仮想境界デカルト格子法による円柱まわりの非圧縮性流れの DNS* (第2報, 解適合格子生成法の導入)

堀井 克則*¹, 西田 秀利*², 里 深信 行*²

DNS of the Incompressible Flows Around a Circular Cylinder Using Cartesian Grid Approach with Virtual Boundary (2nd Report, Introduction of Solution-Adaptive Mesh Refinement)

Katsunori HORII, Hidetoshi NISHIDA*³ and Nobuyuki SATOFUKA*³ Department Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

In the first report, the Cartesian grid approach with virtual boundary method was validated for applying to the DNSs of the incompressible flows around a circular cylinder. The aims of this report are to introduce the solution-adaptive mesh refinement and to develop the more effective scheme. The computational Cartesian grid is generated by using the Adaptive Mesh Refinement (AMR) approach. The DNSs of the steady and unsteady incompressible flows around a circular cylinder are considered in order to compare with the results in the first report. The present solution-adaptive mesh refinement approach gives the reliable solutions and we can achieve successfully that both number of total grid points and computational time are reduced to 2/3 of the original Cartesian grid approach with the virtual boundary method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Grid Generation, External Flow, Viscous Flow, Unsteady Flow, Incompressible Flow, Cartesian Grid, Virtual Boundary, Flow Around a Circular Cylinder

1. は じ め に

本研究では、生成が簡便で計算効率の面から見ても有利であるデカルト格子上で曲面形状を有する物体まわりの数値計算を行うために仮想境界法⁽¹⁾を採用し、本論文の第1報⁽²⁾によりその有効性の検証を行い、二次元円柱まわりの流れ場において良好な結果が得られた。その際、デカルト格子生成法として Local Mesh Refinement (LMR)⁽³⁾法を用い、物体からの距離に応じて細分化を行い、物体形状に沿った形状適合格子層を構成するような階層的な格子層を生成してきた。しかしこの場合、物体から離れた領域

ほど格子解像度が低下してしまうのは当然であり、非定常流れにおいて、物体から放出される渦の運動及び渦と渦との干渉機構の詳細を調査したいと言う時には不向きとなる。というのは、物体近傍の格子解像度を保ったまま流出境界まで格子を生成しなければならなくなるからである。この場合、単層の格子点数よりはるかに少ないが、それでも格子点数は増加は避けられず、三次元流れに至っては著しく増加してしまうことになる。またそれに伴う計算時間増大も免れない。

したがって上述の問題を緩和するために、本報告では解適合格子 (Solution-Adaptive Grid) 生成法の一環である Adaptive Mesh Refinement (AMR)⁽⁴⁾法を格子生成法として導入し、LMR法と比較・検討を行うこととする。計算対象を第1報同様二次元円柱まわりの流れとし、まず、定常流れにおいて AMR 法の

* 原稿受付 2000年5月29日。

*¹ 京都工芸繊維大学大学院(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。*² 正員, 京都工芸繊維大学工学部。

E-mail: nishida@ipc.kit.ac.jp

有効性や流れ場をモニターする判定基準値について検討を行う。そして非定常流れへ適用し、LMR 法との計算効率等の比較を行うことを目的とする。

2. 仮想境界デカルト格子法

2.1 仮想境界法 (Virtual Boundary Method)

仮想境界法とは、物体面を仮想的に複数の点の集合として表現し、仮想境界点での速度を支配方程式である Navier-Stokes 方程式の外力項として格子点上にフィードバックすることにより、反復計算を用いて仮想境界点での速度が滑り無し条件を満足するように計算する方法である。その手順を図 1 を用いて示す。

Fig. 1 Sketch of virtual boundary method.

まず、仮想境界点の座標 x_s における速度 $U(x_s)$ を、その点が存在するセルに属する近隣の格子点 4 点 (i,j) , $(i+1,j)$, $(i,j+1)$, $(i+1,j+1)$ から次式に従い内挿により求める。

$$U(x_s) = \sum_{i,j}^{i+1,j+1} W_{i,j}(x_s) u_{i,j} \quad (1)$$

ここで、 $W_{i,j}(x_s)$ は内挿の距離関数であり

$$W_{i,j}(x_s) = w(x_s - x_i)w(y_s - y_j) \quad (2)$$

のように表され x 方向に対しては

$$w(x_s - x_i) = \begin{cases} \frac{x_s - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{if } x_i < x_s \\ 1 & \text{if } x_i = x_s \\ \frac{x_s - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{if } x_i > x_s \end{cases} \quad (3)$$

であり、 y 方向も同様である。次に、内挿された速度を用い仮想境界点における外力 G を次式より求める。

$$G(x_s, t) = \alpha \int_0^t U(x_s, t) dt + \beta U(x_s, t) \quad (4)$$

そして、次式により格子点上の外力項にフィードバックさせる。

$$G_{i,j} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} W_{i,j} G_n(x_s) \quad (5)$$

ここで、 N_s は点 (i,j) に影響を与える総仮想境界点数であり、 α, β は負の定数である。

この手順を時間進展ごとに繰り返すことにより、仮想境界点における速度が滑り無し条件を満足するようになる。数値計算法等の詳細に関しては第 1 報⁽²⁾を参照されたい。

2.2 解適合格子生成法

2.2.1 AMR 法 AMR 法とは、流れ場を適切な方法でモニターした結果に基づき、格子点を追加していく方法である。この方法を用いることにより物理量の変化が大きく、基本格子においてより高分解能の要求される領域を数倍細かい格子で計算が可能であり、衝撃波や反応面を持つ流れの詳細な計算に威力を発揮している。しかし、非圧縮性流れへの適用例は少ない。

2.2.2 モニター量の決定法 流れ場の数値計算においては離散化による打ち切り誤差が生じるが、その打ち切り誤差を計算領域全体で最小になるように格子点を配置することが望ましい。しかしその評価法は複雑になるため、一般的には何らかの物理量をモニターすることが多い。その方法には渦度の勾配がよく用いられるが、局所的に非常に大きな値が出現するために格子再生成が困難になる場合がある。そこで本研究ではモニター量として、直接計算される圧力を用いて、以下に示すような圧力の勾配を採用する。

$$W = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| \quad (6)$$

2.2.3 計算手順 AMR 法を導入するにあたっての計算手順を述べる。まず、第 1 報と同様に LMR 法に従い生成したものを初期格子として用いる。次に、格子点を追加する判定基準値及び格子を再生成するタイムステップを指定する。そして、指定したタイムステップにおいて計算を中断し、モニター量を算出し、判定基準値に応じて格子点を追加して格子を生成する。最後に、新たに追加された格子点に物理量を線形内挿によりマッピングして計算を再開するという手順となる。なお、下層格子層と重畳する格子点は削除し、下図のように階層的格子を生成する。また、階層的格子のデータ構造は非構造的であるが、各格子レベルは Tree 的に関連付けられている。

2.3 格子層間のデータ補間法

各格子層境界では空間微分項の離散化等に適した補間法の適用が必要となり、その手法は第 1 報で示した二次精度の補間法を用いることとする。

2.4 基礎方程式

支配方程式である Navier-Stokes 方程式の定式化には、三次元への拡張が容易である基礎変数表示法を採

Fig. 2 Hierarchical Cartesian grid.

用する。したがって、基礎方程式はベクトル表示で

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F} - \nabla p \quad (8)$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{G} \quad (9)$$

であり、仮想境界法の外力項 $\mathbf{G}$ を付加した形となる。

また Navier-Stokes 方程式の解法には、全ての物理量をセル中心で定義するコロケーション格子上で Fractional Step 法を用いて流れを解き、セル内の連続の式を満足させるように提案されたコロケーション差分法⁽⁵⁾を採用する。

3. 二次元円柱まわりの流れへの適用

上述した AMR 法を格子生成法として用い、第1報で検証を行なった結果をふまえ、その条件の下で二次元円柱まわりの直接数値シミュレーションを行う。その際、円柱を表現する仮想境界点数をセルあたり4点という条件を常に再現するために最密格子層(5層目)の領域はモニター量と無関係に固定し、最粗格子層を除く3層をモニター量に応じて格子点を追加して再生成し、5層の格子層を生成することとする。

3.1 計算条件

流れの概略を図3に示す。計算領域は流入側に円柱直径 D の5倍、側方側に10倍、流出側に15倍とする。

Fig. 3 Computational region and conditions.

初期条件は、一様流 ($u = 1, v = 0$) 中に突然円柱が現れたとする衝撃出発とする。境界条件は、流入境

界に対しては速度を一様流で固定し、圧力をノイマン型境界条件で与えるものとする。側方・流出境界に対しては圧力をゾンマーフェルト放射条件⁽⁶⁾によって与えて固定し、速度を連続の式より評価する。

3.2 定常流れにおける検証

以上の計算条件の下で、AMR 法の有効性や流れ場をモニターする判定基準値を検証するために、まず定常流となるレイノルズ数40として直接数値シミュレーションを行う。なお、定常判定基準は全速度成分の $L2$ 残差が 10^{-6} 以下と設定する。

定常流れでは、まず初期格子(図4、最密格子層の格子幅は $D/64$)で定常解を求め、その定常解よりモニター量を算出して格子を再生成する。そして、格子点上に物理量をマッピングして、再生成された格子上で再度定常解を求めることとする。図4において円柱を表現する仮想境界は白抜きで表現されている。

Fig. 4 Initial grid for steady flow ($Re = 40$). (16876 Cartesian grid points)

Fig. 5 Concept of AMR method.

判定基準値は、 $W \geq 0.6$ で1層、 $W \geq 1.2$ で2層、 $W \geq 2.4$ で3層の細分化(図5参照)を最粗格子層より行うように設定する。円柱を表現する仮想境界点数は950点(セルあたり4点)である。

得られた定常解における特性量を比較解^{7),8)}とともに表1に示す。なお、表中の CD は抵抗係数で添え字 sf は円柱表面の圧力とせん断応力を補間して形状データ上で算出したもの、 mt は解析領域への運動量の出入りの差により算出したものである。 L_v/D は双子渦長さ、 PE は円柱前後縁の圧力差 ($p(\pi) - p(0)$) である。この表より LMR 法(初期格子)によるものと比べても、円柱後方の格子解像度の影響で双子渦長さが若干異なるが、良好に一致した結果が得られてい

ることが確認できる。また、比較解と比べても遜色ないと判断することができる。

次に、圧力勾配のモニター量により生成された解適合格子及び等圧力線図を図6、7に示す。等圧力線図から判るように、円柱前方の等高線が狭く圧力勾配が大きくなっており、それに対応して細分化格子が生成されていることが確認できる。また、格子及び圧力場の双方においても圧力の粗格子層間で補間の影響であろう振動が若干見られるものの上下対称な分布となっており、良好な解が得られていることが確認できる。

Table. 1 Comparison of flow characteristics.

	CD_{sf}	CD_{mt}	L_v/D	PE
Present (AMR)	1.490	1.511	2.506	0.801
Initial grid	1.489	1.520	2.502	0.795
Fornberg ⁽⁷⁾	1.498	—	2.240	0.800
Dennis ⁽⁸⁾	1.522	—	2.345	0.826

Fig. 6 Generated solution-adaptive grid.
($Re = 40$, 15383 Cartesian grid points)

Fig. 7 Pressure contours.
($Re = 40$, 15383 Cartesian grid points)

よって、定量的にも定性的にも良好な解が得られ AMR 法の有効性が確認でき、格子を再生成する判定基準値の妥当性も示せたと考えられる。ただし、これらの判定基準値は汎用性に優れたものではなく、汎用性に関しては今後の課題である。

3.2.1 非定常流れへの適用 次に、 $Re = 200$ として非定常流れへ適用する。非定常流れは時々刻々と局所

的に物理量が大きく変化するため、効率的な細分化格子を得るには流れ場の解析と連動して、格子を再生成する必要がある。格子の再生成はもちろん毎タイムステップ行うことが望ましいが、格子生成時間を考慮に入れると計算効率が悪化することも予想される。そこで、ここでは格子を再生成するタイムステップを 1000 おきとする。また、初めて格子を再生成するのは非定常に移行した後の無次元時間 100 とする。以後、指定したタイムステップごとに格子を再生成し、無次元時間 200 まで計算を行う。なお、初期格子は図8に示すように円柱付近の格子解像度を流出境界まで保ったもので、最密格子層の格子幅が $D/64$ の 5 層の階層的格子 (格子点数 63192) であり、円柱を表現する仮想境界点数は 950 点 (セルあたり 4 点) である。

また、格子再生成を毎タイムステップ実施しないためにモニター量は連続的に変化しないことになる。そのために、モニター量を式 (6) のままの状態で用いると、局所的に W の値が極端に大きくなり、一部の領域に密格子層が集中することになってしまう。そこで、

$$W_d = \varphi W_I + \frac{1-\varphi}{8} \sum_{p=1}^8 W_p \quad (0 \leq \varphi \leq 1) \quad (10)$$

上式 (10) のように、平滑化した値 W_d を用いることとする。なお、 φ は任意の定数であり、ここでは 0.5 とする。また、 W_I はある格子点上の、 W_p は W_I のまわり 8 点のモニター量をそれぞれ示す (図5)。これより格子点を追加する領域が拡張され、時々刻々と変化する流れ場に対応することができる。

Fig. 8 Initial grid for unsteady flow ($Re = 200$).
(63192 Cartesian grid points)

まず、十分流れが安定した後の特性量を比較解 (9),(10),(11) とともに表2に示す。なお、表中の CL_{amp} は揚力係数の振幅、 St は流れの周期性を表すストローハル数であり、抵抗係数は時間平均値を示す。格子細分化の判定基準値は、定常流において検証したように $W_d \geq 0.6$ で1層、 $W_d \geq 1.2$ で2層、 $W_d \geq 2.4$ で3層の細分化を最粗格子層より行うように設定した。この表を見ても、比較解と遜色ない結果が得られているの

Table. 2 Comparison of flow characteristics.

	CD_{sf}	CD_{mt}	CL_{amp}	St
Present (AMR)	1.337	1.333	0.678	0.200
Initial grid	1.341	1.336	0.674	0.201
Rosenfeld ⁽⁹⁾	1.329	—	0.674	0.197
Miyake ⁽¹⁰⁾	1.340	—	0.670	0.196
Rogers et al. ⁽¹¹⁾	1.230	—	0.604	0.185

Fig. 9 Generated solution-adaptive grid.
($Re = 200$, 41034 Cartesian grid points) Fig. 10 Generated solution-adaptive grid.
($Re = 200$, 36372 Cartesian grid points) Fig. 11 Generated solution-adaptive grid.
($Re = 200$, 38936 Cartesian grid points)

が判る。また、LMR 法 (初期格子) によるものとも定量的に同等な結果が得られているのが確認できる。

次に、揚力係数が最大、0、最小の時刻に生成された解適合格子及び等圧力線図をそれぞれ図 9 から 14 に示す。円柱から放出されるカルマン渦列に対応して格子が生成されているのが判り、また等圧力線図を見ても生成された格子とカルマン渦の位置が一致していることが確認できる。よって、AMR 法を用いることにより後方に放出される渦が的確に捉えられ、定性的に良好な結果が得られていると判断することができる。

次に、円柱形状データ上で算出した抵抗及び揚力係数の時間履歴を図 15 に示す。この図より、流れ場が完全に周期的になっていることが確認できる。

Fig. 12 Pressure contours.
($Re = 200$, 41034 Cartesian grid points) Fig. 13 Pressure contours.
($Re = 200$, 36372 Cartesian grid points) Fig. 14 Pressure contours.
($Re = 200$, 38936 Cartesian grid points)

Fig. 15 Time history of CD and CL.

最後に、AMR法とLMR法の計算効率について表3にまとめる。ここでの計算時間は、格子を再生成し始めた無次元時間100から200までのものである。この表より、格子点数に関しては約60%となっているのが判る。また、計算時間も格子を再生成する時間が含まれているにもかかわらず、66%と短縮されており、計算効率の向上も見られる。ただし、この結果は格子再生成の時間ステップを1000とした際のものであり、時間ステップを縮小していくと計算効率の悪化も予想されるが、時間ステップの選択によって少なくとも上述の計算効率の向上が可能となることが示された。

Table. 3 Comparison of computational efficiency.

	Number of grid points (ratio)
Present (AMR)	36372 ~ 41034 (0.58 ~ 0.65)
Initial grid	63192 (1.00)
	Ratio of CPU time
Present (AMR)	0.66
Initial grid	1.00

以上により、非定常流れにおいてもAMR法を用いることが、分解能及び計算効率の向上に大きく寄与することが確認できる。このAMR法を三次元流れへ拡張することで、さらなる計算効率の向上が期待される。

4. おわりに

今回、第1報において検証したデカルト格子上で曲面形状を有する物体まわりの数値計算を行うための有効な手法である仮想境界法に、格子生成法として解適合格子生成法の一つであるAMR法を導入した。計算対象を二次元円柱まわりの流れとし、流れ場を圧力勾配を用いてモニターし、格子を再生成することとして直接数値シミュレーションを行った結果を以下にまと

める。

まず、定常流れ ($Re = 40$) において、定量的に他者やLMR法によるものと比べても遜色ない結果が得られ、また定性的にも生成された解適合格子・圧力場とも良好な結果が得られた。それに伴い、AMR法の有効性や流れ場をモニターした格子細分化の判定基準値の妥当性も示せた。

次に、非定常流れ ($Re = 200$) へ適用し、平滑化したモニター量の用いて指定したタイムステップおきに格子を再生成して直接数値シミュレーションを行った結果、定量的に遜色ない結果が得られ、また定性的にも流れ場と連動して格子を生成することができ良好な結果が得られた。さらに、LMR法と比べ、格子点数・計算時間ともに約2/3に短縮することが可能となり、計算効率の向上を確認することができた。

なお、仮想境界点における速度が滑り無し条件を満足していたことや、Navier-Stokes方程式の定式化する手法として用いた基礎変数表示法において議論となる連続の式の満足度に関しても、定常流れ・非定常流れともにダイラレーション (連続の式の左辺) の $L2$ ノルムが 10^{-6} のオーダーであり、数値的に連続の式を満足していたことも付け加えておく。

最後に、本研究は日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業「計算科学」(JSPS-RFTF97P01101) 及び日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究C (No.12650165) の助成を受けて行われたものであり、ここに謝意を表する。

文 献

- (1) E.M.Saiki et al., J.Comput.Phys.123(1996), pp.450-465.
- (2) 堀井 克則ほか2名, 機論,(2000).
- (3) Quirk,J.J., ICASE Report, No.94-51, Jun.(1994).
- (4) M.J.Berger, J.Oliger, J.Comput.Phys., Vol.53-3(1984), pp.484-512.
- (5) Rhie.C.H. et al., AIAA Journal, 21-11(1983), pp.1525-1532.
- (6) Orlanski, I., J.Comput.Phys.21(1976), pp.251-269.
- (7) B.Fornberg, J.Fluid Mech. Vol.98-4(1980), pp.819-855.
- (8) S.C.R.Dennis et al., J.Fluid.Mech. Vol.42-3(1970), pp.471-489.
- (9) Rosenfeld, M., Computers Fluids, Vol.23, No.5(1994), pp.693-709.
- (10) 三宅 俊也, 京都工芸繊維大学博士論文 (1993).
- (11) Rogers, S.E. et al., AIAA Journal, Vol.28, No2(1990), pp.253-262.