1次元熱伝導逆問題解を用いた熱物性値の推定法*

門出政則^{*1}, 光武雄^{—*1}, 横山弘典^{*2}Estimation of Thermal Property using Analytical Inverse Solution
for one Dimensional Heat ConductionMasanori MONDE^{*3}, Yuichi MITUTAKE and Hironori YOKOYAMA^{*3} Saga University, Dept. of Mechanical Engineering, Honjo 1, Saga City, Saga 840-8502 Japan

A new procedure to estimate thermal diffusivity is developed by using a solution explicitly obtained from an inverse problem of one-dimensional unsteady heat conduction. This method has merit being independent of surface condition and is simpler than existing methods which commonly use a direct heat conduction solution and are subject to a boundary condition. The thermal diffusivity is estimated by using a change in the temperatures including some error at two different points. The values estimated thereby are found to be in good agreement with that for the materials tested. A possibility to estimate thermal diffusivity and heat conductivity at the same time is proposed.

Key Words: Thermal Property, Inverse Problem, Laplace Transformation, Heat Conduction

1. はじめに

固体の熱物性の推定は、一般に固体内の温度変化から推定することになるので基本的には逆問題の1種である。これまで、熱物性の1つである温度伝導率を測定する方法として、1次元非定常熱伝導の解を利用した測定法が広く利用されていると同時にいろいろな測定法の解説⁽¹⁻³⁾がなされている。たとえば、非定常法を用いた様々な測定法として、(1)パルス加熱法⁽⁴⁻⁶⁾、(2)ステップ加熱法⁽⁶⁾、(3)周期加熱法⁽⁷⁾、(4)連続加熱法⁽⁸⁾、(5)任意加熱法^(9,10)など数多くの方法が開発されている。しかし、任意加熱法を除くいずれの測定法も順問題解(解自体は厳密である)を利用しているために、設定した表面条件と測定中の表面条件との差異は測定精度に重大な影響を及ぼすことになる。このことから表面条件の設定や温度測定に熟練を要するほどの細心の注意を払って測定を実施することが要求される。

一方、Alifanov⁽¹¹⁾は、逆問題の解を利用した熱物

性の推定方法を簡単に説明しているが、もし逆問題の解が、十分高い精度で得られるなら表面条件に左右されずに熱物性を容易に推定することが可能となる。

著者ら^(12,13)は、最近1次元非定常逆問題の解法として、ラプラス変換を利用した解析法を提案している。そして、その解法によって得られた近似解が陽に与えられていること、固体内の測定データに対する擾乱に対して高い安定性を持つこと更には測定データの誤差と同程度の精度で表面温度や表面熱流束を予測できるということを報告^(12,13)している。

そこで、本研究では、陽に与えられた逆問題の近似解⁽¹²⁾を利用して、物性値、例えば温度伝導率を求める新しい方法を提案し、その有効性について検討した結果を報告する。なお、この測定法は、任意加熱法^(9,10)と同様境界条件に全く左右されないという点で順問題解を利用した測定法と大きく異なっている。

主 要 記 号

α : 温度伝導率

α_{pre} : 推定の温度伝導率

* 原稿受付 2000年2月23日。

^{*1} 正員, 佐賀大学理工学部 (〒840-8502 佐賀市本庄町1)。

^{*2} 学生員, 佐賀大学大学院。

E-mail: monde@me.saga-u.ac.jp

- a_{true} : 真の温度伝導率
 $f_1(t), f_2(t)$: 測定点 x_1, x_2 での温度変化の関数
 L : 代表(試験片)長さ
 $\min(T/T_0)$: 温度測定器の最小精度
 N : 近似式の次数
 N_s : サンプルング数
 N_{st} : 有効数字の桁数
 $p^2 = s/a$
 q : 熱流束
 s : ラプラス演算子
 T : 温度
 $T_{w,1}, T_{w,2}$: 測定点 x_1, x_2 からの推定表面温度
 T_{exact} : 厳密解温度
 T_0 : 基準温度
 T_w : 表面温度
 t : 時間
 t_n^* : 測定点 x_n までの時間遅れ
 x_n : 表面から温度測定点($n = 1, 2$)までの距離
 λ : 熱伝導率

2. 1次元非定常熱伝導の逆問題解

物性値一定の1次元非定常熱伝導方程式は、平板の場合次のように表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

固体内の初期温度が一様($T=0$ としても一般性を失わないので、これ以降 $T=0$ とする)のとき、式(1)をラプラス変換すると

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - p^2 \bar{T} = 0 \quad (2)$$

となる。式(2)の一般解は次式となる。

$$\bar{T}(x, s) = Ae^{px} + Be^{-px} \quad (3)$$

ここで $p^2 = s/a$ で a は温度伝導率、また、 A, B は積分定数である。

式(3)の定数 A, B を決定するためには、少なくとも物体内の異なる2点 ($x = x_1, x_2, x_2 > x_1 > 0$) での温度が必要である。しかし、 $x = x_2$ での固体内の温度変化が、測定器の最小計測温度以下、すなわち $\operatorname{erfc}(x_2/2\sqrt{at}) \leq \min(T/T_0)$ であるとき、その時刻 t 以前の時刻では、 $x > x_2$ の領域は計測上 $T=0$ と見なされる。従って、この条件下では有限固体であっても半無限固体と見なせるので、 $A = 0$ となる。この結果、固体内のある点での温度が、いま $x=x_1$ で $T(x, t) = T_0 \cdot$

$f_1(t)$ と与えられ、更にその温度が次式で近似されるとする。

$$f_1(t) = \sum_{k=0}^N \frac{b_k}{\Gamma(k/2+1)} (t-t^*)^{\frac{k}{2}} \quad (4)$$

ここで、式(4)の係数 b_k は、例えば測定された温度変化を最小自乗近似することによって決定される。また t^* は、測定点 $x=x_1$ までの時間遅れで、 $\operatorname{erfc}(x_1/2\sqrt{at^*}) = \min(T/T_0)$ として与えられる。

式(4)をラプラス変換後、式(3)に代入し定数 B を決定すると式(3)は次式となる。

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{T_0} = e^{-p(x-x_1)} e^{-st^*} \sum_{k=0}^N b_k / s^{(k/2+1)} \quad (5)$$

表面温度は、式(5)から式(6)となる。

$$\frac{\bar{T}(0, s)}{T_0} = e^{px_1} e^{-st^*} \sum_{k=0}^N b_k / s^{(k/2+1)} \quad (6)$$

式(6)を $s=0$ の近傍で展開した後、逆ラプラス変換すると表面温度は、次式となる。

$$\frac{T_w}{T_0} = \sum_{j=-1}^N E_j (t-t^*)^{\frac{j}{2}} / \Gamma(\frac{j}{2}+1) \quad (7)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 E_{-1} &= \sum_{k=0}^{Nk} b_k e_{k+1}, & j=-1, Nk=N \\
 E_j &= \sum_{k=0}^{Nk} b_{k+j} e_k, & j \geq 0, Nk=N-j \\
 e_k &= \frac{(x_n/\sqrt{a})^k}{k!} & n=1, 2
 \end{aligned}$$

式(7)の係数 E_j の求め方は、文献⁽¹²⁾に詳細に記されている。

式(7)で予測される表面温度は、いかなる境界条件に対しても表面条件がなめらかな変化($t=0$ を除いて、1階微分が連続)のとき、測定温度の有効桁と同程度の精度で与えられることが報告⁽¹²⁾されている。

3. 温度伝導率の推定法

固体内の温度伝導率が一定の場合、 $x = x_1$ と異なる点 ($x = x_2$) の温度変化を用いて式(7)から予測される表面温度は、 $x = x_1$ から予測された表面温度と論理的には一致する筈である。

したがって、温度伝導率が未知であるときには、 $x=x_1$ と x_2 の異なる2点の温度変化から式(7)を用いて推定された表面温度が、一致するように温度伝導率の値を決定すれば良いことになる。すなわち、 $x=x_1$

と x_2 の温度変化から推定された表面温度 $T_{w,1}$ と $T_{w,2}$ が次式を満足するように温度伝導率を決定すればよい。

$$F(a) = \int_{t_1}^{t_2} (T_{w,1}(t, a) - T_{w,2}(t, a))^2 dt \rightarrow 0 \quad (8)$$

ここで、 t_1 は、予測可能最小時刻（文献⁽¹²⁾参照、例えば予測値が厳密解の 99 % 以内で初めて一致したときの時刻と定義すると $at_1/L^2 = 0.01$ とすれば十分である。）、一方、 t_2 は、温度変化が固体の他の端面（ $x = L$ ）に到達するまでの時刻（ $\text{erfc}(L/2\sqrt{at_L}) = \min(T/T_0)$ 以下のある時刻 $t_2 \leq t_L$ （この時刻については 4.3 節で検討）となる。ところで、温度伝導率 a の値は、まだ未知数であるので、実際には適当な推定値を用いて、 t_1, t_L を推定し、式(8)を満足するように繰り返し計算をすることになる。

3.1 近似式と測定温度 測定温度の近似次数は、 $N = 5 \sim 7$ で十分であることが報告⁽¹²⁾されているので、ここでは $N = 5$ の近似式を採用する。

本推定法の妥当性を検討することが主目的であるので、ここでは、対象となる材質の温度を直接測定する代わりに、ある境界条件に対する順問題の解を用いて測定点の温度変化として採用する。採用された温度の精度は、熱電対を用いて温度測定を行う場合を想定すると、2 ～ 3 桁の有効数字であれば十分であろう。有効数字の簡単な表示方法として、(1) 有効数字以下を四捨五入、(2) 有効数字以下の桁にある外乱を含む場合の 2 つの方法が一般的によく用いられる。

(1) 有効数字以下を四捨五入の場合、 $x = x_1$ と x_2 の温度はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{T(x_n, t)}{T_0} = \text{Int}\left(\frac{T_{\text{exact}}(x_n, t)}{T_0} \cdot 10^{N_{sf}} + 0.5\right) / 10^{N_{sf}} \quad n = 1, 2 \quad (9)$$

ここで、 $T_{\text{exact}}(x_n, t)$ はある境界条件に対する厳密解、 N_{sf} は有効数字の桁数を示す。

また、(2) 外乱の不確定値として $[-1, 1]$ の正規乱数（分散 $\sigma = 1$ ）値 ε を用いて、 $N_{sf} = 2$ での測定温度を推定した場合、 $x = x_1$ と x_2 の温度はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{T(x_n, \tau)}{T_0} = \frac{T_{\text{exact}}(x_n, \tau)}{T_0} + 0.005\varepsilon (\sigma = 1) \quad n = 1, 2 \quad (10)$$

ところで、式(9)、(10)を用いて推定される逆問題の解は、同じ有効数字のとき式(10)（式(10)は、 $N_{sf} = 2$ の場合を示す）を用いた方が解の精度が劣化することが報告⁽¹²⁾されているので、ここでも、式(10)を用いて解の精度が良くない推定法から表面温度を推

定することにする。

式(10)で与えられる温度を用いて、式(4)の係数を決定し、更に式(8)の積分を実行した結果は、未知の温度伝導率のみを含んだ陽関数 $F(a)$ となる。従って、この関数値が最小になる a の値は、 $dF(a)/da = 0$ で決定される。なお、 $dF(a)/da$ は、 $(2N+3)$ 個のかなり煩雑な多項式となるが、数値計算結果から $a > 0$ の範囲で $[-\infty, \infty]$ の範囲を単調に増加する関数であることが確認された。この結果、 $dF(a)/da = 0$ の根を数値的に求めることは非常に容易である。

ところで、実際の測定実験では 2 点の温度が測定され、それを基に上記の手順で a の値を決定することになるので、本推定法は、表面条件に全く依存しないという利点がある。

3.2 具体的な計算手順

温度伝導率は、式(8)を用いて、以下の手順で推定される。

- (1) 温度伝導率 a を仮定し、 t_1, t_L を推定する。
- (2) 各点の時間遅れ t_1^*, t_2^* を推定する。
- (3) 順問題の解から測定点 x_1, x_2 の温度変化を求める。
- (4) 各点の温度変化から式(4)の係数 b_k を決定する。
- (5) 式(7)の係数 E_j を計算する。
- (6) $dF(a)/da = 0$ となる a の値を決定する。
- (7) 得られた a の値が、仮定した a の値と一致するまで繰り返し計算をする。

ところで、 t_2 の値は $t_2 < t_L$ であれば良いが、 t_2 が推定値の精度に及ぼす影響については 4.1 節で検討する。

4. 計算結果

逆問題の解析結果⁽¹²⁾によると、 $t > 0$ で表面条件がなめらかに変化する場合、その逆問題解は表面条件を精度よく予測することが報告されている。

そこで、固体内の温度変化として、初期温度一定（ $T = 0$ ）で、固体表面（ $t > 0$ ）が、

- (1) 温度一定（ $T_w/T_0 = 1$ ）のとき、
- (2) 温度が直線的上昇（ $T_w/T_0 = kt$ ）のとき
- (3) 熱流束一定（ $q_w/q_0 = 1$ ）のとき（温度変化は、文献^(13,15)参照）

の 3 つの代表的な境界条件を選定し、その順問題解（厳密解）から得られた温度変化を利用して、温度伝導率を推定することにする。

図 1 は、1 例として銅の表面が表面条件(3)の温度変化を受けたとき、 $dF(a)/da$ 値の変化の様子を示す。図 1 中の a_{true} の値（物性表の値⁽¹⁴⁾）は、真の温度伝導率で、 $a_{\text{pre}} = 1.18 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$ は推定値である。

Fig.1 Value of $dF(a)/da$ vs. a (Case (3))

図1から、 $dF(a)/da = 0$ となる点が1つのみ存在し、この点が温度伝導率 a の推定値となる。

4.1 計測時間とサンプリング点数 必要な測定時間 t_2 は、半無限固体という仮定が成立する時間内 ($t_2 \leq t_L$) であれば論理的には十分であるが、長時間の不必要な測定を避けるために必要最低時間を与えることは工学的に重要な問題である。

今、期待される測定精度が2桁程度である場合、 $\min(T/T_0) = \text{erfc}(L/2\sqrt{at_L}) = 0.01$ となり、そのときの最大測定時間は、 $L/2\sqrt{at_L} = 1.86$ となる。この結果、 $t_L/t_1 = 7.23$ となり、測定可能時間は、予測可能最小時間の約7倍程度となる。

図2は、異なる3つの境界条件に対し、 $x_1 = 2\text{ mm}$ と $x_2 = 5\text{ mm}$ の位置で測定された温度変化を用いて推定された温度伝導率の精度に及ぼす計測時間とサンプリング点数の及ぼす影響を示す。なお、近似解(式(7))は、無次元形で与えられているので、他の物質についても当然同じ結果を与えることになるから、ここでは一例として銅に対する結果をのみ図2に示しておく。

図2(b), (c)から、表面温度が直線的あるいは緩やかに上昇する場合(境界条件(2), (3))、予測精度は、サンプリング点数の影響をほとんど受けず、同じ t_2/t_L の値ではどのサンプリング点数に対してもほぼ一定となっているが、計測時間が短くなると推定値は徐々に劣化している。一方、表面温度が、ステップ状に上昇する場合(境界条件(1))、図2(a)に示されるように短い計測時間に対してサンプリング点数が増加すると予測値は変動しながら大きくずれていく(図中に示されないほど大きくずれている)。しかし、 $0.66 \leq t_2/t_L \leq 1.0$ の計測時間に対しては、全サンプリング点数に対して、予測値は収束している。一方、 $t_2/t_L \leq 0.53$ では、サンプリング点数を増加すると予測値が収束しなくなるのは、測定点での温度変化が最大温度 $T_L(t_L)$ で評価されているので、測定 t_2 時間が短くなると使用された温度変化が小さくなる

ので、測定温度に含まれる誤差 (0.005ϵ) のみが、相対的に増幅されることになる。そのような状況下で、サンプリング点数のみが増加しても誤差のみが逆に増幅されることになるためである。境界条件(2), (3)では、 $t_2/t_L \leq 0.53$ でも、予測値は発散していないが、予測精度は t_2/t_L の減少につれて劣化している。これも、同様に測定温度に含まれる誤差 (0.005ϵ) のみが相対的に増幅されるためである。発散しなかった理由は、温度変化の1階微分が連続であるため、逆問題解の精度が高い^(12, 13)ためである。

図2から、 $0.8 \leq t_2/t_L \leq 1.0$ の計測時間を設定すれば、20点程度のサンプリング点数でも十分な精度であることが判る。

ところで、実際に測定最大時間 t_L を決定するためには、温度伝導率が未知数であるので、大まかな温度伝導率の推定値を用いて算定する必要があるが、1~2回の試行実験で温度伝導率を推定することは可能であろう。

(a) Step increase in temperature (Case (1))

(b) Linear increase in temperature (Case (2))

(c) Step increase in heat flux (Case(3))

Fig.2 Effect of sampling number on accuracy of estimated values (t_2/t_L : $\circ$:0.27, $\bullet$:0.40, $\triangle$:0.53, $\blacktriangle$:0.66, $\square$:0.80, $\blacksquare$:0.93, ∇ :1.0)

4.2 測定位置の影響 図3は、異なる境界条件に対して、 $t_2/t_L = 0.8$, $N_s = 40$, $x_1 = 2$ mm において、測定位置が予測精度に及ぼす影響を示す。なお、 $x_1 = 2$ mm を選定したのは、測定点 x_1 は、出来る限り表面に近い方が近似解の精度は良くなるが、実際に測定を行う場合を想定して選定した。

図3から、もう一方の測定点が表面から遠くなるにつれて予測精度がいずれの境界条件に対しても徐々に劣化していくことが判る。これは、2つの測定点が境界面に近いほど両者の温度変化からの推定値がより正確になるということから当然の結果である。しかし、実際に測定を行う場合、挿入された熱電対などの影響もあることからある程度の間隔を取っておく必要がある。図3から、表面温度が直線的あるいは緩やかに上昇する場合 $x_2 = 10$ mm 程度以下であれば、それほど大きな影響は見られないようである。

図4は、本推定法でいろいろな物質の温度伝導率を境界条件(3)を用いて推定した結果の1例を示す。図4に示されるように、固体の温度伝導率を広い範囲に亘って2~3%以内の精度で十分予測可能であ

Fig.3 Effect of position of measurement on accuracy of predicted values.

Fig.4 Comparison of estimated and actual values. (Case 3: Constant heat flux, $t_2/t_L = 0.8$, $N_s = 40$)

ることが数値実験の結果から明らかになった。

4.3 測定実験への指針 実際の測定実験では、 t_1 は一般に $\text{erfc}(x_n/2\sqrt{at_1}) = \min(T/T_0)$ となる時刻で十分である。また、有限平板に対する逆問題解^(12,13)から表面温度の推定精度に及ぼす測定点の影響を考慮すると測定点は一般に $x_2/L < 0.2$ となるように選定することが望ましい。従って、具体的な t_2 の選定は、時間 $[t_1, t_2]$ で $x = x_2$ の測定点で、十分な温度変化が得られるように設定すればよい。

5. 実験による検証

逆問題の近似解を用いて温度伝導率を推定する具体的な手順を3章で説明した。ここでは、実際に固体内の温度変化を測定することによって温度伝導率を推定した結果について検討する。

5.1 実験装置 図5は、本実験の装置の概略図と試験片の寸法を示す。加熱に使用した熱源は市販のプラジェットヒーターである。試験片内の温度変化を測定するための熱電対が、表面から $x_1 = 2$ mm と $x_2 = 5$ mm の位置（正確な位置は、全測定終了後、試験片を切断して測定）に挿入されている。本実験で使用した熱電対の最小測定分解能は、銅と黄銅については0.06 Kで、ステンレス鋼に対しては0.12 Kである。また、温度測定器の周波数応答は、20 Hz で、サンプリング時間は0.05secとなっている。

5.2 測定点の温度変化 図6は、銅とステンレス鋼試験片の温度変化を無次元時間 (t/t_L , 銅: $t_L = 6.44$ sec, ステンレス鋼: $t_L = 140$ sec) で整理した結果を示す。図6から、ステンレス鋼の測定温度は、測定中大きく温度上昇しているが、一方、銅の温度上昇はそれと比較してかなり小さくなっている。

そして、 $t = t_L$ での x_1 の温度上昇は、ステンレス鋼では、 $T_L - T_i = 180$ K, 銅では、 $T_L - T_i = 6$ Kであった。

Fig.5 Schematic of experimental setup.

Fig.6 Temperature change at two points of $x_1 = 2$ and $x_2 = 5$ mm for Copper, Brass and Stainless steel.

この結果、測定器の最小温度分解能と温度変化 $T_L - T_i$ との比較からステンレス鋼と比較して銅の測定結果には、少なくとも 10 倍以上の不確定誤差が含まれていることになる。また、銅の場合、測定中の外乱が推定精度に大きい影響を及ぼすことになる。

5.3 初期時刻の求め方 数値実験では、 $t = 0$ の時刻は自明であったが、実際の実験では、計測器の測定感度と関連して加熱開始時刻 $t = 0$ の決定は、容易ではないが、以下の手順（図 7 参照）で決定した。

- (1) x_1 の測定点での時間遅れ t^* を $\min\{(T - T_i)/(T_L - T_i)\} = \text{erfc}(x_1/2\sqrt{at^*}) = 0.01$ から求める。
- (2) $\min\{(T - T_i)/(T_L - T_i)\} = 0.01$ との交点を時刻 $t = t^*$ とし、その点を図 7 の点 A とする。
- (3) 測定器で最初に感知された温度と時刻（測定上の零点）の点を点 B とし、点 A と点 B を直線で結んで、 $T = T_i$ となる点を初期時刻 $t = 0$ と定めた。

図 7 は、 $t = 0$ の求め方の概略を示す。なお、本実験での時間のずれは、図 7(b) の方が $t = 0$ をより正確に与えることになるが、測定結果に大きい影響を及ぼすほどではなかったことを記しておく。

初期時刻と測定点での温度変化が与えられると、3.2 節で述べた手順で温度伝導率が推定できる。

5.4 測定結果の検討 図 8 は、銅、黄銅、ステンレス鋼に対して測定された温度変化（図 6 参照）を基に温度伝導率を推定した結果を示す。なお、図中の ε は、 x_1, x_2 の真の値 (0.05 mm の精度で測定、公称 x_1, x_2) に $\varepsilon = 0.1$ mm の不確定誤差を添加したことを示す。図 8 から、実際の測定値から推定された温度伝導率は、銅の値を除いて、推定値は、真の値とよく一致していることが判る。また、推定の精度は、

数値データからの結果とほぼ一致していることが判る。ところで、銅の値が、黄銅やステンレス鋼と比較して測定誤差が大きくなっているのは、熱電対の最小測定精度 0.06 K と最大温度温度上昇の比が $\{0.06/(T_L - T_i)\} \approx 0.01$ すなわち、測定点での温度上昇が 0.06 K 近くで測定器の最小測定分解能近くでの計測時間が長いために、不確定誤差の相対値が他の場合と比較して大きくなったことによるものである。したがって、熱源（本実験では高温空気）からの熱入力、黄銅やステンレス鋼と同様な温度上昇を引き起こす大きさにすればこの問題は解決できる筈である。

5.5 測定点のずれによる誤差 図 8 は、真の測定点に対して、その点が $\varepsilon = \pm 0.1$ mm だけずれたときの推定値に及ぼす影響を示す。

図 8 から、測定位置に 0.1 mm (x_1 の相対誤差は 0.05) のずれが生じると推定精度は約 5 % 程度劣化することが判る。したがって、測定位置についても温度測定と同程度の相対誤差内で行う必要がある。

5.6 従来の測定結果との比較 本測定法で得られた温度伝導率は、銅の場合を除いて約 5 % 以内の誤差であることが、図 8 から明らかになった。ま

Fig.7 Procedure to estimate initial time

Fig.8 Accuracy of estimated value and effect of position of measurement on its accuracy

た、数値実験の予測においても温度伝導率は、約5%以内で予測可能なことが示された。この結果は、従来の測定結果とほぼ同等のレベルにあることが分かった。

5.7 本測定の特徴と留意点 本測定法は、半無限固体近似での測定を行っているため、測定時間は、最大 t_L となる。本測定法は、境界条件に依存しないので従来の測定法（境界条件に依存）と比較して簡便である。サンプリング点数は、測定時間内で30～50点程度で十分である。測定点での温度上昇は、測定時間内で測定器の最小分解能よりも大きい温度上昇に出来るだけ短時間で到達（図7(b)に示めされるように測定開始時刻で到達）することが重要である。予測精度の改善は、近似式の次数の増加（ $N=7\sim9$ 程度まで）と測定精度の改善によって有効数字3桁程度まで可能である。

6. 任意加熱法との比較

従来の測定法の大部分は、順問題解を利用して測定がなされているが、飯田ら^(9,10)によって開発された任意加熱法は、本測定法とかなりの共通点がある。すなわち、飯田ら^(9,10)は、1次元熱伝導の式(1)とその境界条件や初期条件をラプラス変換し、その式(3)の積分定数を測定点の温度変化から決定しているという過程までは本手法と全く同一である。そして、その解を逆ラプラス変換せずに、全ての数値計算処理をラプラス平面上で行っている点が本測定法と異なる点であると同時に、飯田ら⁽⁹⁾の提案した測定法の大きな特徴である。計算処理で必要となる時間 t_{max} とラプラス演算子 s の範囲について、実験から経験的に $8 \leq st_{max} \leq 12$ （ t_{max} :測定時間）という条件⁽⁹⁾を設定している。この設定条件は、あくまでも経験的なもので、その物理的根拠については十分な説明がなされていない。したがって、測定時間 t_{max} の選定が、測定値の誤差に及ぼす影響について検討することが困難であった。一方、本測定法では、測定時間 $t_{max}(=t_L)$ が厳密に与えられている。

7. 付記 熱伝導率の推定法

密度が既知である物質の熱伝導率と比熱は、温度伝導率が求まっていると、いずれか一方を求めればよい。しかし、これらの量は、いずれも熱量に関連する物理量であるので温度の測定だけでは決定する

ことが出来ず、伝熱量（熱流束）、温度勾配あるいは、温度分布のいずれか1つの量を測定する必要がある。

ところで、逆問題解析結果⁽¹²⁾によれば、半無限固体に対する表面熱流束は、次式で与えられること及びその予測値の精度は、温度測定の精度とほぼ同程度であることが報告されている。

$$\Phi_w(\tau) = \sum_{j=-1}^N G'_j (\tau - \tau_1^*)^{j/2} / \Gamma(j/2 + 1) \quad (11)$$

ここで、係数 G'_j の詳細は文献⁽¹²⁾に記されている。

もし、熱流束が温度の測定精度と同程度で測定されているとすると式(4)に示される温度変化から決定される熱流束に対する式(11)を利用して次式から熱伝導率を決定することが出来る。そこで、式(11)を熱伝導率が陽に与えられるように変形（有次元化）すると、次式のようになる。

$$\frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} q(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=-1}^N G_j (t - t_1^*)^{j/2} / \Gamma(j/2 + 1) dt} \quad (12)$$

ここで、

$$G_{-1} = \sum_{k=0}^{Nk} b_k e_k, \quad j = -1, Nk = N$$

$$G_j = \sum_{k=0}^{Nk} b_{k+j+1} e_k, \quad j \geq 0, Nk = N - j$$

例えば、表面熱流束が、時間と独立に一定である場合は、次式から容易に熱伝導率を求めることができる。

$$\frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \frac{q_o(t_2 - t_1)}{\sum_{j=-1}^N G_j \frac{(t_2 - t_1^*)^{j/2+1} - (t_1 - t_1^*)^{j/2+1}}{\Gamma(j/2 + 2)}} \quad (13)$$

一方、熱流束が与えられていない場合には、基準となる有限固体内の温度変化から熱流束を推定⁽¹²⁾し、それを式(12)に代入すればよい。

熱伝導率と温度伝導率の同時計測法については、今後検討する予定である。

8. まとめ

1次元熱伝導逆問題解を用いた温度伝導率の推定方法を提案し、以下の結果を得た。

1. 温度伝導率の推定値は、2～3%以内の誤差で真の値と一致した。
2. 推定された温度伝導率の精度は、温度変化の測定精度とほぼ同程度である。

3. 本測定法は表面の境界条件に依存しないという特徴がある.
4. 測定時間とサンプリング点数を明らかにした.
5. 従来の測定法と比較して測定が簡便である.

参 考 文 献

- (1) 小林清志, 非定常法による熱定数の迅速測定法, 機誌, 77-668, (1974), pp.754-761.
- (2) 小林清志, ステップ加熱非定常法による熱定数の迅速測定法, 機誌, 81-714, (1978), pp.452-457.
- (3) 岡田昌志, 片山功蔵, 堀口博, 繰り返し計算による熱物性値の同時測定法, 機誌, 79-688, (1976), pp.247-255.
- (4) 小林清志, 小林辰志, 方形波パルス加熱による熱定数測定法の研究, 機論, 46-407B, (1980), pp.1318-1326.
- (5) 姫野修廣, 日向滋, 梁取美智雄, 非定常加熱による熱物性の簡易測定, 機論, 58-545B, (1992), 187-192.
- (6) 小林清志, 高野孝義, 熱定数迅速測定法の自動化に関する研究, 機論, 48-434B, (1982), pp.2062-2069.
- (7) 山田悦郎, 谷口博, 浜出信正, 真鍋幸弘, 分散系混合物の有効温度伝導率, 機論, 56-521B, (1990), pp.155-160.
- (8) 片山功蔵, 岡田昌志, 吉田和道, 連続加熱による温度伝導率の測定法, 機論, 37-298, (1971), pp.1195-1203.
- (9) 飯田嘉宏, 重田治彦, 任意加熱による熱物性値の測定法に関する研究 (第1報), 機論, 47-415B, (1981), pp.470-477.
- (10) 飯田嘉宏, 重田治彦, 任意加熱による熱物性値の測定法に関する研究 (第2報), 機論, 47-424B, (1981), pp.2324-2332.
- (11) Alifanov, O. M., Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, (1994) pp.25.
- (12) 門出政則, 光武雄一, 志岐隆浩, 西本友哉, ラプラス変換を用いた1次元熱伝導逆問題の解析的解法, 機論, 66-642B, (2000), pp.519-527.
- (13) 門出政則, 有馬博史, 光武雄一, ラプラス変換を用いた1次元熱伝導逆問題の解析的解法 (第2種, 第3種境界値問題への適用), 機論, 66-647B, (2000), pp.1780-1786.
- (14) 伝熱工学資料 (改訂3版), 日本機械学会編, (1976), 293-297.
- (15) Carslaw, H. S. and Jaeger J. C., Conduction of Heat in solids, Oxford Univ. Press, (1959), 26, 82.