衝撃波による固体内の応力波形成の研究*

高野 泰 斉^{*1}, 湯 澤 修^{*2}
水 尻 洋 介^{*3}, 後 藤 知 伸^{*1}

Study for Stress Wave in Solid Induced by Shock Wave

Yasunari TAKANO^{*4}, Osamu YUZAWA,
Yousuke MIZUSIRI, Tomonobu GOTO^{*4} Dept. of Mechanical Engineering, Tottori University, Koyama, Tottori, 680-8552 Japan

Stress waves induced in elastic solid models by shock waves were studied experimentally and theoretically. For shock-tube experiments, several kinds of solid models were made of transparent acrylic resin and shock waves at approximately Mach 3 were propagated to the models in stationary argon. The schlieren method with a spark light source were employed to visualize shock waves outside and stress waves inside the model. In the schlieren snap-shot photographs, not only shock waves around the models but also stress waves inside the models were observed. Numerical simulations were carried out for shock waves as well as stress waves employing the finite volume method based on the Godunov algorithm. Good agreement was obtained between the experiments and the simulations.

Key Words: Elastic Wave, Elastodynamics, Finite Volume Method, Gasdynamics, Schlieren Method, Shock wave, Shock Tube, Stress Wave

1. は じ め に

衝撃波が固体(弾性体)に衝突すると、衝撃波の反射によって固体表面の圧力が急激に上昇するので、固体表面から内部に応力波が形成される。固体の応力波伝播現象は体外衝撃波結石破碎術、超音波非破壊検査、地震学などに関係し、興味深いテーマである。等方性固体においてさえ、疎密波(縦波)とせん断波(横波)が固体内部を異なる速度で進行し、さらにレイリー波(表面波)が固体表面を伝播する。また、この3種類の応力波が表面で反射すると波動のモードが変化し、応力波のパターンが複雑なものになる。

これまでに、固体内部の応力波が差分法⁽¹⁾、特性曲線法⁽²⁾やCIP法⁽³⁾によって数値解析されている。実験的には、光弾性法⁽⁴⁾やシュリーレン法⁽⁵⁾によって応力波の可視化が行われた。また、応力波の計測によって衝撃風洞の推力を測定する方法が提案されている⁽⁶⁾。

著者らは、従来から衝撃波により弾性体内部に誘起される応力波の研究を行ってきた。弾性力学方程式を数値計算するためのGodunov法に基づく有限体積法

の計算法を開発し⁽⁷⁾、気体力学方程式と弾性力学方程式を数値計算することにより衝撃波により弾性体内部に誘起される応力波のシミュレーションを行った⁽⁸⁾。また、弾性力学方程式と液体モデル方程式を同時に数値計算することによって、衝撃波と液体中の弾性体との相互作用のシミュレーションも行った⁽⁹⁾。

本研究では、これまで行ってきたシミュレーションで予測される応力波伝播現象に対して、衝撃波管を用いた実験を行い、実験とシミュレーションの結果を比較した。実験では、固体モデルとして透明な固体であるアクリル樹脂のブロックを用いた。シュリーレン法を利用して、固体モデルまわりの衝撃波と固体モデル内部の応力波を可視化し、瞬間写真撮影を行った

2. 実験装置および方法

実験には無隔膜衝撃波管装置⁽¹⁰⁾を使用した。装置の概略を図1に示す。内径40mmの低圧部に、20mm×10mmの矩形断面のクッキーカッターを介して観測部が取り付けられているが、観測部分で20mm×10mmの矩形断面の一樣流路が開き角20度で幅10mmの拡大流路へと移行する。

固体モデルとして一辺10mmの正方形断面の3種類のアクリルブロックを用意し、入射衝撃波の平面部分が拡大流路内で固体モデルに衝突するように観測部に

* 原稿受付 2000年6月23日。

^{*1} 正員, 鳥取大学工学部機械工学科(☎680-8552 鳥取市湖山町南4-101)。^{*2} 鳥取大学大学院。^{*3} 准員, (株)タカヤ(☎715-0024 井原市高尾町3-7-7) [元: 鳥取大学大学院]。

E-mail: takano@mech.tottori-u.ac.jp

Fig. 1 Schematic diagram of experimental arrangement.

設置した。マッハ数3程度の衝撃波を、圧力8kPaのアルゴンを注入した低圧部に入射させて実験を行った。

シュリーレン法の光源として発光時間が50ns程度のナノスパーク⁽¹¹⁾を用いることによって、固体モデルの外側の気体領域の衝撃波と内側の応力波を可視化し、瞬間写真撮影を行った。光学的な配置も図1に示しているが、ナノスパークSの光線を、焦点距離 $f_0=50\text{mm}$ のレンズ L_0 によって集光し、直径2mmのピンホールHを通過させることにより点光源に近づける。焦点距離 $f_1=150\text{mm}$ のレンズ L_1 により平行光線とし、幅10mmの観測部を通過させる。焦点距離 $f_2=500\text{mm}$ のレンズ L_2 によってナイフエッジKに集束させ、観測部から約2mの位置の暗室内に置かれたフィルムに像を結ばせる。

3. 数 値 解 析

固体モデルまわりの衝撃波と固体モデル内部の応力波の可視化実験と比較するためにシミュレーションを行った。その方法について述べる。はじめに、気体力学シミュレーションを行い、剛体と仮定した固体モデルまわりに発達する流れ場を計算し、固体モデル表面の圧力履歴をコンピューターにファイルとして保存する。つぎに、固体表面の圧力履歴を境界条件として用いることによって、固体(弾性体)内部に形成される応力波の弾性力学シミュレーションを実行する。

気体力学および弾性力学に対する2次元基礎方程式は次の保存形式で表わされる。

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial G_k}{\partial y} = 0, \quad k = g \text{ or } s \quad (1)$$

ここで、添字 $k = g$ は気体力学方程式を、 $k = s$ は弾性力学方程式を示す。

気体力学方程式の保存量ベクトル Q_g と流束ベクトル F_g, G_g は、つぎのように書ける。

$$Q_g = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, E]^T \quad (2)$$

$$F_g = [\rho v_x, \rho v_x^2 + p, \rho v_x v_y, v_x(E + p)]^T \quad (3)$$

$$G_g = [\rho v_y, \rho v_x v_y, \rho v_y^2 + p, v_y(E + p)]^T \quad (4)$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (5)$$

ここで、 ρ は気体の密度、 v_x および v_y はそれぞれ流速の x 成分および y 成分である。また、 E はエネルギー密度、 p は圧力である。

弾性力学方程式の保存量ベクトル Q_s と流束ベクトル F_s, G_s は、つぎのように書ける。

$$Q_s = [\rho_s u_x, \rho_s u_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}]^T \quad (6)$$

$$F_s = [\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \rho_s c_1^2 u_x, \rho_s c_2^2 u_y, \rho_s c_3^2 u_x]^T \quad (7)$$

$$G_s = [\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \rho_s c_3^2 u_y, \rho_s c_2^2 u_x, \rho_s c_1^2 u_y]^T \quad (8)$$

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_s} \quad (9)$$

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho_s} \quad (10)$$

$$c_3 = \sqrt{\lambda/\rho_s} \quad (11)$$

ここで、 ρ_s は固体の密度、 u_x および u_y はそれぞれ変位速度の x 成分および y 成分である。また、 σ_{xx}, σ_{yy} はそれぞれ x 方向、 y 方向の圧縮引張応力で、 σ_{xy} はせん断応力である。 λ, μ はLamé定数である。そして、 c_1 と c_2 はそれぞれ疎密波とせん断波の速度となる。

式(1)を、図2に示すような体積要素 $c_{i,j}$ で積分して、次式を得る。

$$A_{i,j} \frac{dQ_{k,i,j}}{dt} + L(Q_{k,i,j}) = 0 \quad (12)$$

$$L(Q_{k,i,j}) =$$

$$F_{k,n,i+\frac{1}{2},j} \Delta s_{i+\frac{1}{2},j} - F_{k,n,i-\frac{1}{2},j} \Delta s_{i-\frac{1}{2},j} \\ + F_{k,n,i,j+\frac{1}{2}} \Delta s_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{k,n,i,j-\frac{1}{2}} \Delta s_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

ここで、 $Q_{k,i,j}$ は時間 t における保存量ベクトル Q_k の体積要素 $c_{i,j}$ にわたる平均値であり、 $A_{i,j}$ は要素 $c_{i,j}$ の面積を示す。さらに、 $\Delta s_{i+1/2,j}$ は要素 $c_{i,j}, c_{i+1,j}$ の間の境界の距離を、また、 $\Delta s_{i,j+1/2}$ は要素 $c_{i,j}, c_{i,j+1}$ の間の境界の距離を示す。

Fig. 2 Schematic diagram of a volume cell in 2-dimensional simulation.

$F_{kn,i+1/2,j}$ と $F_{kn,i,j+1/2}$ はそれぞれ $\Delta s_{i+1/2,j}$ と $\Delta s_{i,j+1/2}$ の要素境界に対する流束ベクトルであり、 $F_{kn} = F_k \cos \theta + G_k \sin \theta$ で表される。ここで、 $\cos \theta$, $\sin \theta$ は、図 2 に示すように、要素境界に対する法線方向の方向余弦である。

式 (12) の時間積分について、本研究ではつぎに示すような 2 段階 Runge-Kutta 法を採用する。

$$A_{i,j} \frac{Q_{k,i,j}^{n+1/2} - Q_{k,i,j}^n}{\Delta t/2} = L(Q_{k,i,j}^n) \quad (14)$$

$$A_{i,j} \frac{Q_{k,i,j}^{n+1} - Q_{k,i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = L(Q_{k,i,j}^{n+1/2}) \quad (15)$$

ここで、 Δt は時間刻み幅であり、上添え字は時間刻みを示す。

有限体積スキームの要素境界における流束ベクトル F_{kn} は要素境界の両側の保存量から決定する。本研究では、気体力学方程式に対しては Roe スキーム⁽¹²⁾によって求めた。また、弾性力学方程式に対しては、Godunov のアルゴリズム⁽¹³⁾に基づいて筆者らが開発した方法⁽⁷⁾によって求めた。

なお、数値流束の空間精度を向上させるために、MUSCL 法を採用し、要素境界の両側における保存量は次式により求めている⁽¹⁴⁾。

$$Q_{j+\frac{1}{2}L} = Q_j + \left\{ \frac{s}{4} [(1 - \kappa s) \Delta^- + (1 + \kappa s) \Delta^+] \right\}_j \quad (16)$$

$$Q_{j+\frac{1}{2}R} = Q_{j+1} + \left\{ \frac{s}{4} [(1 - \kappa s) \Delta^+ + (1 + \kappa s) \Delta^-] \right\}_{j+1} \quad (17)$$

$$\Delta_j^+ = Q_{j+1} - Q_j, \quad \Delta_j^- = Q_j - Q_{j-1} \quad (18)$$

$$s = \frac{2\Delta^+ \Delta^- + \epsilon}{(\Delta^+)^2 + (\Delta^-)^2 + \epsilon}, \quad \epsilon = 10^{-6} \quad (19)$$

ここで、 $\kappa = 0$ とすると中心差分の 2 次精度に、 $\kappa = 1/3$ とすると風上差分の 3 次精度になるが、本研究では、 $\kappa = 1/3$ を用いた。

4. 結果と議論

衝撃波管の代表的な実験条件を表 1 に示す。ここで、 p_1 と p_4 は低圧部に注入するアルゴンの圧力と高圧部に注入するヘリウムの圧力である。 u_s はこの条件で得られる入射衝撃波の速度である。 p_2 は入射衝撃波背後の圧力を、 p_5 は反射衝撃波背後の圧力を示す。また、 M_s は衝撃波マッハ数である。

Table 1 Shock-Tube Condition

$p_1(\text{Ar})$	$p_4(\text{He})$	u_s
8 kPa	0.6 MPa	991 m/s
$p_2(\text{Ar})$	$p_5(\text{Ar})$	M_s
0.12 MPa	0.38 MPa	3.0

Table 2 The Properties of Acrylic Block

ρ_s	ν	c_1	c_2
1056 kg/m ³	0.33	2.7 km/s	1.35 km/s

Fig. 3 Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

Fig. 4 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

4.1 平面頭部を有する固体モデル 一辺 10mm の正方形断面のアクリルブロックの頭部を平面に加工した固体モデルを用いた。

図 3 に固体モデルまわりの衝撃波と固体モデル内部の応力波のシュリーレン写真を示す。左から右に衝撃波マッハ数 $M_s = 3.02$ で伝播してきた入射衝撃波は、拡大流路で多少回折するが、その平面部分が固体モデルの平面頭部に正面衝突し反射する。同時に、固体モデル内部に平面応力波 (疎密波) が形成される。

図 3 の実験結果より、入射衝撃波と固体内の応力波の速度を比較して、アクリル樹脂の疎密波の速度を $c_1 = 2.7 \text{ km/s}$ と見積もることができる。今回行うシミュレーションで用いたアクリル樹脂の物性値を表 2

に示す。ここで、 ρ_s はアクリル樹脂の密度、 ν はポアソン比、 c_1 と c_2 はそれぞれ疎密波、せん断波の速度である。なお、 c_2 は c_1 と ν から決定した。

実験条件に対応して2次元の気体力学および弾性力学シミュレーションを行った。図4に、固体モデルまわりに発達する圧力場および固体モデル内部に形成される応力場 ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$) の等高線図を示す。実験結果と計算結果における波面の様子が良く一致していることが分かる。

直方体の固体モデルの平面頭部で入射衝撃波が反射すると、反射衝撃波の背後で圧力が瞬間的に上昇する。その結果、固体モデル内部に階段関数的な1次元の疎密波が伝播する。同時に、平面頭部の角からせん断波が発生する。また、1次元疎密波(圧縮波)の側壁上の足元から膨張波とせん断波が誘起され、1次元疎密波背後に攪乱波が生じる。そして、拡大流路を伝播する入射衝撃波が固体モデルの側壁を通過し、その背後には反射衝撃波の回折波も発達する。このように固体モデルの外側の側壁面上に形成される圧力分布によって固体内部には2次的な応力波が発生する。シミュレーションと実験の結果を比較すると、今回の可視化実験では、応力波の階段関数的な波面だけが観察されている。

Fig. 5 Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

Fig. 6 Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

4.2 半円形頭部を有する固体モデル 以前のシミュレーションでは、入射衝撃波が円形の弾性体に衝突する場合に内部に形成される応力波を扱った⁽⁹⁾。その結果、入射衝撃波が円形の表面で反射した直後は、内部の応力波は入射衝撃波が屈折するように形成されるが、時間の経過に従い、応力波と入射衝撃波の分離が起こることが示され、その分離はスネルの屈折法則から求められる屈折角が臨界角を超えると起こることが議論された。

一辺10mmの正方形断面のアクリルブロックの頭部を半円形に加工した固体モデルを用いて入射衝撃波と円形の弾性体の相互作用の実験を行った。図5と図7に衝撃波と応力波のシュリーレン写真を示す。図5では、入射衝撃波が円形の表面で反射し、反射衝撃波が円弧状に形成され、同時に、固体内部に応力波が円弧状に伝播する様子が観察される。図6は図5より時間が経過した後の現象である。反射衝撃波はさらに跳ね返り、応力波は円形表面における入射衝撃波の反射点よりかなり前方を伝播していることが認められる。

図7と図8に実験結果に対応するシミュレーションの結果を示す。実験で観察された衝撃波と応力波の波面がよく再現され、反射衝撃波領域の圧力分布を反映した応力分布が形成されている。

Fig. 7 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

Fig. 8 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

Fig. 9 Schematic diagram for front of stress wave determined from the Huygens' principle.

表1と表2に示すように、固体モデル内の疎密波は入射衝撃波より3倍ほど速く伝播する。図9に、ホイヘンスの原理に基いた疎密波伝播の概略図を示す。入射衝撃波が円形表面に到達して発生する疎密波が円形表面に沿う入射衝撃波の反射点Pに追いつけない場合には、図9(a)に示すように、疎密波の波面は入射衝撃波が点Pにおいて固体内に屈折するように形成され、疎密波と入射衝撃波は固体表面上で連なりながら移動する。しかし、固体表面に対する衝撃波の入射角が増加するに従い、図9(b)に示すように、入射衝撃波によって誘起される疎密波は入射衝撃波の反射点P'を追い越して伝播するようになる。スネルの屈折法則からこの固体モデルの臨界角を求めると、 22.8° である。ホイヘンスの原理では、衝撃波の入射角が臨界角を越えると衝撃波と疎密波の分離が起こることになる。図5と図7は、衝撃波と疎密波の分離が開始する時点で、入射角が臨界角を越えた直後と見なせるが、この入射角は、既に 43.5° となっている。

気体と液体の境界で球面衝撃波が反射する場合にも、このような入射衝撃波の反射点と液体の疎密波の分離が起こることが、Abe⁽¹⁵⁾らにより調べられている。

4.3 凹面を有する固体モデル 弱い平面衝撃波が凹面の反射面で反射するときには、反射衝撃波が反射面の焦点に集束することがよく知られている。今回の実験のように、固体内の疎密波の速度が入射衝撃波の速度より速い場合には、入射衝撃波が凹面形状の固体表面で反射すると、その内部に誘起される疎密波が集束すると考えられる。そこで、一辺10mmの正方形断面の亚克力ブロックの頭部を半径8mmの円形の凹面に加工した固体モデルを用いて、反射衝撃波と応力波の集束現象の実験を行った。

Fig. 10 Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

Fig. 11 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

Fig. 12 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

図10に実験で得られたシュリーレン写真を示す。反射衝撃波が凹面固体モデルの左側で集束し、固体モデル内部の応力波も集束していることが観察される。

実験結果と比較するために、平面衝撃波の反射によって、凹面固体モデル内部に誘起される応力波のシミュレーションを行った。図11～13に一連の現象に

Fig. 13 Contours of pressure and stress ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$).

対する圧力場と応力場を示す。

図 11 に入射衝撃波マッハ数 3 の衝撃波が凹面に入射する場合の様子を示す。入射衝撃波が凹面の縁の傾斜面の部分で反射し、斜め反射衝撃波が形成され、同時に、固体モデルの内部にも、凹面の縁を中心とする応力波が誘起され、凹面上で反射する衝撃波と連なりながら移動することが分かる。

図 12 には、さらに時間が経過した段階の、図 10 のシュリーレン写真に対応するシミュレーションの結果を示す。反射衝撃波が気体中で集束しているが、入射衝撃波マッハ数が 3 程度の場合には、一点に集束しないで、Mach-stem を有する構造を保つ。また、固体モデル内部でも疎密波が集束し、実験結果をよく再現している。

図 13 に、さらに時間が経過した段階の結果を示す。反射衝撃波の Mach-stem の部分が前方に移動し、一旦集束した疎密波が拡散し伝播している。今回の実験では、この現象のシュリーレン写真も撮影したが、衝撃波は鮮明に可視化できたが、応力波の波面は認められなかった。

5. お わ り に

本研究では、気体中の衝撃波によって固体内部に誘起される応力波に関する実験とシミュレーションを行った。

衝撃波管を用いた実験では、透明なアクリル樹脂のブロックを固体モデルとして、8kPa のアルゴンを伝播する衝撃波マッハ数 3 程度の衝撃波を衝突させた。ナノスパーク光源を用いたシュリーレン法によって、気体中の衝撃波のみならずアクリルブロック内部の応力波の波面を可視化できることを示した。

アクリルブロックの形状を変えて、衝撃波によって誘起される応力波伝播過程の実験を行い、著者らが開

発した弾性力学方程式に対する数値計算法を用いてそのシミュレーションを行い、実験を再現できる結果を得た。

References

- (1) Langenberg, K.L. et al., *Evaluation of materials and structures by quantitative ultrasonics*, ed. by Archenbach, J.D., Springer-Verlag (1993), 317-398.
- (2) 海津, 青戸, 谷村, 縦衝撃を受ける横等方性円柱の二次元波動伝ば解析, 機論 A 編 59 巻 557 号 (1993), 124-130.
- (3) Yabe, T. et al., *Interface capturing and universal treatment of solid, liquid and gas by CIP method*, Proc. of ICLASS'97, Vol.2-2, (1997), 902-909.
- (4) Shi, H.H., Field, J.E., Peckles, C.S.J., *High-speed liquid impact onto solid targets with different surface geometries*, Proc. of 21st International Symposium on Shock Waves, Australia, (1997), Paper 5190.
- (5) Henckels, A., Takayama, K., Grönig, H., *Study of Mach reflection in PMMA plate*, Proc. of 15th International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes, (1986), 869-875.
- (6) Tuttle, S.L., Simmons, J.M., Mee, D.J., *A stress-wave thrust balance for a hypersonic shock tunnel*, Proc. of 21st International Symposium on Shock Waves, Australia, (1997), Paper 6991.
- (7) 高野, 後藤, 西野, 弾性動力学方程式に対する有限体積分法, 機論 A 編 64 巻 626 号, (1998), 2471-2476.
- (8) Takano, Y., Hayashi, K., Goto, T., *Simulations for stress waves induced in solid material by reflection of strong shock waves*, Proc. of International Conference on Fluid Engineering, JSME Centennial Grand Congress, Tokyo, (1997), 413-416.
- (9) Takano, Y., Hayashi, K., Goto, T., *A computational procedure for interactions of shock waves with solid materials in liquid*, Proc. of 21st International Symposium on Shock Waves, Australia, (1997), Paper 5571.
- (10) Takano, Y., Akamatsu, T., *A diaphragmless shock tube*, J. Phys. E: Sci. Instrum. 17, (1984), 644-646.
- (11) Miyashiro, S., Grönig, H., *Low-jitter reliable nanosecond spark source for optical short-duration*, Experiments in Fluids 3, (1985), 71-75.
- (12) Roe, P.J., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes.*, J. Comput. Phys. 42, (1981), 357-372.
- (13) Godunov, S.K., *A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat. Sb. 47, (1959), 357-393.
- (14) Anderson, W.K., Thomas, J.L., van Leer, B., *Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations*, AIAA J. 24, (1986), 1453-1460.
- (15) Abe, A., Takayama, K., Sakurai, A., Yamada, K., *Shock wave refraction at an air/water interface*, Proc. of International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Nagoya, (1989), 952-957.