鉛直二重円管の自然対流熱伝達*

高橋 幸紀^{*1}, 森川 卓哉^{*2}
原田 豊^{*3}, 服部 直三^{*4}

Natural-Convective Heat-Transfer in Uniformly Heated Vertical Annuli

Koki TAKAHASHI, Takuya MORIKAWA,
Yutaka HARADA, and Naozo HATTORI^{*5}^{*5} Science University of Tokyo, Dept. of Mechanical Engineering,
Yamazaki 2641, Noda-shi, Chiba, 278-8510 Japan

Natural-convective heat-transfer in vertical concentric pipe annuli is investigated both numerically and experimentally for a fluid of Prandtl number of 0.7. Calculations for three cases different in the heating condition for pipes (heated inner pipe, heated outer pipe, heated both pipes) are made of laminar flows for varying the diameter ratio of inner to outer pipe d_i/d_o from 0.2 to 0.8. For each case, the length of thermal entrance region x/b is well correlated with the modified Grashof number Gr^* and the ratio of length to clearance of annulus L/b at the Grashof numbers $Gr^*=10^2\sim5\times10^5$. Local Nusselt numbers at thermally fully-developed region show some constant values dependent on the diameter ratio d_i/d_o , regardless of Gr^* and L/b . Average Nusselt numbers for the thermal entrance region are also independent of Gr^* and L/b .

Key Words: Heat Transfer, Natural Convection, Vertical Pipe Annulus, Thermal Entrance Region, Thermally Fully-Developed Region, Numerical Computation

1. ま え が き

近年、電子機器等には小形化・省電力化が求められるようになり、これらの冷却に自然対流を取り入れたものが多く見られるようになった。一方、高速増殖炉(FBR)の安全性にかかわる炉心および使用済み核燃料の崩壊熱除去等にも自然対流の利用が必要とされている。しかし、自然対流は幾何学的形状、加熱条件等によりさまざまな流れの様相を示すため、機器設計にあたっては詳細な検討が必要である。

これまで熱交換器の基本的な幾何学的形状である鉛直円管、鉛直平行平板の自然対流について解析および実験的研究がなされているが、それらの多くは壁温一様に対するものである。一方、熱流束一様については、数値解析により平行平板の非対称加熱の自然対流を扱った宮武・藤井⁽¹⁾の研究、円管、平行平板に対する相原・円山⁽²⁾の物性値の温度依存性を考慮した数値解析など、がある。また、鉛直二重円管についての研究

も Barrow ら⁽³⁾、Maruyama⁽⁴⁾ によって行われている。Barrow らは管径比 0.91 に付き、空気 of 自然対流に対する数値計算を熱流束一様のもとに調べ、平均ヌッセルト数、流量を算出した。Maruyama は流体の熱物性学特性を考慮し、内外管壁の一様温度条件下で自然対流の解析を行っている。

本研究では、三つの管壁加熱条件(内管加熱、外管加熱、内外管加熱)につき、鉛直二重円管内の自然対流を数値計算により系統的に調べた。さらに、内管加熱については実験も行い、数値計算と比較・検討した。

記 号

A: 流路断面
b: 内外管のかんげき
 C_p : 比熱
 d_i : 内管外径
 d_o : 外管内径
 d_i/d_o : 管径比
g: 重力の加速度
 Gr^* : 修正グラスホフ数 $= g\beta q_w b^4 / \lambda \nu^2$
L: 二重円管の長さ (= 加熱部長さ)
 Nu_i : 内管の局所ヌッセルト数
 $= q_w b / \lambda (T_{wi} - T_b)$

* 原稿受付 2000 年 5 月 15 日。

^{*1} 学生員, 東京理科大学大学院 (〒278-8510 野田市山崎 2641)。^{*2} 正員, 三菱電機(株) (〒530-0003 大阪市北区堂島 2-2-2)。^{*3} (株)東芝 (〒247-8585 横浜市栄区笠間町 1000-1)。^{*4} 正員, 東京理科大学理工学部。

E-mail: hattori@rs.noda.sut.ac.jp

Nu_o : 外管の局所ヌッセルト数

$$= q_w b / \lambda (T_{wo} - T_b)$$

Nu' : 局所ヌッセルト数 $= q_w b / \lambda (T_w - T_a)$

P : 圧力

Pr : プラントル数

q_w : 管壁熱流束

$$\tilde{Q}: \text{無次元流量} = \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_o} 2\pi \tilde{r} \tilde{v} d\tilde{r}$$

r, x : r, x の円筒座標系

t : 時間

T : 温度

T_a : 二重円管の入口温度

$$T_b: \text{混合平均温度} = \int \rho C_p v T dA / \int \rho C_p v dA$$

T_w : 管壁温度

u, v : r, x 方向の速度成分

α : 温度伝導率

β : 体膨張率

λ : 熱伝導率

ν : 動粘性係数

ρ : 密度

添字

i : 内管

o : 外管

w : 管壁

2. 実験装置

図1に実験に使用した二重円管試験部を示す。二重円管は耐熱塩化ビニルパイプの外管(内径 $\phi 50$ mm)①と加熱部のステンレス製内管(外径 $\phi 32$ mm)⑤から構成され、全長1000 mmである。加熱部は全長1000 mmのベークライト丸棒②に電熱線($\phi 0.5$ mm, 銅・

Fig. 1 Test section

ニッケル線)⑨を一樣に巻き、それをステンレス管内に挿入したものである。ステンレス管との電気的絶縁を保つため、電熱線の周囲にはガラステープ④が巻いてある。ステンレス管の外壁面には表面温度測定用の熱電対($\phi 0.1$ mm, 銅-コンスタンタン)⑧が管軸方向の50 mm間隔に、またステンレス管の両端から管軸方向50 mmの位置には周方向90°間隔の4箇所にそれぞれ取付けてある。また、二重円管に流入する空気温度を測定するため、管入口近傍にも熱電対⑦を取付けた。二重円管の周囲は外部への熱損失を防ぐため断熱材で被った。

一方、自然対流による流体の流量を求めるために、二重円管の出口部に流量測定装置⁽⁵⁾を設置した。実験では、空気を作動流体として内管を加熱、外管を断熱した場合につき、自然対流の流量および管軸に沿った局所ヌッセルト数 Nu_i, Nu_o を求めた。

3. 数値計算

図2に鉛直二重円管における自然対流の解析モデルを示す。計算では、二重円管内の自然対流を軸対称層流流れと仮定し、 r, x の円筒座標系を用いる。無次元量

$$\tilde{r} = \frac{r}{b}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{b}, \quad \tilde{u} = u \left(\frac{b}{a} \right), \quad \tilde{v} = v \left(\frac{b}{a} \right),$$

$$\tilde{t} = t \left(\frac{a}{b^2} \right), \quad \tilde{p} = p \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^2,$$

$$\tilde{T} = \frac{T - T_a}{T_{\text{ref}} - T_a}, \quad T_{\text{ref}} = \frac{|q_w|b}{\lambda} + T_a$$

を用い基礎方程式を無次元化すると、連続の式、運動方程式およびエネルギー方程式はそれぞれ次のように表すことができる。

連続の式

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{u})}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{x}} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Fig. 2 Analytical model

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \\ = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} + Pr \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right\} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \\ = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + Pr \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \right\} + Gr^* Pr^2 \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $Gr^* = g\beta q_w b^4 / \lambda \nu^2$ 、 $Pr = \nu / \alpha$ はそれぞれ修正グラスホフ数、プラントル数である。また、運動方程式の浮力項には Boussinesq 近似を適用し、浮力項に含まれる以外の特性値は一定とした。

式(1)～(3)を解く境界条件は、二重円管の内外管壁において次のように与えた。

(a) 内管加熱

$$\text{内管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = -1$$

$$\text{外管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = 0$$

(b) 外管加熱

$$\text{内管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = 0$$

$$\text{外管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = 1$$

(c) 内外管加熱

$$\text{内管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = -1$$

$$\text{外管壁: } \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = 1$$

一方、二重円管の上流・下流側には、自由流入、自由流出の境界条件を用いる。すなわち

$$\text{流入側: } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = 0, \tilde{T} = 0$$

$$\text{流出側: } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = 0, \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

二重円管の内外管の管軸方向における局所ヌッセルト数 Nu_i 、 Nu_o はそれぞれ次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} Nu_i &= \frac{q_w b}{\lambda (T_{wi} - T_b)} = \frac{1}{\tilde{T}_{wi} - \tilde{T}_b} \\ Nu_o &= \frac{q_w b}{\lambda (T_{wo} - T_b)} = \frac{1}{\tilde{T}_{wo} - \tilde{T}_b} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 T_b は流体混合平均温度で

$$T_b = \frac{\int \rho C_p v T dA}{\int \rho C_p v dA}$$

である。また、平均ヌッセルト数 $\overline{Nu_i}$ 、 $\overline{Nu_o}$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \overline{Nu_i} &= \frac{1}{x} \int_0^x Nu_i dx \\ \overline{Nu_o} &= \frac{1}{x} \int_0^x Nu_o dx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表す。一方、自然対流による流体の流量 $\tilde{Q}$ は

$$\tilde{Q} = \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_o} 2\pi \tilde{r} \tilde{v} d\tilde{r} \quad \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる。

図2に示すように、計算領域は環状部とその上流・下流側に長さ L 、半径方向に外管から長さ $3b$ をとった範囲からなる。この広い領域につき数値計算を行ったが、計算には不等間隔格子を用い、二重円管の環状部および出入口部で格子点が密に、それらの領域から離れるに伴い粗になるようにした。

計算では、まず基礎方程式(1)～(3)および境界条件(4)を離散化し、それらを差分方程式に変換する。離散化では圧力項に風上差分、対流項に Partial Donor、拡散項に中心差分を、また、流れ場の計算では MAC 解法に属する HSMAC 法を、圧力ポアソン方程式は SOR 法を用いて解いた。計算は(a)内管加熱、(b)外管加熱、(c)内外管加熱につき、管径比 $d_i/d_o = 0.2, 0.5, 0.64, 0.8$ 、二重円管の長さ(加熱部長さ) $L = 500, 1000 \text{ mm}$ のそれぞれの組合せに対し、グラスホフ数 Gr^* を $10^2 \sim 5 \times 10^5$ にわたって変え、行った。

4. 計算結果

図3は、管軸方向の流体混合平均温度 $\tilde{T}_b$ と管壁温

Fig. 3 Axial distributions of wall and fluid temperatures

Fig. 4 Radial distributions of velocity and temperature

Fig. 5 Relation of length of thermal entrance region with Grashof number

度 $\tilde{T}_{wi}$ の計算結果の一例を、内管加熱について示したものである。図3から、 $\tilde{T}_{wi}$ は二重円管の入口から徐々に増加するが、ある距離より下流では $\tilde{T}_b$ にほぼ平行な直線になることがわかる。ここで、 $\tilde{T}_{wi}$ が $\tilde{T}_b$ に平行な直線になった範囲を温度の発達した領域（発達領域）、それより上流側を温度助走区間と呼ぶことにする。図3に対応する半径方向の速度分布と温度分布を図4に示す。図4から、速度分布は二重円管の入口近傍で急激に変化するが、下流に向かうに伴いその

Fig. 6 Relation of length of thermal entrance region with Grashof number

変化は小さくなり曲線のピークは内管壁のほうに移動するのがわかる。一方、温度分布は速度分布に比べて曲線の形の変化は小さく、ある距離より下流では同じ形の曲線を示すようになる。この範囲は図3の発達領域に対応している。

図5は温度助走区間の長さ x/b を修正グラフホフ数 Gr^* と二重円管の長さ L/b の積、 $Gr^*(L/b)$ に対して示したものである。図5から、温度助走区間の長さ x/b は Gr^* と L/b を用いてよく整理ができ、管径比 d_i/d_o によらないことがわかる。図5は内管加熱の結果で、外管加熱、内外管加熱についても同様の整理ができる。三つの加熱条件のそれぞれにつき、温度助走区間の長さ x/b を示したものが図6で、図6の直線は次式で考えられる。

内管加熱

$$x/b = 0.09 \{Gr^*(L/b)\}^{0.45} \\ 7.8 \times 10^2 \leq Gr^*(L/b) \leq 2.5 \times 10^7$$

外管加熱

$$x/b = 0.10 \{Gr^*(L/b)\}^{0.45} \\ 7.8 \times 10^2 \leq Gr^*(L/b) \leq 1.3 \times 10^7 \quad \dots\dots\dots (8)$$

内外管加熱

$$x/b = 0.59 \{Gr^*(L/b)\}^{0.45} \\ 3.1 \times 10^3 \leq Gr^*(L/b) \leq 1.3 \times 10^5$$

図6から、温度助走区間の長さ x/b は内管加熱、外管加熱、内外管加熱の順に大きな値を示すことがわかる。

発達領域における局所ヌッセルト数 Nu_i を内管加熱につき図7に示す。図7(a)において、それぞれの管径比 d_i/d_o に対し Nu_i は Gr^* に関係なくほぼ一定値を示すことがわかる。図7(a)には Lundberg⁽⁶⁾ の層流域における強制対流の解析解も示してあるが、こ

Fig. 7 Local Nusselt number at thermally fully-developed region

Fig. 8 Average Nusselt number for thermal entrance region

れらは自然対流の計算値より小さな値を示している。図7(b)は管径比 d_i/d_o の影響を加味したもので、 Gr^* に関係なくよく整理できることがわかる。図7は $L=500\text{ mm}$ についてであるが、 $L=1\,000\text{ mm}$ に対してもまったく同じ整理ができる。したがって、発達領域の局所ヌッセルト数 Nu_i , Nu_o は、 L/b に関係なくそれぞれの加熱条件につき、次式で表せる。

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{内管加熱} \\
 Nu_i(d_i/d_o)^{0.28} = 3.14 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8 \\
 \text{外管加熱} \\
 Nu_o(d_i/d_o)^{-0.06} = 3.12 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8 \\
 \text{内外管加熱} \\
 Nu_i(d_i/d_o)^{0.80} = 5.59 \\
 Nu_o(d_i/d_o)^{-0.35} = 5.59 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8
 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

温度助走区間における平均ヌッセルト数 $\overline{Nu}_i$ と修正グラスホフ数 Gr^* の関係を内管加熱につき図8に示す。図8から、 $\overline{Nu}_i$ は発達領域のものと同様に Gr^* に対してほぼ一定値を示すことがわかる。また、これらの値は対応する発達領域の同一加熱条件のものより若干大きい。それぞれの加熱条件につき、温度助走区

Fig. 9 Mass flow rate due to natural convection

間における平均ヌッセルト数 $\overline{Nu}_i$, $\overline{Nu}_o$ は L/b に関係なく次式で表せる。

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{内管加熱} \\
 \overline{Nu}_i(d_i/d_o)^{0.26} = 3.71 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8 \\
 \text{外管加熱} \\
 \overline{Nu}_o(d_i/d_o)^{-0.09} = 3.89 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8 \\
 \text{内外管加熱} \\
 \overline{Nu}_i(d_i/d_o)^{0.72} = 5.70 \\
 \overline{Nu}_o(d_i/d_o)^{-0.40} = 5.85 \\
 0.2 \leq d_i/d_o \leq 0.8
 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

Fig. 10 Comparison of values of numerical computation with those of experiment

Fig. 11 Comparison of numerical values for annulus with those of parallel plates

図9は、自然対流の流量 $\tilde{Q}$ を管径比 d_i/d_o 、二重円管の長さ L/b を導入して整理したものである。図9は内管加熱について示してあるが、外管加熱、内外管加熱についても同様の整理ができ、それらの相関式は次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \text{内管加熱} \\ \tilde{Q} &= 1.73 Gr^{*0.43} (L/b)^{0.82} (d_i/d_o)^{1.03} \\ \text{外管加熱} \\ \tilde{Q} &= 1.74 Gr^{*0.44} (L/b)^{0.81} (d_i/d_o)^{0.60} \\ \text{内外管加熱} \\ \tilde{Q} &= 4.18 Gr^{*0.45} (L/b)^{0.67} (d_i/d_o)^{0.90} \\ 10^3 &\leq Gr^* \leq 5 \times 10^5, \quad 7.8 \leq L/b \leq 2.5 \times 10^2, \\ 0.2 &\leq d_i/d_o \leq 0.8 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

二重円管の長さ L/b および管径比 d_i/d_o を一定にすると、同一 Gr^* 値に対しては内管加熱、外管加熱、内外管加熱の順に流量 $\tilde{Q}$ は大きくなる。このように、内外管加熱に対する流量 $\tilde{Q}$ が内管加熱、外管加熱に比べかなり大きな値を示すが、これは図6の温度助走

区間の長さ x/b の値が大きいのに対応している。

次に、本計算値を実験値および鉛直平板に対する数値計算値と比較・検討する。局所ヌッセルト数 Nu_i , Nu_o の計算値と実験値を比較したものが図10で、(a), (b)はそれぞれ管壁温度と混合平均温度、管壁温度と二重円管の入口温度に基づく局所ヌッセルト数を表すが、いずれの場合も計算値と実験値はよい一致を示している。一方、二重円管に対する本計算値と平行平板の数値計算値との比較を図11に示す。図11(a)は二重円管の内管加熱および外管加熱の計算値と平行平板の片側加熱の値⁽¹⁾と、図11(b)は二重円管の内外管加熱の計算値を平行平板の両側加熱の値⁽²⁾とそれぞれ比較したもので、いずれの場合も曲率の影響により二重円管のものが若干大きな値を示していることがわかる。

5. 結 論

鉛直二重円管の三つの加熱条件(内管加熱、外管加熱、内外管加熱)につき自然対流解析を行い、次のよう

な結論を得た。

件につき導出した。

(1) 温度助走区間の長さ x/b を与える相関式をそれぞれの加熱条件に対して導出した。

(2) 発達領域における局所ヌセルト数は、修正グラスホフ数 Gr^* 、二重円管の長さ L/b によらず一定で、管径比 d_i/d_o のみに依存する。

(3) 温度助走区間における平均ヌセルト数は、修正グラスホフ数 Gr^* 、二重円管の長さ L/b によらず一定で、管径比のみに依存する。

(4) 流量 $\bar{Q}$ を与える相関式をそれぞれの加熱条

文 献

- (1) 宮武修・藤井哲, 化学工学, **37**-8 (1973), 852-854.
- (2) 相原利雄・円山重直, 機論, **51**-461, B(1985), 361-364.
- (3) Barrow, H., ほか 2 名, *Proc. 5th Int. Heat Transf. Conf.*, **3**(1974), 59-63.
- (4) Maruyama, S., *JSM E Int. Ser. II*, **31**-2 (1988), 276-282.
- (5) 高橋幸紀・ほか 2 名, 機論, **66**-650, B(2000), 2748-2751.
- (6) Lundberg, R. E., ほか 2 名, *Int. J. Heat Mass Transf.* **6** (1963), 495-529.