流体力により弾性変形する境界を持つ流れ場の高速計算法*

田 中 太^{*1}, 黒 田 成 昭^{*2}Fast Computational Method for Flow Field Including Boundaries
with Elastic Deformation by the Fluid ForceFutoshi TANAKA and Shigeaki KURODA^{*3}^{*3} Dept. of Mechanical Engineering and Intelligent Systems, The University of Electro-Communications,
1-5-1, Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

We proposed new computational method using Newton-Raphson method for elastic deformation problem by the fluid force in the previous paper. However, the jacobi matrix takes long computational time in that method. In this paper, we propose two new computational methods for jacobi matrix. One is the method that the jacobi matrix is calculated using a local region of flow field. The other is the method that the jacobi matrix is calculated only from the boundary condition. The new methods shorten the computational time of jacobi matrix drastically. The flow in an elastic tube with a stenosis was calculated numerically as a computational example. The numerical results obtained by the present methods show good agreement with the results obtained by the previous method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Flow Induced Vibration, Elastic Deformation, Newton-Raphson Method, Moving Boundary

1. はじめに

流体力により境界形状が弾性変形する流れ場の解析は一般に困難である。それは境界形状が変形することにより流れ場そのものも変化すること、すなわち境界形状と流れ場が相互に影響をおよぼしあうためである。特に非圧縮性流体では、弾性変形と圧力場が相互干渉しながら速度場と連続の式より陰的に定まることになり、いっそう困難な問題となる。

非圧縮性流体で大きな弾性変形を取り扱うための数値計算法として、流れ場と弾性変形に関する未知数を全て同時に扱う方法がある⁽¹⁾⁽⁵⁾。この計算方法では、流れ場と弾性変形が厳密に同時に求まるので、変形による圧力場の弛緩や流体一構造の干渉効果などが得られる。本論文においてはこの計算方法を同時計算法と呼ぶことにする。

同時計算法では、流れ場と弾性変形に関する支配方程式から非線形連立方程式を導き、これをNewton

-Raphson法により直接解くことによって、流れ場と境界形状を求める。しかし、ここで取り扱うヤコビ行列は性質が悪く、反復法による収束性が良くない⁽²⁾⁽⁴⁾。また流れ場と弾性変形の未知数の数に等しい元数となる非常に大きなヤコビ行列が必要になるので計算資源が多く必要になるという欠点がある。

我々は同時計算法で取り扱う大きく性質の悪いヤコビ行列を避けることができる新しい計算法を既報において提案した⁽⁶⁾⁽⁷⁾。この計算法では、未知の流れ場を陰的に取り扱うことでNewton-Raphson法において直接取り扱う未知数の数を減らし、ヤコビ行列の性質を改善する工夫を行った。その結果、Newton-Raphson法の収束性が非常に改善された。しかし、Newton-Raphson法で用いるヤコビ行列を計算するためだけに、流れ場全体を何度も解かなければならないという欠点があった。

本論文では、このヤコビ行列の計算に関する欠点を改善するために、新しい簡易的なヤコビ行列の計算方法を二つ提案する。

既報で提案した弾性変形問題の計算法と本論文で提案するヤコビ行列の計算法を組み合わせることで弾性変形問題を容易に取り扱うことができるようになる。

* 原稿受付 2000年3月17日。

^{*1} 正員、電気通信大学大学院。^{*2} 正員、電気通信大学知能機械工学科(〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1)。

E-mail: kuroda@mce.nec.ac.jp

2. 記号

D^*	: 管路幅
U_{max}	: Poiseuille flow の最大速度
$\mathbf{b}$	: 壁面変位ベクトル
$d\mathbf{b}/dt$	: 壁面速度ベクトル
$d^2\mathbf{b}/dt^2$	: 壁面加速度ベクトル
$\mathbf{b}^{bs}$	: 壁面基本形状ベクトル
$\mathbf{b}^{wall}$	: 壁面形状ベクトル
$\mathbf{C}$	: 壁面減衰マトリクス
$\mathbf{K}$	: 壁面剛性マトリクス
$\mathbf{f}$	: 変形流体力ベクトル
$\mathbf{G}$	: N-R法のヤコビ行列
$\mathbf{h}$	: N-R法の残差ベクトル
Δ	: N-R法の修正ベクトル
$\mathbf{P}$	: パラメータベクトル
$\mathbf{U}$	: 流れ場
Γ	: 流れ場の境界
L	: 管路長
y_{lower}	: 下部壁面基本形状の y座標
y_{upper}	: 上部壁面基本形状の y座標
Δy_{min}	: y 方向最小格子幅
Δf	: 自由度に作用する微小流体力
Ψ	: 流れ場の計算手続き
Φ	: 変形流体力の計算手続き
$\rho(\mathbf{G})$	: ヤコビ行列のスペクトル半径 (固有値の最大値)
N	: 時間ステップ
n	: 弾性壁面の要素数

上付きの*は有次元量を示す。

3. 弾性変形問題の計算方法

第3章では既報⁹⁾で提案した弾性変形問題の計算方法の概略について説明する。

図1に計算対象となる流れ場を示す。本計算方法は外部流あるいは内部流のどちらにも用いることができるが、図1は内部流を例にしている。流れ場は剛体壁面境界 Γ_r 、弾性壁面境界 Γ_e 、流入境界 Γ_{in} 、流出境界 Γ_{out} で囲まれている。

弾性壁面の運動(変形)方程式は一般的には次のように書ける。

Fig. 1 Schematic representation for computational model

$$eq\left(\mathbf{P}, \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2}, \mathbf{f}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\mathbf{P}$ は運動方程式における弾性や減衰、質量などを示すパラメータベクトルである。 $\mathbf{b}$ と $d\mathbf{b}/dt$ 、 $d^2\mathbf{b}/dt^2$ は弾性壁面の変位ベクトルと速度ベクトル、加速度ベクトルである。 $\mathbf{f}$ は弾性壁面に作用する流体力ベクトルであり、今後これを変形流体力ベクトルと呼ぶことにする。

弾性壁面に作用している $N+1$ ステップにおける変形流体力ベクトル $\mathbf{f}^{(N+1)}$ から、弾性壁面の変形変位と変形速度、すなわち弾性壁面境界 Γ_e の境界条件が定められる。

流れ場の支配方程式としては連続の式(2)とNSの式(3)を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\text{grad}P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (3)$$

流れ場の境界条件といくつかの既知の流れ場($\mathbf{U}^{(N)}, \mathbf{U}^{(N-1)}, \dots$)を用いて、式(2)と式(3)から $N+1$ ステップでの未知の流れ場 $\mathbf{U}^{(N+1)}$ を計算することができる。これを以下の関係式で表現する。

$$\mathbf{U}^{(N+1)} = \Psi(\Gamma(\mathbf{f}^{(N+1)}), \mathbf{U}^{(N)}, \mathbf{U}^{(N-1)}, \dots) \quad \dots\dots\dots (4)$$

Ψ は式(1)から弾性壁面の変位 $\mathbf{b}$ と速度 $d\mathbf{b}/dt$ を定め式(2)と式(3)より未知の流れ場を求める手続きのことを表現している。また、未知の流れ場 $\mathbf{U}^{(N+1)}$ から弾性壁面に作用する未知の変形流体力ベクトル $\mathbf{f}^{(N+1)}$ が定められる。これを以下の関係式で表現する。

$$\mathbf{f}^{(N+1)} = \Phi(\mathbf{U}^{(N+1)}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

Φ は流れ場から弾性壁面に作用する変形流体力ベクトルを求める手続きのことを表現している。

ここで重要なのは弾性変形問題では式(4)と式(5)は常に同時に満たされなければならないことである。式(4)を式(5)に代入して形式的に以下のような非線形連立方程式を得る。

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}^{(N+1)}) = \mathbf{f}^{(N+1)} - \Phi(\Psi(\Gamma(\mathbf{f}^{(N+1)}), \mathbf{U}^{(N)}, \mathbf{U}^{(N-1)}, \dots)) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

この非線形連立方程式では未知の流れ場 $\mathbf{U}^{(N+1)}$ を変形流体力ベクトル $\mathbf{f}^{(N+1)}$ の陰関数として取り扱うことで未知数の次元を変形流体力ベクトル $\mathbf{f}^{(N+1)}$ の次元に縮小している。式(6)を満たす変形流体力ベクトル

ルを何らかの方法で定めることができれば式(1)より弾性壁面境界 Γ_e の境界条件を定め式(4)より流れ場を求めることができる。

式(6)は形式的に導かれた式であるので具体的に連立方程式の形に整理することはできない。しかし、与えられた $\mathbf{f}$ に対応する $\mathbf{h}$ を計算することはできるので Newton-Raphson 法を用いて数値的に式(6)を解くことができる。

ヤコビ行列 $\mathbf{G}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{G}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \dots\dots\dots (7)$$

Newton-Raphson 法では式(8)と式(9)を用いて非線形連立方程式(6)を満たす変形流体力ベクトル $\mathbf{f}^{(N+1)}$ を求める。ここで下つきの i は Newton-Raphson 法の反復回数を示す。

$$\Delta = -\mathbf{G}(\mathbf{f})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{f}_i^{(N+1)}) \dots\dots\dots (8)$$

$$\mathbf{f}_{i+1}^{(N+1)} = \mathbf{f}_i^{(N+1)} + \Delta \dots\dots\dots (9)$$

この反復過程が収束するとき未知の流れ場 $\mathbf{U}^{(N+1)}$ 、壁面変位ベクトル $\mathbf{b}^{(N+1)}$ 、壁面速度ベクトル $d\mathbf{b}/dt|^{(N+1)}$ も得られる。Newton-Raphson法の収束は条件にもよるが一般に非常に速くたかだか5, 6回の反復計算で十分 ($|\Delta| < 10^{-5} \sim 10^{-10}$) 収束する。

4. ヤコビ行列の高速計算法

第4章では新しく提案するヤコビ行列の高速計算法について説明する。

4-1 ヤコビ行列の目的 図2は Newton-Raphson 法における収束の様子を一変数の非線形方程式の場合について示している。ヤコビ行列は非線形方程式を満たす根 α の方向を指し示す役割を担っている。

Fig. 2 Convergence of Newton-Raphson method

通常の Newton-Raphson 法では反復する毎にヤコビ行列を再計算する。しかし本計算方法では、ヤコビ行列の計算負荷を軽減するため単位時間ステップ内の反復計算の間だけでなく、数 100 時間ステップの間は同じヤコビ行列を使用する簡便化 Newton-Raphson 法を用いる。

式(7)に示すヤコビ行列は式(6)を解析的に微分できないために二次精度中心差分を用いて数値的に計算する。

変形流体力ベクトルの j 番目の要素が微小流体力 Δf により $\mathbf{f}_j + \Delta f$ となっている状態を式(10)のように記述する。

$$\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j + \Delta f \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

このとき、ヤコビ行列の j 列目の列要素は式(11)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial f_j} &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j) - h(\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}_j)}{2\Delta f} \dots\dots\dots (11) \\ &= \frac{h(\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j) - h(\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}_j)}{2\Delta f} + O(\Delta f^2) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{h}(\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j)$ は式(6)の定義どおりに計算する。すなわち、 $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j$ が弾性壁面境界 Γ_e に作用するとき得られる流れ場から変形流体力ベクトル $\mathbf{f}$ を再計算して、もとの $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j$ から差をとったときの値となる。 $\mathbf{h}(\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}_j)$ も同様である。式(11)からヤコビ行列の j 列目の要素は全て計算できる。ただし、 $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_j$ や $\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}_j$ が弾性壁面境界 Γ_e に作用するとき得られる流れ場はヤコビ行列の計算で用いるだけである。

同様にして他の列要素も計算することでヤコビ行列が得られる。

今後、式(11)に基づき流れ場全体を計算領域としてヤコビ行列を計算する方法をオリジナル法と呼ぶことにする。

オリジナル法によるヤコビ行列の計算では、微小流体力 Δf が弾性壁面境界 Γ_e に作用したときの流れ場全体を計算する必要がある。しかし、Newton-Raphson 法で用いるヤコビ行列を計算する際に、微小流体力 Δf から流れ場が受ける影響は、微小流体力 Δf の作用点近傍の影響のみを考慮すれば十分な場合が多い。したがって、多くの場合では流れ場全体を計算領域としてヤコビ行列を計算する必要はないことになる。そこでこの局所的な変化のみに着目して高速にヤコビ行列を計算する方法を以下に提案する。

4・2 高速計算法1 パッチ法 パッチ法は、ヤコビ行列を計算するときの計算領域を流れ場全体から微小流体力 Δf の作用点近傍の領域に縮小することで、計算負荷を軽減する方法である。

図3にパッチ法の模式図を示す。微小流体力 Δf の作用点は黒の四角で示している。

パッチ法の計算方法は以下になる。まず、微小流体力 Δf を作用点に与え、その後、運動方程式(1)を時間積分して弾性壁面境界 Γ_e の壁面変位と壁面速度を求める。次にこれを用いて新しい境界適合格子(New grid)を形成する。そして、作用点近傍にパッチ領域を設定する。図3では補間点(白丸)と境界点(四角)で囲まれた領域をパッチ領域としている。白丸で示されたパッチ領域境界の値は元の流れ場(Old grid)を線形補間した値を用いる。このパッチ領域内でNS式を解き速度場を求める。新しく得られた速度場からNS式に基づいて境界点の圧力を再度計算する。

このようにすることで弾性壁面境界 Γ_e 近傍の流体が微小流体力 Δf から受ける影響を近似的に考慮した境界点の圧力が計算できる。この圧力を積分することで新しい変形流体力ベクトルが得られる。以上の手続きから $\mathbf{h}$ の計算を行い式(11)に基づいてヤコビ行列を計算する。

4・3 高速計算法2 境界法 パッチ法ではヤコビ行列を計算するときの計算領域を縮小することでヤコビ行列の計算を高速化した。境界法はさらに近似を進めて、パッチ領域を用いず弾性壁面境界 Γ_e の境界条件を更新するだけでヤコビ行列の計算を行う。

図4に境界法の模式図を示す。微小流体力 Δf の作用点は黒の四角で示している。

この作用点に微小流体力 Δf を与え、その後、運動方程式(1)を時間積分して弾性壁面境界 Γ_e の壁面変位と壁面速度を求める。次にこれを用いて新しい境界適合格子(New grid)を形成する。そして、NS方程式にもとづいて境界点(四角)の圧力を計算する。このとき白丸で示された部分の速度や圧力も必要になるがこれらは元の流れ場(Old grid)を線形補間した値を近似値として用いる。そして境界点の圧力を積分することで新しい変形流体力ベクトルが得られる。以上の手続きから $\mathbf{h}$ の計算を行い式(11)に基づいてヤコビ行列を計算する。

微小流体力 Δf による弾性壁面境界 Γ_e の壁面変位と壁面速度は運動(変形)方程式から陽的に計算できる。また、境界の圧力は新しい壁面速度と元の速度場、圧力場の線形補間値を利用してNS方程式から陽的に求めることができる。ヤコビ行列を境界法で計算するとすべての計算が陽的な計算ですむので、従来の計算法に比べると非常に高速化できる。

Fig. 3 Schematic representation for patch method

Fig. 4 Schematic representation for boundary method

4・4 高速計算法の適用条件 Newton-Raphson法で用いるヤコビ行列を計算するとき微小流体力 Δf から流れ場が受ける影響は、微小流体力 Δf の作用点近傍の影響のみを考慮すれば十分な場合が多い。しかし、取り扱う問題によっては、ヤコビ行列を計算するときに微小流体力 Δf によって流れ場が受ける影響が大きすぎるため、パッチ法で使用するパッチ領域の大きさが非常に大きくなったり、境界法では対応できなかったりする可能性がある。

高速計算法を用いてNewton-Raphson法で使用するヤコビ行列を計算するとき、パッチ法と境界法の選択やパッチ領域の大きさは取り扱う問題に応じて試行錯誤的に定めることになる。

5. 計算の流れ

図5に計算の流れを示す。本論文で提案する高速計算法はNewton-Raphson法で用いるヤコビ行列の計算を高速化する方法である。

式(11)に示すヤコビ行列の定義をそのまま用いたヤコビ行列の計算方法(オリジナル法)では、ヤコビ行列を計算するのに流れ場全体の計算が弾性変形の自由度数だけ必要となる。そこで、ヤコビ行列を簡易的に高速計算する計算方法としてパッチ法と境

Fig. 5 Flow graph for computational method

界法を提案した。

解析対象としている流れ場は式(8)右辺における残差ベクトル h の計算時に得られる流れ場であり、ヤコビ行列の計算で用いる流れ場は、解析対象としている流れ場と関係ないことに注意しなければならない。

6. 計算例 壁面が弾性変形する管内流

計算例として狭窄部を持つ弾性管内流の数値計算を行なう。

ところで、壁面が弾性変形する管内流を数値計算するには、本論文で取り扱う同時計算法以外に流体と構造の計算を交互に行う方法もある。しかし、本論文と同じ計算条件のもとでこの計算方法を用いると、非圧縮の条件を満たして時間積分することができず、計算を安定に実行することができなかった。

6.1 弾性壁面のモデル化と計算格子 図6に弾性変形する壁面の計算モデルを示す。

例えばコラプシブルチューブのような弾性管は、収縮時と膨張時では変形量と流体力の間に強い非線形性を示す。しかし本論文はヤコビ行列の高速計算法の評価が目的であるので線形弾性特性に簡単化して計算した。

弾性壁面は n 個の要素に分割してモデル化される。要素個々の質量は無視しており要素間の運動に対する減衰と弾性のみを考慮してモデル化した。また変形は y 方向のみに限定しており x 方向には変形しないものと仮定している。この仮定によって弾性壁面の取り扱いが容易になる。

Fig. 6 Schematic representation for elastic wall

管路の上部弾性壁面と下部弾性壁面にそれぞれ変形の自由度を n 個づつ持たせている。各弾性壁面要素に作用する流体力とその変位をそれぞれ $2n$ 次元の変形流体力ベクトル $f=(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ と壁面変位ベクトル $b=(b_1, b_2, \dots, b_{2n})$ として定義する。

図6のようにモデル化した弾性壁面の運動(変形)方程式はマトリクスを用いて整理すると次のようになる。

$$C \frac{db}{dt} + Kb = f \quad \dots \dots \dots (12)$$

式(12)は式(1)に相当する方程式である。 C と K は壁面減衰マトリクスと壁面剛性マトリクスである。式(12)を時間積分することで壁面変位ベクトル b が求まる。壁面の基本形状は b^{bas} としてあらかじめ与えられる。そして壁面変位ベクトル b と b^{bas} の和で壁面の形状 b^{wall} が定まる。

$$b^{wall} = b + b^{bas} \quad \dots \dots \dots (13)$$

壁面の基本形状は以下のようにして作成した。
壁面下部

$$y_{lower} = 0 \quad \dots \dots \dots 0 \leq x < x_1$$

$$y_{lower} = D^* a \sin^2 \left(\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \quad \dots \dots \dots x_1 \leq x \leq x_2$$

$$y_{lower} = 0 \quad \dots \dots \dots x_2 < x \leq L$$

壁面上部

$$y_{upper} = D^* - y_{lower} \quad \dots \dots \dots 0 \leq x \leq L$$

ただし $a=0.2$, $x_1=9D^*$, $x_2=12D^*$, $L=30D^*$ である。

図7に基本形状の模式図を示す。流入出部の領域1と領域3の部分は剛体壁面で構成されており中央部の領域2が先に述べた弾性壁面で構成されている。

Fig. 7 Basic form of elastic tube

それぞれの領域の長さは領域1が $6D^*$ 、領域2が $9D^*$ 、領域3が $15D^*$ である。

y方向の最小格子幅は境界層内に格子点が数点入るように

$$\Delta y_{\min} \approx \frac{0.1}{\sqrt{Re}} \dots\dots\dots (14)$$

を基準として決定する。Re=100における計算では $\Delta y_{\min}=0.01$ とした。

数値計算は管路幅 D^* とPoiseuille Flowの最大流速 $U_{\max}$ をそれぞれ代表長さとして無次元化して行なう。

6・2 計算条件 流れ場の計算には移動境界適合座標系を使用したMAC法を用いた⁶⁾。速度境界条件として流入側でPoiseuille Flow、流出側でSommerfeld放射条件、剛体壁面では粘着条件、弾性壁面では壁面速度に一致する速度を与えた。圧力境界条件は境界の移動を考慮したNS方程式を陽的に解いて用いた。

流入流量は一定としている。管の外部圧力は流入部($x=0, y=0.5$)の圧力と等しくしている。格子数はx方向に121点、y方向に31点とっている。計算格子には不等間隔格子を用いて格子数を節約している。格子形状は弾性壁面の変形にあわせて変化する。弾性壁面の運動方程式は四次精度のルンゲクッタ法を用いて時間積分した。

その他の計算パラメータを表1に示す。壁面減衰定数 c は初期計算時の過大な変形速度を防ぐために設定値の数十倍の値から適当な指数関数を用いて無次元時間 $t=5$ 以降で設定値になるようにした。

ヤコビ行列の計算方法にはオリジナル法、パッチ法、境界法それぞれを用いた。なおパッチ法のパッチ領域は 21×11 である。ヤコビ行列は時間ステップが50ステップ経過する毎に再計算を行う。

Table 1 Computational parameters

Number of wall element	$n=49$
Reynolds number	$Re=100$
Time interval	$dt=0.005$
Spring modulus of wall element	$k=8000$
Damping modulus of wall element	$c=80$

6・3 計算結果の比較 表2にヤコビ行列の計算時間の比較を示す。オリジナル法を1として比較している。高速計算法を用いることによって、弾性変形の自由度数が $2n=98$ 程度のときは5倍程度に高速化できる。弾性変形の自由度数が大きくなればなるほど高速化が達成できる。弾性変形の自由度数が 10^3 あるいは 10^4 程度になると、オリジナル法では現実的な計算時間でヤコビ行列を計算することは不可能になる。

ヤコビ行列をどのような方法で計算したとしても最終的に得られる流れ場はどれもNewton-Raphson法の収束条件の範囲内において一致しなければならない。これを確かめるために弾性壁面の時間変化と速度プロファイルを比較する。

図8は下部壁面の狭窄突起頂点y座標($x=10.5$)の時間変化を比べたものである。表2は $t=100$ における同じ位置のy座標を比べている。どちらも非常に良く一致している。

流体力による弾性変形問題では時間刻みを適当な大きさにすることで前の時間ステップでの解 $\mathbf{f}^{(n)}$ が現在の時間ステップにおける解 $\mathbf{f}^{(n+1)}$ の近傍に存在していることを期待できる。そこで本計算法では前の時間ステップでの解をNewton-Raphson法の初期値として用いた。高速計算法の適用によってヤコビ行列にわずかな差が生じたとしても、解の十分近傍にある初期値を使用することによって最終的な収束解はすべて同じものになることが期待できる。今回の計算ではNewton-Raphson法の収束条件として 10^{-6} を用いた。そのため、どの計算方法でヤコビ行列を計算しても変形流体力ベクトルの収束解は少なくとも6桁

Table 2 Comparison of computational time and wall position at $x=10.5$

Computational method	Time ratio	Wall position
Original method	1	0.26590892339
Patch method	0.21	0.26590892029
Boundary method	0.16	0.26590892084

Fig. 8 Comparison of time history of wall position

Fig. 9 Velocity profile of $u(y)$ at $t=90$

Fig. 10 Comparison of order of convergence

までは一致している。その結果、弾性壁面の位置は少なくとも6桁までは一致することが予想できる。

図9は $t=90$ における速度プロファイル $u(y)$ をいくつかの x 座標において比較したものである。どれも非常に良く一致していることがわかる。

6・4 Newton-Raphson 法の収束性 式(15)は Newton-Raphson 法の収束特性を示している。ここで α は真の解（連立方程式の根）， M は定数である。

$$|f_{i+1} - \alpha| \leq M |f_i - \alpha|^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)に示すように本来の Newton-Raphson 法は二次収束をする。しかし本計算方法ではヤコビ行列の計算負荷を軽減するために簡単化 Newton-Raphson 法を使用する。そのために本来の Newton-Raphson 法が持っていた二次収束性は失われている。

これに加えてヤコビ行列をパッチ法や境界法のような高速計算法で計算した場合には更に収束性が低下する可能性がある。

Fig. 11 Comparison of spectral radius

図10はヤコビ行列の計算方法を変えたときに、それぞれの計算法における収束の様子を示したものである。無次元時間 $t=95$ から 1000 ステップ分の計算を行い、その残差の平均値をプロットした。これを見るとヤコビ行列をオリジナル法で計算した簡単化 Newton-Raphson 法では収束次数が 1.5 次程度に低下しているのがわかる。またヤコビ行列の計算にパッチ法、境界法を使用した簡単化 Newton-Raphson 法の収束次数はオリジナル法とほとんど差が見られず、本計算例ではこれら高速計算法が非常に有効なことが良くわかる。パッチ法と境界法の収束次数にも差はほとんど見られないことから、今回の計算例では計算量の最も少ない境界法を用いるのがもっとも良いと思われる。

6・5 ヤコビ行列のスペクトル半径 オリジナル法、パッチ法、そして境界法で計算したヤコビ行列を比較するためにそれぞれのスペクトル半径 $\rho(G)$ を比較してみた。

図11は $t=90$ から $t=100$ までの計算におけるヤコビ行列のスペクトル半径 $\rho(G)$ の比較である。パッチ法のほうが境界法よりもオリジナル法に近い値が得られることがわかる。しかし、オリジナル法、パッチ法、そして境界法で計算したヤコビ行列のスペクトル半径 $\rho(G)$ にはほとんど差がない。このことから今回の計算例ではヤコビ行列をどの計算方法で計算しても収束性に大きな差は見られないことがわかる。

7. まとめ

本論文では流体力により弾性変形する境界が数多くの自由度を持つ場合の流れ場を数値計算するためにヤコビ行列の高速計算法を提案した。

実際の計算例として狭窄部を持つ弾性管内流の計算を行った。新しく提案したいくつかの高速計算法でヤコビ行列を計算しても収束性はさほど低下しな

いことを示した。また収束条件の範囲内で一致した流れ場が得られることを確認した。

今回の計算例では計算負荷と収束性のバランスを考えると境界法を用いてヤコビ行列を計算するのがもっとも良い。

今回提案したヤコビ行列の高速計算法を用いることで流体力により弾性変形する境界が数多くの変形自由度を持つような流れ場でも容易に取り扱うことができるものと期待される。

文 献

- (1) M.P.Rast, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.19 (1994), 1115-1135.
- (2) O.Ghattas, X.Li, J. Comput. Phys., Vol.121 (1995), 347-356.
- (3) M.Heil, T.J.Pedley, J. Fluids Struct., Vol.10 (1996), 565-599.
- (4) F.F.Felker, AIAA Journal, Vol.31, No.1 (1993), 148-153.
- (5) X.Y.Luo, T.J.Pedley, J. Fluid Mech., Vol.314 (1996), 191-225.
- (6) 田中太・廣瀬義孝・黒田成昭, 日本流体力学会年会 99 講演集, (1999-7), 9-10.
- (7) 田中太・黒田成昭, 機論, 66-648, B(2000), 1967-1974.
- (8) 大羽秀幸・黒田成昭, 機論, 58-549, B(1992), 1446-1452.