壁面近傍を上昇する変形気泡に働く力の理論解析*

高木 周^{*1}, 竹村 文男^{*2}, 松本 洋一郎^{*1}Theoretical Analysis of Lift Force Acting
on a Bubble Rising Parallel to the WallShu TAKAGI^{*3}, Fumio TAKEMURA and Yoichiro MATSUMOTO^{*3} Department of Mechanical Engineering, The University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656 Japan

The prediction of the behavior of a rising bubble near a wall is very important to control a bubbly flow in chemical reactor, or to develop the drag reduction devices using micro bubbles etc. In the present study, theoretical analysis of a deformed bubble rising near the wall is conducted. In the former experimental studies, there is a qualitative discrepancy between the theory for a spherical bubble and experimental results in the low Reynolds number cases. It is well-known that there is no lift force acting on spherical bubble under the creeping flow approximation due to the kinematic reversibility. Therefore, in case of the theory of a spherical bubble, weak inertia effect must be taken into account to obtain a lift force. However, there is another possibility to have a lift force, that is, a deformation of bubble. In the present study, to estimate the effect of deformation, we conduct the domain perturbation analysis using Lamb's general solution for Stokes flow. The expression for the lift force due to the deformation is shown with the higher order extension. It is also shown that the slight deformation effect becomes more important as a bubble rises closer to the wall and the effect will become larger than that of small inertia below a certain distance from the wall.

Key Words: Bubble, Creeping Flow, Deformation, Domain Perturbation, Wall Effect, Lift Force

1. 緒 論

液体中に気泡を含む流れは、化学反応器や熱交換器、バイオリアクタなど多くの工業プロセスで見られる。特に現在、化学エネルギーを利用した熱エネルギー輸送システム、オゾンなどを用いた水質浄化技術において液相化学反応が重要なテーマとなっている。液相反応においては、反応ガスの溶解過程が反応律速となることが多く、その溶解促進のために、サブミリオードの気泡直径をもつマイクロ気泡を活用することは、かくはん動力を抑えるための省エネルギー技術として大きな意味をもつ。また最近では、マイクロ気泡を利用した船の抵抗低減技術の開発も積極的に推進されており、液体中を移動する微小気泡の、壁面近傍での挙動に関する詳細な知見が必要となっている。本研究では、これらを背景に、壁面近傍を上昇する気泡に関して、粘性の影響が支配的な低 Reynolds 数域で変形気泡に働く力の理論解析を行う。

粘性のみに支配された Stokes 流れにおいては、運

動学的可逆性(Kinematic Reversibility)により、壁面近傍を壁面に平行に上昇する球形気泡には、壁面垂直方向に働く揚力が発生しない。竹村ら⁽¹⁾は、壁面近傍を上昇する気泡に働く揚力に関する実験を行い、低 Re 数の領域で、ほぼ球形に近い形をした気泡に働く揚力の測定を行っている。気泡の形状を球形と仮定した場合には、壁面からの揚力を求めるためには、慣性の効果を考慮する必要があり、低 Re 数の場合には、微小な慣性の効果を取り入れた Oseen タイプの式に接合漸近展開法を適用することにより、揚力を得ることができる。壁面近傍を移動する球形粒子に関しては、Vasseur-Cox⁽²⁾により、理論解析がなされており、彼らの結果を表面でせん断応力なしの条件が課される上昇気泡に適用した結果は、竹村ら⁽¹⁾に示されている。

一方、運動学的可逆性が存在する Stokes 流れにおいても、壁面近傍を上昇する気泡が変形を伴う場合には、揚力が発生する。Stokes 流れにおいて、変形気泡や液滴を扱った研究としては、壁面の存在する系に関しては Chang-Leal⁽³⁾, Shapira-Haber⁽⁴⁾⁽⁵⁾, Uijttewaal ら⁽⁶⁾, 2 個の気泡が干渉する系に関しては Watanabe-Fukano⁽⁷⁾ などがある。Chang-Leal⁽³⁾, Shapira-Haber⁽⁵⁾, Uijttewaal ら⁽⁶⁾の研究では、壁面

* 原稿受付 2000 年 9 月 19 日。

^{*1} 正員, 東京大学大学院工学系研究科(〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)。^{*2} 東京大学大学院新領域創成科学研究科。

E-mail: takagi@mech.t.u-tokyo.ac.jp

近傍に存在するせん断流により気泡の変形がもたらされる系を, Watanabe-Fukano⁽⁷⁾ は, 無限流体中において移動する2個の気泡の系を解析している. また, Shapira-Haber⁽⁴⁾ は, 2枚の壁面間を移動する液滴に対し, 壁面間距離を変数にした解析も行っている. これらの研究に対し, 本研究では, 静止流体中を気泡が体積力を受け壁面に平行に移動している系において, 気泡-壁面間距離を変数とし, 変形気泡が壁面から受ける力を求めることを目的とする.

2. おもな記号

- a : 気泡半径
- l : 気泡中心・壁面間距離
- $\mathbf{n}$: 法線ベクトル
- p : 圧力
- r, θ, ϕ : 球座標系の成分
- $\mathbf{r}$: 位置座標ベクトル
- $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$: 接線ベクトル
- $\mathbf{u}$: 局所速度ベクトル
- $y_{nm}, \bar{y}_{nm}$: 球面調和関数
- A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} : Lamb の一般解の係数
- Ca : キャピラリ数 $= \mu U / \sigma$
- F_D : 抗力
- F_L : 揚力
- L : 気泡-気泡(鏡像)間距離 ($= 2L$)
- U : 気泡の鉛直方向速度
- P_{nm} : Legendre 多項式
- ε : 変形量
- κ : 曲率
- μ : 液体の粘性係数
- ρ : 液体の密度
- σ : 表面張力係数
- τ : 応力テンソル
- χ : トロイダル成分
- Φ : ポテンシャル成分
- 下付き添字
- n, m : 球面調和関数の次数
- B : 気泡
- 上添字
- MR : 鏡像成分

3. 問題設定

本研究では, 図1に示すように, 鉛直方向に立てられた壁面から距離 l 離れた所を, 速度 U で壁面に平行に移動する半径 a の気泡に働く揚力を解析する.

3・1 仮定 本研究では, 粘性に支配された流れ

Fig. 1 Schematic figure of the present problem

Fig. 2 Mirror image and coordinate system

を解析対象とし, また気泡の変形は小さいとする. すなわち, 変形の摂動パラメータに関して変形の一次の解までを扱う. 一方, 壁面気泡間の距離は, 気泡径に対して十分離れた距離から, 気泡径と同程度の距離までを解析対象とし, 壁面の存在により誘起される流れ場に関しては, 高次の影響を考慮した形式で展開を行う.

以上, 本理論解析での仮定を簡単にまとめると以下のようなになる.

- (1) 流れは, 粘性のみに支配された Stokes 流れである.
- (2) 気泡の体積変化や流れの圧縮性の影響はないとする.
- (3) 気泡の変形は十分小さいが, 気泡壁面間距離は気泡径に対して十分大きい所から同程度までになり得る.

また本研究では, Stokes 流れを考えているため, 気泡が球形を保っている場合には, 運動学的可逆性により壁に平行に働く気泡には揚力は働かず, 横方向の移

動はない。これに対し、変形を伴う場合には、揚力が発生し、実際には揚力の発生により壁面に垂直方向の横方向の速度をもつこととなる。しかし、この横方向の速度成分によりもたらされる揚力や抗力は、壁に平行に移動することによりもたらされる量に比べ高次の影響となるため、ここでは壁に垂直な速度成分を零として解析を行っている。

3・2 基礎式 上の仮定のもと、Stokes 流れにおいて、図2に示すように、ほぼ球形をした気泡とその鏡像を配置する。Kim-Karrila⁽⁸⁾より、無限遠で零に収束する Stokes 流れの解は、Lamb の一般解を用いて、球座標系で以下のように表すことができる。

Lamb の一般解：

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ -\frac{(n-2)r^2 \nabla p_{nm}}{2\mu n(2n-1)} + \frac{(n+1)\mathbf{x} p_{nm}}{\mu n(2n-1)} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{ \nabla \Phi_{nm} + \nabla \times (\chi_{nm} \mathbf{x}) \} \quad (1)$$

ここで、

$$p_{nm} = \frac{1}{r^{n+1}} (A_{nm} y_{nm} + \tilde{A}_{nm} \tilde{y}_{nm}) \quad (2)$$

$$\Phi_{nm} = \frac{1}{r^{n+1}} (B_{nm} y_{nm} + \tilde{B}_{nm} \tilde{y}_{nm}) \quad (3)$$

$$\chi_{nm} = \frac{1}{r^{n+1}} (C_{nm} y_{nm} + \tilde{C}_{nm} \tilde{y}_{nm}) \quad (4)$$

$$[y_{nm} = P_{nm}(\cos \theta) \cos \phi, \quad y_{nm} = P_{nm}(\cos \theta) \sin \phi]$$

気泡の形状は、球面調和関数および変形の微小パラメータを用いて、以下のように表される。

$$F(r, \theta, \phi) = r - a - a \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\varepsilon_{nm} y_{nm} + \tilde{\varepsilon}_{nm} \tilde{y}_{nm}) = 0 \quad (5)$$

変形の微小パラメータ ε_{nm} , $\tilde{\varepsilon}_{nm}$ の具体的表記は、解析の結果として他の既知の値により与えられる。

気泡の表面 ($F=0$) における境界条件は、法線方向の速度成分が零より、

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6)$$

せん断応力なしの条件より、

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_1|_{F=0} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_2|_{F=0} = 0 \quad (8)$$

法線方向の応力の釣合式より、

$$-p + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -p_B + \sigma \kappa \quad (9)$$

と与えられる。また、壁面上における滑り速度なしの条件が満たされるように、鏡像のポテンシャル成分やトロイダル成分の値が決定され、これらの式を用いて変形気泡に働く揚力を求める。

4. 解析結果および考察

4・1 第1近似解

4・1・1 鏡像の影響

ここでは、気泡の変形が小

さくかつ気泡が壁面から十分離れている(気泡-壁面間の距離が気泡径に対して十分大きい)場合の解を考える。まず、一様流中に存在する球形気泡周りの流れについて考える。図2で定義される球座標系を用いると、解は

$$A_{11} = aU\mu, \quad \text{それ以外は } 0 \quad (10)$$

と与えられる。ここでは、球座標系の軸 ($\theta=0, \pi$) が、流れの方向に与えられていないことに注意しておく。ちなみに球の表面でノースリップの境界条件が与えられる剛体球の場合には、 $A_{11}=3/2 aU\mu$, $B_{11}=Ua^3/4$ となり、 A_{11} の値が $3/2$ 倍になり、これが球形気泡と剛体球に働く抗力の大きさの違いに対応する。

次に、壁を形成するために、壁と反対側 ($x=-l=-L/2$) の位置に鏡像を配置する。図2に示す座標系を考え、気泡が壁から十分遠いとする、

$$A_{11}^{MR} = -aU\mu, \quad A_{21}^{MR} = 2a\mu Ul = a\mu UL$$

$$B_{11}^{MR} = aUl^2 = aU\left(\frac{L}{2}\right)^2, \quad \tilde{C}_{11}^{MR} = -aUl = -aU\frac{L}{2} \quad (11)$$

となる。ここで、壁のある場合の鏡像の成分には、 A_{21}^{MR} , B_{21}^{MR} , $\tilde{C}_{11}^{MR}$ の項が含まれていることに注意する。比較のため、2個の気泡が並んで上昇するときを示すと、

$$A_{11}^{MR} = aU\mu, \quad \text{それ以外の鏡像成分は } 0 \quad (12)$$

となる。壁のある場合と2個の気泡が並んで上昇する場合では、 A_{11} の係数が反対で、鏡像の進行方向が異なる。すなわち、壁を形成する場合には、原像と反対向きに移動する Stokes 極を鏡像に配置するため、原像周りに下向きの流れを誘起する。したがって、2個の気泡の場合には、鏡像が誘起する流れ場により原像に働く抗力が下がるが、壁がある場合には、反対に抗力が増加することになる。さらに、壁のある場合に配置される逆向きの速度をもつ鏡像だけでは、壁面で滑り速度なしの条件を満たすことができず、これを満たすために鏡像に A_{21}^{MR} , B_{21}^{MR} , $\tilde{C}_{11}^{MR}$ の項が追加され、これらの項が気泡の変形に重要となる。これらの関係を簡単に図3に示しておく。

以上で、鏡像が配置されたが、これら鏡像からの流れが原像の周りに作り出す流れと、気泡の変形に関連づける必要がある。そのためには、鏡像の作り出す流れを原像の原点周りで記述される球座標系で表現する。座標系その他を図2に示すように定義し、座標変換に際して、以下の関係を用いる (Kim-Karrila⁽⁸⁾ 参照)。

Fig. 3 Relation between flow configuration and coefficient of mirror image

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^{n+1} P_{nm}(\cos \theta_1) = \left(\frac{1}{L}\right)^{n+1} \sum_{q=m}^{\infty} \frac{(n+q)!}{(q+m)!(n-m)!} \left(\frac{r_j}{L}\right)^q P_{qm}(\cos \theta_2^*) \quad (13)$$

$$\mathbf{x} = r_1 \mathbf{e}_r^{(1)} = (r_2 - L \cos \theta_2^*) \mathbf{e}_r^{(2)} + L \sin \theta_2^* \mathbf{e}_\theta^{(2)} \quad (14)$$

$$r_1^2 = L^2 + r_2^2 - 2 L r_2 \cos \theta_2^* \quad (15)$$

ここで、原像における球座標系の θ 座標は、 $\theta_2 = \pi - \theta_2^*$ で与えられることに注意する。これらの関係を用いて、鏡像の中心を原点とした球座標系で表現された流れを、原像の原点周りの球座標系で表す。

ここでは、まず始めに気泡が壁から十分離れている ($a/L \ll 1$) 場合を考え、式(11)より鏡像の A_{11}^{MR} , A_{21}^{MR} , $\tilde{C}_{11}^{MR}$, B_{11}^{MR} 成分を原像の原点周りの球座標系で表現する。式(11)より $A_{11}^{MR} = O(L^0)$, $A_{21}^{MR} = O(L^1)$, $\tilde{C}_{11}^{MR} = O(L^1)$, $B_{11}^{MR} = O(L^2)$ であることを考慮すると、

圧力に関して：

$$\begin{aligned} p^{MR} &= \frac{A_{11}^{MR}}{r_1^2} y_{11} + \frac{A_{21}^{MR}}{r_1^3} y_{21} \\ &= A_{11}^{MR} \left(\frac{1}{L}\right)^2 \left\{ \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{11}^* + \left(\frac{r_2}{L}\right)^2 y_{21}^* + \dots \right\} + A_{21}^{MR} \left(\frac{1}{L}\right)^3 \left\{ 3 \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{11}^* + 4 \left(\frac{r_2}{L}\right)^2 y_{21}^* + \dots \right\} \\ &\cong A_{11}^{MR} \left(\frac{1}{L}\right)^2 \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{11} - 3 A_{21}^{MR} \left(\frac{1}{L}\right)^3 \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{21} \quad (16) \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_2 = \pi - \theta_2^*$ の関係を用いて、 θ_2^* 座標系での球面調和関数 y_{11}^* , y_{21}^* から、 θ_2 座標系での y_{11} , y_{21} への書換えを行っている。

同様に、速度に関して：

$$\begin{aligned} u_r^{MR} &\cong \frac{A_{11}}{\mu} \left[\left(\frac{1}{L}\right) \frac{1}{2} y_{11} + \left(\frac{1}{L}\right)^3 r_2^2 \left(\frac{4}{5} y_{11} - \frac{4}{5} y_{31} \right) \right] + B_{11} \left[\left(\frac{1}{L}\right)^3 y_{11} - \left(\frac{1}{L}\right)^2 2 r_2 y_{21} \right] \\ &\quad + \tilde{C}_{11} \left[\left(\frac{1}{L}\right)^2 y_{11} - \left(\frac{1}{L}\right)^3 r_2 y_{21} \right] + \frac{A_{21}}{\mu} \left[\left(\frac{1}{L}\right)^3 r_2 \left(\frac{1}{2} y_{21} + \left(\frac{1}{L}\right)^4 r_2^2 \left\{ \frac{3}{10} y_{11} - \frac{4}{5} y_{31} \right\} - \left(\frac{1}{L}\right)^5 r_2^2 2 y_{21} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{MR} &\cong \left[\frac{1}{\mu} \frac{A_{11}}{L} \left\{ \frac{1}{6} y_{21} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{11} \right\} + B_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^3 \left\{ \frac{1}{3} y_{21} - \left(\frac{r_2}{L}\right) \left(\frac{4}{5} y_{31} - \frac{9}{5} y_{11} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^2 \left\{ \frac{1}{3} y_{21} + \left(\frac{r_2}{L}\right) \left(\frac{2}{5} y_{11} - \frac{2}{5} y_{31} \right) \right\} - \frac{A_{21}}{\mu} \left(\frac{1}{L}\right)^2 \left\{ \left(\frac{r_2}{L}\right) \left(\frac{6}{5} y_{11} - \frac{1}{5} y_{31} \right) \right\} \right] \frac{1}{\sin \theta} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\phi^{MR} &\cong \left[\left\{ \frac{A_{11}}{2\mu} \left(\frac{1}{L}\right) + B_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^3 + \tilde{C}_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right\} \tilde{y}_{11} + \left\{ -\left(\frac{1}{3}\right) \frac{A_{11}}{2\mu} \left(\frac{1}{L}\right)^2 - B_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right) \tilde{C}_{11} \left(\frac{1}{L}\right)^3 \right\} r_2 \tilde{y}_{21} \right] \frac{1}{\sin \theta} \quad (19) \end{aligned}$$

と近似できる。これらに式(11)の関係を代入すると、

$$u_r^{MR} \cong aU \left\{ \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{1}{L}\right) - \frac{1}{2} r_2^2 \left(\frac{1}{L}\right)^3 \right] y_{11} + \left[\frac{1}{2} r_2 \left(\frac{1}{L}\right)^2 - 2 r_2^3 \left(\frac{1}{L}\right)^4 \right] y_{21} \right\} \quad (20)$$

$$u_\theta^{MR} \cong \left[\frac{3}{4} U \left(\frac{a}{L}\right) \left(\frac{r_2}{L}\right) y_{11} - \frac{1}{4} U \left(\frac{a}{L}\right) y_{21} \right] \frac{1}{\sin \theta} \quad (21)$$

$$u_\phi^{MR} \cong \left[-\frac{3}{4} U \left(\frac{a}{L}\right) P_{11} + \frac{1}{4} U \left(\frac{a}{L}\right) \left(\frac{r_2}{L}\right) P_{21} \right] \frac{1}{\sin \theta} \sin \phi \quad (22)$$

となる。比較のため、2個の気泡が並んで上昇する場合の値 ($A_{11}^{MR} = aU\mu$) を代入し、半径方向速度を計算すると、

$$u_r^{MR} \cong aU \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \right) + \frac{4}{5} r_2^2 \left(\frac{1}{L} \right)^3 \right] y_{11} - \frac{4}{5} r_2^2 \left(\frac{1}{L} \right)^3 y_{31} + O(L^{-4}) \right\} \quad (23)$$

となる。ここで注目すべき点は、後に詳細を示すが、変形による揚力発生に重要となる y_{21} の項が、壁がある場合には $O(L^{-2})$ であるのに対して、2個の気泡の場合には $O(L^{-4})$ と高次の項になることである。したがって、変形による揚力の効果は、2個の気泡が並んで上昇する場合よりも、壁面近傍を上昇する場合のほうが大きくなると考えられる。

4・1・2 変形の影響 次にこの流れが、変形した気泡表面でせん断応力なしの条件を満たすように流れ場および変形量を決定する。気泡の形状は、式(5)で示したとおり、球面調和関数を用いて表現されている。この関係を用いると法線ベクトルは、 $O(\varepsilon_{nm}^2)$ の近似で、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0} \\ &\cong \left(1, -\varepsilon_{nm} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta}, -\varepsilon_{nm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

同様に接線ベクトルは、

$$\mathbf{t}_1 \cong \left(\varepsilon_{nm}, \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta}, 1, 0 \right), \quad (25)$$

$$\mathbf{t}_2 \cong \left(\varepsilon_{nm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi}, 0, 1 \right) \quad (26)$$

で与えられる。ただし、ここでは、総和の記号 Σ を省略し、ある一つの変形モードに対しての表記とした。また、法線ベクトルの関係(24)を用いて、気泡表面の曲率は、

$$\begin{aligned} \kappa &= \nabla \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{a} [2 + \varepsilon_{nm}(n-1)(n+2)y_{nm}] + O(\varepsilon_{nm}^2) \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる。

これらの関係を用いて、気泡表面での境界条件を書き下すと以下ようになる。

(1) 法線方向速度 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ の条件より、

$$u_r|_{r=a} + \varepsilon_{nm} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=a} a y_{nm} - \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta} u_\theta|_{r=a} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi} u_\phi|_{r=a} \right] + O(\varepsilon_{nm}^2) = 0 \quad (28)$$

(2) 接線方向応力 接線方向には、せん断応力零の条件が課される。式(25), (26)の二つの接線ベクトルを用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_1|_{F=0} &= \tau_{r\theta}|_{r=a} + \varepsilon_{nm} \left[\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \Big|_{r=a} a y_{nm} - \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta}|_{r=a} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi} \tau_{\theta\phi}|_{r=a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta} \tau_{rr}|_{r=a} \right] + O(\varepsilon_{nm}^2) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_2|_{F=0} &= \tau_{r\phi}|_{r=a} + \varepsilon_{nm} \left[\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} \Big|_{r=a} a y_{nm} - \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta} \tau_{\theta\phi}|_{r=a} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi} \tau_{\phi\phi}|_{r=a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial y_{nm}}{\partial \phi} \tau_{rr}|_{r=a} \right] + O(\varepsilon_{nm}^2) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

(3) 法線方向応力 変形気泡の場合には、さらに法線方向応力条件の釣合い式より気泡の変形量が決定されることになる。法線方向応力の釣合いは、式(9)で与えられ、この式に、式(24), (27)を代入し、さらに、最低次の球形での解が $r=a$ で $\tau_{r\theta} = \tau_{r\phi} = 0$ の関係を満たしていることを考慮すると次式を得る。

$$-P|_{r=a} + \tau_{rr}|_{r=a} + \varepsilon_{nm} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-P) \Big|_{r=a} a y_{nm} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \Big|_{r=a} a y_{nm} \right] + O(\varepsilon_{nm}^2) = \frac{\sigma}{a} \varepsilon_{nm}(n-1)(n+2)y_{nm} \quad (31)$$

さて、ここで本問題を扱う前に、無限流体中を上昇する気泡に関して上の関係を適用してみる。 $A_{11} = aU\mu$ を代入すると、

$$p^0 = \frac{aU\mu}{r^2} y_{11} + \rho g y = \left(\frac{aU\mu}{r^2} - \rho g r \right) y_{11} \quad (32)$$

$$u_r^0 = U \left(\frac{a}{r} - 1 \right) y_{11} \quad (33)$$

となり、さらに、定常状態で浮力と抗力が釣り合うことより、 $\rho g = (3\mu U)/a^2$ の関係が得られ、この関係より圧力分布は、

$$p^0 = \frac{aU\mu}{r^2} y_{11} + \rho g y = \mu \frac{U}{a} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{r}{a} \right) \right] y_{11} \quad (34)$$

となり,

$$\left[-p^0 + 2\mu \frac{\partial u_r^0}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

の関係が満たされているのがわかる。これは, Stokes 流れにおいては, 表面張力の効果なしで, 法線方向の応力の釣合いが保たれることを示しており, ストークス流れ中を上昇する気泡は, 球形を保ったまま上昇するという Taylor-Acrivos⁽⁹⁾ の解析結果と一致している。

4・1・3 壁面の存在による変形の影響 壁面がある場合についてさらに解析を進める。現在注目している現象は, 壁面からの揚力であり, 壁面からの揚力を生み出す変形と直接関連するのは, 法線方向応力の式である。

(1) 法線方向応力 法線方向の釣合い式(31)の [] 内に 0 次の解を代入すると, 以下ようになる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(-p) \right]_{r=a}^{(0)} a y_{nm} + \left[\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \right]_{r=a}^{(0)} a y_{nm} = 9\mu \frac{U}{a} y_{11} y_{nm} \\ = 9\mu \frac{U}{a} (\sin \theta P_{nm}) \cos \phi \cos m\phi \quad \dots\dots\dots (36)$$

鏡像側からの流れの影響としては, 式(20)よりわかるように, まず y_{11} の成分が存在するが, この項は抗力に寄与するが, 揚力を生み出す方向の変形には直接寄与しない。揚力に寄与する方向の変形は, 図4に示す, $y_{21}(=P_{21} \cos \phi)$ モードの変形である。式(36)の $\sin \theta P_{nm}$ より P_{21} に関連した項を派生するのは, 鏡像の作る流れに関する $n=3, m=1$ のモードであるが, この項は, 式(20)より高次の項となっているのがわかる。したがって, y_{21} のモードに関する釣合い式は, 一次のオーダーで揃えて, 次式を得る。

$$-p|_{r=a}^{(1)} + 2\mu \left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{r=a}^{(1)} = \frac{\sigma}{a} 4 \varepsilon_{21} y_{21} \quad \dots\dots\dots (37)$$

鏡像側の影響を考慮に入れこの式を整理すると,

$$\left[\mu a U \left(\frac{1}{L} \right)^2 - 3 \frac{A_{21}}{a^3} + 24 \mu B_{21} \frac{1}{a^5} \right] y_{21} \cong \frac{\sigma}{a} 4 \varepsilon_{21} y_{21} \quad \dots\dots\dots (38)$$

と近似できる。したがって, 変形量 ε_{21} は,

$$\varepsilon_{21} \cong \left[\frac{1}{4} \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \frac{3}{4} \frac{A_{21}}{a^2 \sigma} + 6 \frac{B_{21}}{\left(\frac{a^4 \sigma}{\mu} \right)} \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。ここで, 2 項め, 3 項めが 1 項めのオーダーと釣り合うためには,

$$A_{21} = O \left[\mu U a^2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \right], \quad B_{21} = O \left[U a^4 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。

(2) 法線方向速度, 接線方向応力 法線方向の

Fig. 4 Deformation mode of bubble

釣合い式と同様に変形の y_{21} モードに関連して, オーダを評価すると, 法線方向速度の近似式(28)において, [] の中は高次の項となるため, 以下の近似ができる。

$$u_r|_{21, r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

したがって原像の係数に関して, 次式を得る。

$$\frac{A_{21}}{2\mu} \frac{1}{a^2} - 3 B_{21} \frac{1}{a^4} + \frac{U}{2} \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cong 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

同様に, 接線方向のせん断応力については,

$$9 \frac{B_{21}}{a^5} - 3 \frac{\tilde{C}_{11}}{a^3} = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$-5 \frac{B_{21}}{a^5} - \frac{\tilde{C}_{11}}{a^3} = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

を得る。以上式(39), (42)~(44)の結果より,

$$A_{21}^{(1)} \cong -\mu U a^2 \left(\frac{a}{L} \right)^2, \quad B_{21}^{(1)} = 0, \quad \tilde{C}_{11}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_{21} \cong \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{L} \right)^2 = \frac{\mu U}{4\sigma} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (45)$$

となる。したがって, 気泡の形状は, $O(L^{-2})$, までも考慮すると, 次式のようになる。

$$r = a + a \varepsilon_{21} y_{21} = a \left[1 + \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{L} \right)^2 y_{21} \right] \\ = a \left[1 - \frac{3}{8} \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \sin 2\theta \cos \phi \right] \quad \dots\dots\dots (46)$$

したがって, 長軸と短軸の長さの比は

$$\alpha = \frac{1 + \frac{3}{2} C_a \left(\frac{a}{L} \right)^2}{1 - \frac{3}{2} C_a \left(\frac{a}{L} \right)^2} = \frac{1 + \frac{3}{8} C_a \left(\frac{a}{l} \right)^2}{1 - \frac{3}{8} C_a \left(\frac{a}{l} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\left(\text{ここで, } C_a = \frac{\mu U}{\sigma} \right)$$

この結果は, 原像の原点周りに鏡像が作り出す流れを単純せん断で近似し, 単純せん断流中の気泡の変形を扱った解析結果(Leal⁽¹⁰⁾ 参照)を利用して求めた解(竹村ら⁽¹⁾ 参照)と一致する。さらに式(28)と式(45)の関係をを用いると, P_{10} の一次の項に対して,

$$A_{10} = -\varepsilon_{21} \frac{3}{10} \mu a U \quad \dots\dots\dots (48)$$

を得る。したがって、気泡に働く力に関して、

$$\begin{aligned} F &= \iint (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi} (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} a^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (49)$$

より、以下の結果を得る。

抗力：

$$\begin{aligned} F_D = F_y &\cong \iint \left[-p + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right]_{r=a} (-y_{11}) dS \\ &\cong 4\pi\mu a U \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

揚力：

$$\begin{aligned} F_L = F_x &\cong \iint \left[-p + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right]_{r=a} (y_{10}) dS \\ &\cong \frac{3}{10} \pi\mu a U \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

式(50)は、変形がない場合の壁面近傍を移動する気泡に働く力と一致し、 $O(l^{-1})$ では、変形の影響が現れていないことを示している。一方、揚力のほうは、ストークス流れの運動学的可逆性により変形のある場合のみ存在し、その力の最低次の項は l^{-2} となっている。

この式より、変形による揚力は、壁面に近づくにしたがい、単調に増加していくのがわかる。球形を仮定したCoxらの解では、微小な慣性項の影響によりもたらされる解は、壁面近傍で一定値に漸近していくが、変形の効果は壁面近傍で増加の方向のため、壁面に近づくにつれ、変形の効果が重要になってくるのがわかる。

4.2 高次の項の影響 ストークス流れの理論解析では、流れ場の線形性を用いた理論(Leal⁽⁸⁾ 参照)により、本手法で用いている手法より、比較的少ない計算量で変形や力の計算が可能となるが、本解析手法の利点の一つは、流れ場に関して高次の解への展開が、比較的容易なことである。ここでは、変形は微小とし、気泡-壁面間距離が短くなったときの影響について解析する。

気泡の変形量と直接かわるのは、法線方向の応力の釣合式(31)であり、半径方向の速度式(20)が重要となる。第1近似では、式(20)の第1項めの L^{-2} が変形量を決定したが、ここで注目すべき点は次項が L^{-4} で現れることである。すなわち、鏡像側からの影響として、式(10)の項しか考慮しない場合には、流れの高次の項を式(20)を介して取り入れても、そのオーダーは L^{-4} である。一方、鏡像側の高次の極として式(20)の

第1項めの y_{11} の項に関連して、同じ強さの極 $(3aU/4) \cdot (y_{11}^{MR}/L)$ が存在する。これは原像に $O(L^{-3})$ の流れをもたらすため、 $O(L^{-2})$ の次に現れる $O(L^{-3})$ の項に関しては、この項の影響のみを考えればよく、結果として式(45)から式(48)の U を $U[(1+3)/4] \cdot (a/L)$ で置き換えればよい。したがって、変形量および長・短軸の長さの比は

$$\varepsilon_{21} \cong \frac{\mu U}{4\sigma} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\alpha = \frac{1 + \frac{3}{8} C_a \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l} \right) \right]}{1 - \frac{3}{8} C_a \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l} \right) \right]} \quad \dots\dots\dots (53)$$

で与えられ、揚力は、

$$\begin{aligned} F_L = F_x &\cong \iint \left[-p + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right]_{r=a} (y_{10}) dS \\ &\cong \frac{3}{10} \pi\mu a U \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{l} \right) \right] + O \left[\left(\frac{a}{l} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (54)$$

となる。この式より、 $O(l^{-3})$ の項の符号も正であり、壁に近づくことによる高次の項の影響は、まず始めに揚力を増加させる方向であることがわかる。

5. 結 論

壁面近傍を壁面と平行に上昇する気泡について理論解析を行い、以下の結論を得た。

(1) 壁面近傍では、変形の効果により抗力が単調に増加していく。これは、慣性の影響を考慮した理論解が、壁面で一定の漸近値をもつものに対し、傾向が異なるものである。結果として、気泡が壁面近傍に近づくほど、変形による揚力の影響が大きくなる。

(2) 気泡の変形量が小さく、壁から比較的離れている場合には、気泡に働く揚力は、壁からの距離の二乗に反比例する。また、気泡が壁面に近づくとき、高次の項は、より揚力を大きくする方向に現れる。

(3) Stokes流れの鏡像に関して、2個の気泡が並んで上昇する場合よりも壁面が存在する場合のほうが、横方向の揚力が低次のオーダーで発生する。したがって、2個の気泡の干渉より、壁面との干渉のほうが、変形による揚力の発生に重要となると考えられる。

文 献

- (1) 竹村文男・高木周・松本洋一郎, 壁面近傍を上昇する球形ガス気泡に働く揚力, 機論, 66-649, B(2000), 2320-2326.
- (2) Vasseur, P. and Cox, R. G., The Lateral Migration of Spherical Particles Sedimenting in a Stagnant Bounded Fluid, *J. Fluid Mech.*, 80 (1977), 561-591.
- (3) Chan, P. C.-H. and Leal, L. G., The Motion of a Deformable Drop in a Second Order Fluid, *J. Fluid Mech.*, 92

- (1979), 131-170.
- (4) Shapira, M. and Haber, S., Low Reynolds Number Motion of a Droplet Between Two Parallel Plates, *Int. J. Multiphase Flow*, **14** (1988), 483-506.
- (5) Shapira, M. and Haber, S., Low Reynolds Number Motion of a Droplet in Shear Flow Including Wall Effects, *Int. J. Multiphase Flow*, **16** (1990), 305-321.
- (6) Uijttewaal, W. S. J., Nijhof, E. and Heethaar, R. M., Droplet Migration, Deformation, and Orientation in the Presence of a Plane Wall: A Numerical Study Compared with Analytical Theories, *Phys. Fluids*, A5 (1993), 819-825.
- (7) Watanabe, M. and Fukano, T., Hydrodynamic Force between Slightly Deformable Bubbles at Low Reynolds Number, *JSME Int. J. Ser. B*, **41-2** (1998), 252-257.
- (8) Kim, S. and Karrila, S. J., *Microhydrodynamics Principles and Selected Applications*, (1991), 85, Butterworth-Heinemann.
- (9) Taylor, T. D. and Acrivos, A., *Deform. Drag Fall Viscoous Drop Low Reynolds Number*, **18** (1964), 466-476.
- (10) Leal, L. G., *Laminar Flow and Convective Transport Processes*, (1992), 221-229, Butterworth-Heinemann.
-