, Akihiro ICHIKAWA,
Takashi OKUMURA and Koichi NAKABAYASHI^{*4} Department of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, Aichi, 466-8555 Japan

In the large eddy simulation (LES) of turbulent flow, grid scale (GS) flow field is described by solving discretized governing equations of flow motion with a subgrid scale (SGS) model. Hence, the reliability of the LES data depends strongly not only on the reliability of the SGS model but also on the accuracy of the numerical method. In the LES a finite difference method (FDM) is widely used for practical problems. However, the truncation error of FDM is usually not so small compared with the SGS stress. The problem can be removed by increasing grid resolution, but it is still difficult to keep enough grid resolution in the LES of high Reynolds number flows. In this study, the effects of the order of accuracy of FDM and grid resolution on the LES of plane channel turbulent flow are estimated by the fully conservative higher order staggered FDM scheme proposed recently. The simulations of the flow at $Re_\tau=100$ are submitted without SGS model with various grid resolution and several order of FDM up to 12th-order accuracy, and the fact that the FDM discretization has the effects of both truncation error and sharp cutoff is revealed. The effect of truncation error decreases the wall friction loss, while the effect of sharp cutoff increases it. Then, the flow at $Re_\tau=180$ is simulated with the dynamic SGS model, and it is pointed out that we have to take the numerical error into consideration in constructing the SGS model for LES of practical problems.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Turbulent Flow, Large Eddy Simulation, Grid Resolution, Numerical Error, Plane Channel Turbulent Flow

1. 緒 言

ラージエディシミュレーション(LES)では格子で解像できる流れ場(GS)の成分がフィルタ化された運動方程式を離散化して数値的に解かれ、その際に格子以下のスケール(SGS)の流れ場からGS流れ場への寄与についてはSGSモデルが導入される。これより、LESの計算結果の信頼性はSGSモデルの信頼性に加え基礎方程式の離散化手法にも大きく依存する。LESの応用計算では空間的離散化手法として差分法が用いられる場合が多いが、差分誤差はSGS応力に対して無視できない大きさである場合の多いことが一様乱流の解析から示されている⁽¹⁾。差分誤差を減少させる方法としては格子解像度および差分精度の向上が考えられる。これまで、差分誤差の対処はおもに格子解像度の向上により行われてきた。しかし、高レイノルズ数乱流に対するLESで十分な格子解像度を確保するこ

とは困難な場合が多い。

本論文は、差分精度と格子解像度が壁乱流のLESの計算結果に及ぼす影響を調べることを目的としている。そのため、まず著者の一人が近年提案したスタガード格子系の2乗量保存形の高次精度差分⁽²⁾⁽³⁾を基に周期方向を高次精度化した差分法を構成する。次に、SGSモデルを使用しない平板チャネル乱流の数値計算を格子解像度および差分精度を変化させて実行し、これらが計算結果に及ぼす影響を調べる。さらに、格子解像度が一定の条件で差分精度を変化させてLESを実行し計算結果を検討する。

2. 数値計算手法

2.1 基礎方程式 非圧縮性流体に対するLESの基礎方程式として、本研究ではフィルタ化されたナビエ・ストークス方程式および連続の式を用いる。対象とする流れ場は主流方向に一定の平均圧力こう配が作用し主流およびスパン方向が周期的となる平板チャネル乱流(図1)であり、主流、壁面およびスパン方向をそれぞれ x_1 , x_2 および x_3 とすると、この流れ場を記述する基礎方程式は次のようになる。

* 原稿受付 1999年7月19日。

^{*1} 正員, 名古屋工業大学(☎ 466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。^{*2} 准員, 日立空調システム(☎ 424-0926 清水市村松390)。^{*3} 名古屋工業大学大学院生。

E-mail: morinisi@cfm.mech.nitech.ac.jp

Fig. 1 Plane channel flow

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{i1} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

上式中の変数はすべて壁面摩擦速度 u_τ およびチャネル半幅 h で無次元化されており, t は時間, $u_i (i=1, 2, 3)$ は x_i 方向の速度成分, p は変動圧力であり, 上付き一付いた変数はその変数がフィルタ化量であることを意味する. イタリックの繰返し添字には基本的に総和規約が適用されるものとする. 式(1)中の δ_{i1} は無次元化された平均圧力こう配である. レイノルズ数は $Re_\tau = u_\tau h / \nu$ で定義されている. また, $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$ は SGS 応力である.

2.2 空間離散化手法 壁面境界条件の設定方法に関するあいまいさを避けるため, 本論文では壁面方向に二次精度で周期方向を高次精度化させた差分スキームをスタガード格子系において構成し, 式(1)および式(2)の空間離散化手法とする. スタガード格子系を用いる差分法では, 図2に示すように速度成分 u_i は圧力 p の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に定義され, 式(1)の i 成分は u_i の定義点上で, 式(2)は圧力の定義点上で離散化される. 離散式の表記の簡略化のため, ステンシル n の差分格子による x_1 方向の3種類の離散オペレータを次のように定義する⁽²⁾⁽³⁾.

$$\frac{\partial_n \Phi}{\partial x_1} = \frac{\Phi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) - \Phi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right)}{nh_1} \dots \dots \dots (3)$$

$$\Phi^{nx_1} = \frac{\Phi\left(x_1 + \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right) + \Phi\left(x_1 - \frac{nh_1}{2}, x_2, x_3\right)}{2} \dots \dots \dots (4)$$

h_i は $x_i (i=1, 2, 3)$ 方向の差分格子幅を表す. これらのオペレータは離散化に必要な点 (x_1, x_2, x_3) 上で適

Fig. 2 Staggered grid system in x_1 - x_2 plane

用される. x_2, x_3 方向のオペレータも同様に定義される. また, 離散式中で補間オペレータの上付き添字が nx_i となる場合, 補間自身に対して i についての総和規約は適用されないものとする. まず, 壁面方向に二次精度かつ周期方向に n 次精度の差分法を用いて連続の式および圧力こう配項を次のように離散化する.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \sim \frac{\delta_1 u_2}{\delta_1 x_2} + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)} u_1}{\delta_{(2k-1)} x_1} + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)} u_3}{\delta_{(2k-1)} x_3} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} \sim \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)} p}{\delta_{(2k-1)} x_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} \sim \frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} \sim \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)} p}{\delta_{(2k-1)} x_3} \dots \dots \dots (6)$$

上式中の係数 $C_{(2k-1)}^n$ は周期方向の差分を n 次精度とする係数であり, これらは次の行列を解くことにより求められる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1 & 3^4 & 5^4 & \dots & (n-1)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3^{n-2} & 5^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^n \\ C_3^n \\ C_5^n \\ \vdots \\ C_{n-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

四次精度差分の係数は $C_1^4 = +9/8$, $C_3^4 = -1/8$, 八次精度差分の係数は $C_1^8 = +1225/1024$, $C_3^8 = -245/1024$, $C_5^8 = 49/1024$, $C_7^8 = -5/1024$, 十二次精度差分の係数は $C_1^{12} = +320166/262144$, $C_3^{12} = -76230/262144$, $C_5^{12} = +22896/262144$, $C_7^{12} = -5445/262144$, $C_9^{12} = +847/262144$, $C_{11}^{12} = -63/262144$, と与えられる. 次に, 壁面方向が二次精度かつ周期方向が n 次精度, また等間隔格子で式(5)が満足される場合に二乗量保存形となる対流項差分スキームを構成する. ここでは発散形に対する離散式のみを示しておく.

$$\frac{\partial u_i u_1}{\partial x_j} \sim \frac{\delta_1}{\delta_1 x_2} \left[\left(\sum_{l=1}^{n/2} C_{(2l-1)}^n \overline{u_2^{(2l-1)} x_1} \right) \overline{u_1^{1x_2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)}}{\delta_{(2k-1)} x_1} \\
& \times \left[\left(\sum_{i=1}^{n/2} C_{(2i-1)}^n \frac{\delta_{(2i-1)}}{\delta_{(2i-1)} x_1} \right) u_1^{-(2k-1)x_1} \right] \\
& + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)}}{\delta_{(2k-1)} x_3} \\
& \times \left[\left(\sum_{i=1}^{n/2} C_{(2i-1)}^n \frac{\delta_{(2i-1)}}{\delta_{(2i-1)} x_3} \right) u_1^{-(2k-1)x_3} \right] \cdots (8) \\
\frac{\partial u_j u_2}{\partial x_j} & \sim \frac{\delta_1}{\delta_1 x_2} [u_2^{-1x_2} u_2^{-1x_2}] \\
& + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)}}{\delta_{(2k-1)} x_1} \\
& \times [u_1^{-1x_2} u_2^{-(2k-1)x_1}] \\
& + \sum_{k=1}^{n/2} C_{(2k-1)}^n \frac{\delta_{(2k-1)}}{\delta_{(2k-1)} x_3} \\
& \times [u_3^{-1x_2} u_2^{-(2k-1)x_3}] \cdots (9)
\end{aligned}$$

$\partial u_j u_3 / \partial x_j$ も $\partial u_j u_1 / \partial x_j$ と同様に離散化される。粘性項の離散化には対流項と同じ精度をもつ差分法、つまり壁面方向 2 階微分には二次精度差分、主流およびスパン方向 2 階微分には二、四、八あるいは十二次精度差分が用いられる。なお、本論文の推敲中に不等間隔格子でも二乗量が保存されるスタガード格子系の二次精度差分法が提案されているが⁽⁴⁾、本研究では不等間隔格子を使用する壁面方向には十分な格子解像度を確保しているので計算結果に問題はない。

2.3 時間進行法 式(1)の時間進行法として、粘性項のうち壁面方向 2 階微分に関する項にはラング・ニコルソン法、他の項には三次精度ルンゲ・クッタ法(RK 3)⁽⁵⁾を適用する。式(1)と式(2)とを連立して解くためのカップリングアルゴリズムには Dukowicz & Dvinsky タイプのフラクショナルステップ法⁽⁶⁾が用いられている。計算アルゴリズム中に現れる圧力ポアソン方程式の解法には周期方向に高速フーリエ変換法および壁方向に三重対角行列解法が用いられており、離散化された連続の式(5)は計算機の丸め誤差のオーダで満足されている。時間進行法および計算アルゴリズムの詳細については文献(2)を参照されたい。

2.4 SGS モデル 本研究の LES では、SGS モデルとして基本的にダイナミック・スマゴリンスキーモデル(DSM)⁽⁷⁾⁽⁸⁾を採用する。DSM ではまず SGS 応力 τ_{ij} に次の渦粘性近似を適用する。

$$\tau_{ij}^* = -2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}, \cdots (10)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), |\bar{S}| = (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$$

上付き添字の*はトレースフリー演算子($\tau_{ij}^* = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}$)である。上式中のモデルパラメータ $(C_s \bar{\Delta})^2$ は次式で与える。

$$(C_s \bar{\Delta})^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle}, \cdots (11)$$

$$L_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, M_{ij} = \alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \widehat{\bar{S}_{ij}},$$

$$\alpha^2 = (\bar{\Delta} / \bar{\Delta})^2$$

解析対象が平板チャネル乱流であることを考慮し、上式には面平均化操作($\langle \rangle$ で表示)が導入されている。DSM では L_{ij} および M_{ij} の計算にテストフィルタ化操作が必要となる。本研究で用いるテストフィルタには x_1 および x_3 方向の面フィルタを用い、 $x_i (i=1, 3)$ 方向に関してフィルタ幅が $\bar{\Delta}_i = 2h_i$ となるガウシアンフィルタの近似式として

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x_i) &= \frac{1}{6} f(x_i - h_i) + \frac{2}{3} f(x_i) \\
&+ \frac{1}{6} f(x_i + h_i) \cdots (12)
\end{aligned}$$

を採用する。本研究では、 $\bar{\Delta}^3 = \bar{\Delta}_1 h_2 \bar{\Delta}_3$, $\bar{\Delta}^3 = \bar{\Delta}_1 h_2 \bar{\Delta}_3$ と設定する。このとき、グリッドフィルタを $\bar{\Delta}_i = h_i$ のシャープフィルタとすれば、 $\bar{\Delta}_i = \bar{\Delta}_i = 2h_i$ の関係からフィルタ比の二乗 α^2 の値は $\alpha^2 = 4^{2/3} = 2.52$ と算出される⁽⁹⁾。一方、グリッドフィルタを $\bar{\Delta}_i = h_i$ のガウシアンフィルタとすれば、 $\bar{\Delta}_\beta^2 = \bar{\Delta}_\beta^2 + \bar{\Delta}_\beta^2 = 5h_\beta^2$, $\beta=1, 3$ の関係からフィルタ比の二乗 α^2 の値は $\alpha^2 = 5^{2/3} = 2.92$ と算出される。また、文献(10)では最適値として $\alpha^2 = 4.00$ が示されている。本研究の DSM による LES では $\alpha^2 = 2.52, 2.92$ および 4.00 の 3 例の数値計算を実行する。比較のため実行されるスマゴリンスキーモデル(SM)を用いた LES では、式(10)中の $(C_s \bar{\Delta})$ に壁面減衰関数を導入した次式、

$$(C_s \bar{\Delta}) = 0.1(h_1 h_2 h_3)^{1/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{25}\right) \right], \cdots (13)$$

が用いられる。ここで、 $y^+ = Re_\tau y$ で、 y は壁面からの距離である。

3. 平板チャネル乱流の数値解析

3.1 計算条件 計算対象は図 1 に示される平板チャネル乱流であり、主流、壁面およびスパン方向の計算領域 $L_1 \times L_2 \times L_3$ を、 $Re_\tau = 100, 180$ の計算例に対して $4\pi \times 2 \times 4\pi/3$, $Re_\tau = 395$ の計算例に対して $2\pi \times 2 \times 2\pi/3$ と設定する。 $Re_\tau = 100$ の計算例については、主流およびスパン方向の格子数 N_1, N_3 を 16, 24, 32, 48, 64 と変化させ、各精度(二、四、八次精度および十二次精度)の差分法の計算結果に及ぼす格子解像度の影響を調べる。 $Re_\tau = 180, 395$ の計算例では、 N_1, N_3 は 32 に設定されている。壁面方向の格子数 N_2 はすべての計算例で 64 と設定されているが、 N_2 をこれ以上増加させても計算結果にほとんど変化が見られなかった。なお、壁面方向の格子配置には双

Table 1 Grid resolution for the plane channel flow simulations

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7
Re_τ	100					180	395
L_1	4π						2π
L_2	2						
L_3	$4\pi/3$						$2\pi/3$
N_1	16	24	32	48	64	32	
N_2	64						
N_3	16	24	32	48	64	32	
h_1^+	78.5	52.4	39.3	26.2	19.6	70.7	77.6
h_2^+	1.0~5.1					1.0~11.1	0.6~34.1
h_3^+	26.2	17.5	13.1	8.7	6.5	23.6	25.9

曲正接形関数による壁面への格子集中が行われている。表 1 に、本研究で実行した計算例の格子解像度をまとめて示しておく。表 1 中の格子解像度は壁座標で表示され、 $h_i^+ = Re_\tau h_i$ ($i=1, 2, 3$) で定義される。時間刻み幅 Δt は、 $Re_\tau=100$ では 0.004, $Re_\tau=180$ では 0.003, $Re_\tau=395$ では 0.0025 と設定され、十分に発達した流れ場を得た後、時間(5000 時間ステップ程度)および周期方向のデータを用いたアンサンブル平均($\{\}$ で表示)により乱流の統計平均量を算出する。比較のために示されるスペクトル法のデータは文献(11), (12)による手法を用いて計算されている。スペクトル法の計算に用いられる計算領域と格子数は差分法の対応するものに等しく設定されているが、壁面方向の格子配置のみ差分法とは異なる(壁面方向にはガウス・ロバット点を用いたチェビシェフ級数展開⁽¹³⁾が使用されているため)。

3.2 SGS モデルなしの数値計算 LES の計算結果は SGS モデルの信頼性および基礎方程式の離散化手法に依存する。ここでは、まず差分法を用いた場合の基礎式に対する離散化の効果を明らかにするため、まず表 1 中の Case 1 から Case 5($Re_\tau=100$) の格子解像度の計算例を取り上げ、空間精度を二, 四, 八次精度および十二次精度とする差分法を用い、SGS モデルを使用しない平板チャネル乱流の数値計算を実行した。

図 3(a)~(c) および図 3(d) それぞれに周期方向を二, 四, 八次精度および十二次精度とした差分法、また図 3(e) にスペクトル法、を用いた場合の主流方向平均速度 $U^+ (= \{\bar{u}_1\})$ の分布の格子依存性を示す。図 3 中には、参照データとして黒田ら⁽¹⁴⁾ による $Re_\tau=100$ の DNS データも示されている。まず、図 3(a) の二次精度差分による結果について、格子数

Fig. 3 Mean velocity profile of the simulation without SGS model at $Re_\tau=100$ (Case 1~5)

$16 \times 64 \times 16$ (Case 1) の平均速度の値は壁から離れると DNS データよりもかなり大きく、格子数を $24 \times 64 \times 24$ (Case 2) へ増加させると DNS データに近づき、さらに格子数を増加させると DNS データを下回るようになり、その後さらに格子解像度を上げると値の小さいほうから再び DNS データに近づく。格子数(格子解像度)の変化に伴う平均速度分布の定性的な変化の挙動については四, 八次精度および十二次精度差分による結果も二次精度差分のそれと同様である。ただし、格子解像度が低い場合には差分精度が高いほど壁面から離れた領域の平均速度の値がより小さくなる。一方、図 3(e) に示されるスペクトル法の計算結果については、格子数 $16 \times 64 \times 16$ の計算例では壁から離

れた領域の平均速度の値は参照データよりもかなり小さく、格子数を増加させるに従い単調に参照データに近づき、格子数 $64 \times 64 \times 64$ の計算例では DNS データにほぼ一致する。

乱流強度 $u'_\beta = \sqrt{\{(\bar{u}_\beta - \{\bar{u}_\beta\})^2\}}$, $\beta=1, 2, 3$ の計算結果の一例として、格子数を $16 \times 64 \times 16$ (Case 1) とした場合の二、四、八次精度および十二次精度差分法およびスペクトル法による計算結果を図 4 に示す。図 4 中には参照データとして黒田ら⁽¹⁴⁾ による $Re_\tau=100$ の DNS データも示されている。二、四次精度および八次精度差分法の結果は、主流方向乱流強度 u'_1 の値は DNS データよりも大きくまた壁面方向乱流強度 u'_2 およびスパン方向乱流強度 u'_3 の値は DNS データよりも小さくなる。一方、スペクトル法による主流方向乱流強度 u'_1 の値は格子解像度が低い場合にも DNS データと比べてあまり大きくはならず、また壁面およびスパン方向乱流強度は DNS データよりも大きく、二、四次精度および八次精度差分法とは逆の傾向をもつ。十二次精度差分法の計算結果は定量的にもスペクトル法の値に近く、差分精度を向上させると差分法による解の挙動はスペクトル法のそれに漸近することがわかる。紙面の都合で計算結果は示さないが、格子解像度を高めるといづれの差分法の計算結果も DNS データに近づく。

格子解像度と差分精度が計算結果に及ぼす影響を明確に示すため、二～十二次精度差分およびスペクトル法による主流方向平均速度 U_m^+ ,

$$U_m^+ = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \{\bar{u}_1\} dx_2, \dots \quad (14)$$

の値と主流方向乱流強度のピーク値 $u'_{1\text{peak}}$ の値を主流方向格子解像度 h_1^+ に対してプロットし、それぞれ図 5 および図 6 に示す。スペクトル法による離散化の

Fig. 4 Turbulence intensity profile of the simulation without SGS model at $Re_\tau=100$ (Case 1)

効果はシャープフィルタによる高波数打ち切りの効果として説明できる。図 5 では格子解像度が低いほどスペクトル法による U_m^+ は低い値となるので、高波数打ち切りの効果は平均速度を減少させることが理解される。一方、差分法による離散化の効果には打ち切り誤差および高波数打ち切りの二つの効果がある。差分法による打ち切り誤差の効果は格子解像度および差分精度が低い場合に顕著に現れ、この効果は平均速度を増加させる。差分法における高波数打ち切りの効果は打ち切り誤差の影響が無視できるだけの格子解像度および差分精度をもつ場合に明りょうに現れ、例えば八次精度差分では h_1^+ が 40 以下の場合に確認できる。二次精度差分では $h_1^+=40$ 、四次精度差分では $h_1^+=70$ 程度の格子解像度において打ち切り誤差と高波数打ち切りの効果が打ち消し合い U_m^+ の値が DNS データとほぼ一致しているが、これらの格子解像度は DNS の実行には不十分で

Fig. 5 The effect of grid resolution on the mean velocity at $Re_\tau=100$

Fig. 6 The effect of grid resolution on the peak value of streamwise turbulence intensity at $Re_\tau=100$

あることに注意が必要である。これは図6の主流方向乱流強度のピーク値から理解される。ところで、本研究の平板チャネル乱流の数値計算は平均圧力こう配一定、つまり壁面せん断応力 τ_w 一定の条件で実行されている。この場合には壁面摩擦係数 C_f の定義から $C_f = 2/U_m^2$ となるので、差分の打ち切り誤差は壁面摩擦損失を減少させ、高波数打ち切りの効果は壁面摩擦損失を増加させることが理解される。主流方向乱流強度のピーク値についても、差分法の打ち切り誤差の効果が支配的な格子解像度および高波数打ち切りの効果が支配的な格子解像度の領域が存在することが図6から確認できる。

格子数 $64 \times 64 \times 64$ (Case 5) の瞬時の流れ場から主流方向速度に関する一次元エネルギースペクトル $E_1(k_1)$ ($k_1 = 2\pi m/L_1$, $0 < m \leq N_1/2 - 1$) を計算しその一例を図7に示す。この格子解像度を確保すればどの精度の差分法も DNS データとほぼ一致する平均速度や乱流強度分布が得られているが(図3, 5, 6), 差分精度が低いほど小スケール渦が消散されている。これは差分の打ち切り誤差の効果である。なお、高波数打ち切りのため波数 $k_1 = N_1/2 = 16$ 以上で $E_1(k_1)$ の値は零となっている。

図5に示される差分法による離散化の効果のレイノルズ数依存性を調べるため、 $Re_\tau = 100, 180, 395$ の3種類のレイノルズ数それぞれについて壁座標による周期方向の解像度がほぼ同程度となる格子数(Case 1, 6, 7)を選び、SGS モデルなしで二、四、八次精度および十二次精度差分を用いた数値計算を実行し、平均速度分布の計算結果を図8に示した。図8の(a), (b)および図8(c)には、参照データとして黒田ら⁽¹⁴⁾($Re_\tau = 100$), Kim ら⁽¹⁵⁾($Re_\tau = 180$) および Moser ら⁽¹⁶⁾($Re_\tau = 395$) による DNS データもそれぞれ示されている。図8から、この格子解像度ではいずれのレイノルズ数

Fig. 7 One-dimensional energy spectrum at $Re_\tau = 100$ (Case 5)

においても差分精度が低いほど平均速度の値は大きくなる。これは図5に見られる傾向と一致する。また、二次精度差分による平均速度の計算結果と DNS データとを比べると、 $Re_\tau = 100$ では計算結果は対応する DNS データよりも大きく、 $Re_\tau = 180$ では計算結果は対応する DNS データとほぼ一致し、 $Re_\tau = 395$ の計算結果は対応する DNS データよりもわずかに低くなる。これより、壁座標による格子解像度が同じならば、レイノルズ数が低いほど差分の打ち切り誤差の効果が現れやすくなると考えられる。組画の都合で結果は省略するが、各レイノルズ数の乱流強度の差分精度依存性は $Re_\tau = 100$ の計算例(図4)のそれとほぼ一致する。

3.3 DSM を用いた $Re_\tau = 180$ の LES ダイナミック・スマゴリンスキーモデル(DSM)は流れ場によるモデル定数 C_s の最適化および壁面減衰関数が必要ない SGS モデルとして提案されているが、差分法自身によるフィルタ化効果およびそのフィルタ幅を定めることが困難な場合が多く、結果として α^2 の値が DSM のモデルパラメータとなってしまう。DSM による LES の計算結果の α^2 および差分精度の依存性を調べるため、LES のベンチマークテストとして広く用いられている $Re_\tau = 180$ の流れ場について α^2 を 2.52, 2.92, 4.00 と変化させ、Case 6 の計算例について LES を実行した。図9および図10それぞれに平均速度分布と乱流強度分布を示す。図9, 10の(a)~(c)および(d)はそれぞれ二、四、八次精度および十二次精度差分を用いた計算結果であり、参照データとして Kim ら⁽¹⁵⁾($Re_\tau = 180$) による DNS データ、スマゴリンスキーモデル(SM)による LES の結果および SGS モデルなしの計算結果も示されている。図9より、

Fig. 8 Mean velocity profile of the simulation without SGS model at $Re_\tau = 100, 180$ and 395

Fig. 9 Mean velocity profile of LES at $Re_\tau=180$ (Case 6) Fig. 10 Turbulence intensity profile of LES at $Re_\tau=180$ (Case 6)

SGS モデルなしの平均速度の計算結果は差分精度を高くするほど DNS データよりも値が下がるが, DSM あるいは SM による LES では SGS モデルなしの計算結果よりも平均速度の値が大きくまた差分精度が高いほど DNS データに近い平均速度が与えられる. DSM の計算結果は, α^2 の値が大きいほど DNS データに近い平均速度を与える. また, 式(13)を用いる SM は壁乱流に対してよく最適化されており, また $\alpha^2 = 4.00$ とする DSM は式(13)を用いる SM と同程度の結果が得られるモデルであることが理解される. 図 9(a) に示される二次精度差分の計算結果では SGS モデルなしの値が DNS データとよく一致しているが, これはこの解像度で差分の打ち切り誤差と高波数打ち切りの効果が偶然打ち消し合うためであり(図 5), SGS モデルを加えると DSM か SM かによらず平均速度の値が DNS データよりもかなり大きくなってしまふ. 図 10 に示されている DNS データは(フィルタ化された流れ場から計算されたものではないので) LES と直接比較することはできないが, フィルタ化により乱流強度は低下するはずであるので, いずれの精度の差分法も主流方向乱流強度を過大評価している. しかし, これは差分法の打ち切り誤差によるものであり

(図 6), 差分精度の向上により主流方向の乱流強度分布は改善される. DSM では α^2 の値が小さいほど主流方向乱流強度は SGS モデルなしの結果よりも大きくまた壁面およびスパン方向の乱流強度は SGS モデルなしの結果よりも小さくなる.

DSM を用いた LES の計算結果に及ぼす α^2 および差分精度の影響を明確に示すため, 主流方向平均速度 U_m^+ の値を差分精度に対してプロットし図 11 に示す. 図 11 中には Kim ら⁽¹⁵⁾ の DNS による値, SM による結果および差分法と同じ格子数で SGS モデルなしでスペクトル法により計算された値も参照データとして示されている. 図 11 から DSM あるいは SM を用いた LES では SGS モデルなしの結果よりも平均速度が増加することが理解される. よって, SGS モデルなしの場合の平均速度の値が DNS データよりも大きくなるような差分精度と格子解像度の組合せ(図 5)では, DSM および SM を用いる LES はともに平均速度を適切に予測できない. つまり, これらの SGS モデルを用いる LES で適切な平均速度を得るためには, 打ち切り誤差の効果よりも高波数打ち切りの効果が卓越するだけの格子解像度を確保する必要がある, 低次精度の差分ほどより高い格子解像度が要求される. また,

Fig. 11 The effect of the order of the finite difference method on the mean velocity at $Re_\tau=180$ (Case 6)

図 11 中の SGS モデルなしの結果と DNS データとの差の部分(図 11 中の斜線部分)が SGS モデルの導入で補われるべき部分である。この部分は差分の精度に加え格子解像度にも依存するので(図 5), 差分法を用いた LES でより正確な乱流場の予測を行うためには差分精度および格子解像度の影響を考慮した SGS モデルを使用する必要がある⁽¹⁷⁾。

4. 結 論

本論文では, 差分精度と格子解像度が壁乱流の LES の計算結果に及ぼす影響を調べるため, 平板チャネル乱流について SGS モデルなしの数値計算および DSM を用いた LES を実行し計算結果を検討した。その結果, 以下の結論を得た。

(1) 差分法による離散化の効果には打ち切り誤差および高波数打ち切りの二つの効果がある。

(2) 打ち切り誤差の効果は低次精度差分で格子解像度が低い場合に顕著に現れ, この効果は平板チャネル乱流の平均速度を増加させる, つまり壁面摩擦損失を減少させる。

(3) 高波数打ち切りの効果は打ち切り誤差の影響が無視できるだけの精度をもつ低解像度の差分法の場合に現れ, この効果はスペクトル法による低解像度の計算

の場合と同様に平板チャネル乱流の平均速度を減少させる, つまり壁面摩擦損失を増加させる。

(4) DSM あるいは SM を用いる LES で適切な平均速度を得るためには, 打ち切り誤差よりも高波数打ち切りの効果が卓越するだけの格子解像度を確保する必要があり, 低次精度の差分法ほどより高い格子解像度が要求される。

(5) 差分法を用いた LES でより正確な乱流場の予測を行うためには差分精度および格子解像度の影響を考慮した SGS モデルを使用する必要がある。

文 献

- (1) Ghosal, S., *J. Comput. Phys.*, **125** (1996), 187-206.
- (2) 森西洋平, 機論, **62**-604, B(1996), 4090-4112.
- (3) Morinishi, Y., Lund, T., Vasilyev, O. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, **143** (1998), 90-124.
- (4) 梶島岳夫, 機論, **65**-633, B(1999), 1607-1612.
- (5) Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M., *J. Comput. Phys.*, **96** (1991), 297-324.
- (6) Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S., *J. Comput. Phys.*, **102** (1992), 336-347.
- (7) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W., *Phys. Fluids*, **A3**-7 (1991), 1760-1765.
- (8) Lilly, D., *Phys. Fluids*, **A4**-3 (1992), 633-635.
- (9) Piomelli, U., *Phys. Fluids*, **A5**-6 (1993), 1484-1490.
- (10) Cabot, W., *CTR Annual Research Briefs 1991*, Stanford Univ./NASA Ames, (1991), 191-205.
- (11) Kleiser, L. and Schumann, U., *Proc. 3rd GAMM Conf. Numer. Methods Fluid Mech.*, (1987), 165-173.
- (12) Werne, J., *J. Comput. Phys.*, **120** (1995), 260-265.
- (13) Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A. and Zang, T., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, (1988), 65-68, Springer-Verlag, Berlin.
- (14) 黒田明慈・笠木伸英, 直接数値シミュレーションによる乱流輸送現象のデータベース構築に関する研究(研究課題番号 02302043), 平成 3 年度科学研究費補助金 [総合研究(A)] 研究成果報告書, (1992), データファイル名: CH 12-PG.WL 2.
- (15) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, **177** (1987), 133-166.
- (16) Moser, R., Kim, J. and Mansour, N., *Phys. Fluids*, **11**-4 (1999), 943-945.
- (17) Morinishi, Y. and Vasilyev, O., *CTR Annual Research Briefs 1998*, Stanford Univ./NASA Ames, (1998), 237-253.