グリッドレス法による2階微分の評価とその精度*

森 西 晃 嗣^{*1}Gridless Approximation for the Second Derivatives
and Its Accuracy OrderKoji MORINISHI^{*2}^{*2} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto shi, Kyoto, 606 8585 Japan

Two gridless type methods for evaluating the second derivatives are presented. In the first method, the second derivatives are evaluated with evaluating the first derivatives of the derivatives. On the other hand, Laplace operators as well as the second derivatives are directly evaluated in the second method. The methods can be applied to numerical solutions of any partial differential equations on Cartesian grids, structured grids, and unstructured grids. In this paper, the methods are applied to Poisson equations. Numerical solutions are obtained and compared with analytic solutions on several levels of point density so that grid convergence studies of L_2 errors are carried out. The second order accuracy is confirmed for both the gridless methods, while the directly evaluating method of the Laplace operator is more effective than the successive evaluating method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Grid Generation, Gridless Method, Numerical Error, Poisson Equation

1. 序 論

計算領域内に点を分布させ、その各点において、まわりの点群(クラウド)内での関数値と予め定められた係数との線形結合により、関数の微分値を求めるグリッドレス法⁽¹⁾は、微分値を近似する点で有限差分法と類似している。ただし、従来の有限差分法が構造格子に対してのみ適用可能であるのに対して、グリッドレス法は、あらゆる格子点や点分布に対して適用可能である。著者は、従来より圧縮性オイラーおよびナビエ・ストークス方程式に対するグリッドレス解法を研究してきたが^{(2)~(4)}、基本的には、任意の偏微分方程式に対してグリッドレス法は応用可能である。しかしながら、グリッドレス法を従来の有限差分法と同様な普遍的数値解析手法として利用するためには、まだまだ多くの疑問点や問題点が残されている。

グリッドレス法の開発に際しては、等間隔のデカルト格子点や滑らかな構造格子点においては従来の有限差分法と同程度の近似精度(現在のところ2次精度)が得られ、滑らかな非構造格子点などに対しても同様の近似精度が得られることを期待している。しかし、

有限差分法の近似精度がテーラー展開などにより数学的に明らかなのに対して、グリッドレス法の近似精度を数学的に明らかにするのは、特定の点配置に対して適用した場合を除いて、困難である。一方、有限差分法の近似精度は、格子間隔を規則的に半減させた一連の格子上で、解析解が存在する適当な検定問題の数値解を求め、その誤差の格子収束性を調べることにより、数値実験的に確認することが出来る。したがって、グリッドレス法についても、同様の数値実験を種々の格子点に対して行なうことにより、その実効精度の検証が期待出来る。

また、圧縮性ナビエ・ストークス方程式の粘性項は、一般に粘性係数自体も場の関数であるため、流速の1階微分値と粘性係数の積を再度微分して評価するのが通例であり、グリッドレス法による1階微分の評価法が確立していれば十分である。しかしながら、グリッドレス法を非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の粘性項やポアソン方程式に適用する場合、2階微分あるいはラプラス演算子を直接評価の方が経済的と思われる。すなわち、任意の偏微分方程式にグリッドレス法を応用する場合、経済的な高階微分の評価法、とりわけ2階微分の評価法を確立することが非常に重要である。

* 原稿受付 2001年4月17日。

^{*1} 京都工芸繊維大学工学学部(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: morinisi@ipc.kit.ac.jp

Fig. 1 Cloud $C(i)$ for point i .

そこで、本論文では、最初に、グリッドレス法による2階微分の評価法として、1階微分を2度施すことにより評価する方法と2階微分あるいはラプラス演算子を直接評価する方法を提案する。次に、これらの方法を、解析解の存在するポアソン方程式の数値解法に応用し、格子間隔を規則的に半減させた一連の構造格子や非構造格子において数値解を求め、その誤差の格子収束性を調べることににより、グリッドレス法の実効精度を検証する。グリッドレス法により離散化したポアソン方程式の解法には、単純な GMRES 法⁽⁵⁾を用いる。ただし、グリッドレス法による2階微分の評価法とその実効精度の検証を主眼とするため、前処理などの GMRES 法に対する収束加速は特に考慮しない。

2. 1階微分の評価法

最初に、計算領域内に分布させた各点上で、任意の関数 f の1階微分をグリッドレス法により評価する方法を示す。いま、図1の点 i において、この関数の1階微分値を、点 i を含むまわりの点群（クラウド： $C(i)$ ）での関数値の線形結合として、次のように近似する。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \sum_{k \in C(i)} a_{ik} f_k \quad (1)$$

ここで、添え字 k はクラウド $C(i)$ に含まれる点を示し、和は、点 i も含めたクラウド内の全点の値に対して取る。ただし、 f が定数の場合を考慮すると、係数 a_{ik} は、次の条件を満たす必要がある。

$$\sum_{k \in C(i)} a_{ik} = 0 \quad (2)$$

したがって、式(1)は、次式のように書き換えることが出来る。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \sum_{k \in C(i)} a_{ik} (f_k - f_i) \quad (3)$$

同様に、クラウド内の各点での関数値に代わり、次のような中点での値を用いる近似も可能である。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \sum_{k \in C(i)} a_{ik} f_{ik} \quad (4)$$

ここで、 f_{ik} は点 i と点 k の中点での関数の値である。この係数にたいして、やはり、次式が成り立つ。

$$\sum_{k \in C(i)} a_{ik} = 0 \quad (5)$$

実際の数値計算においては、最初に計算領域に分布させた各点に対してクラウドを決定すると、係数の値を予め計算し記憶することが出来る。ここでは、次のような1次式に対する重み付き最小自乗法を用いて、係数の値を計算する。

$$f = a\tilde{x} + b\tilde{y} + c \quad (6)$$

ただし、

$$\tilde{x} = x - x_i, \quad \tilde{y} = y - y_i,$$

で、重みの値は、次のように決定する。

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & r_k \leq \bar{r}_i \\ \left(\frac{\bar{r}_i}{r_k}\right)^2 & r_k > \bar{r}_i \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 r_k は、次のような相対距離

$$r_k = \sqrt{\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2} \quad (8)$$

で、 $\bar{r}_i$ は、各点ごとに決める基準距離で、ここでは、最近接点までの距離とする。

なお、等間隔のデカルト格子点において、その点と前後左右の点でクラウドを構成し、上記の係数を求めると、近似式(1)や(3)および(4)は、全て、従来の2次精度中心差分近似に帰着する。

3. 2階微分の評価法

3.1 1階微分による評価 ここでは、2階微分値を、次のように、1階微分の連続と見なして評価する方法を考える。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (9)$$

この式に、近似式(4)を適用すると、次式を得る。

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \sum_{k \in C(i)} a_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ik} \quad (10)$$

ここで、中点での f の1階微分値を、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{ik} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_k \right) \quad (11)$$

のよな単純な算術平均で近似すると、例えば、等間隔のデカルト格子点では、

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{(2\Delta x)^2} \quad (12)$$

となり、いわゆる奇数点と偶数点での数値解の分離を引き起こす。そこで、テイラー展開、

$$f_k - f_i = \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{ik} + \Delta y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{ik} + \cdots \quad (13)$$

を利用して、中点での1階微分値を次のように求める。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{ik} &= \frac{\Delta x}{\Delta s^2} (f_k - f_i) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta s^2} \left[\Delta y \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_k \right) \right. \\ &\left. - \Delta x \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_k \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_k - x_i, \quad \Delta y = y_k - y_i, \\ \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2, \end{aligned}$$

である。

すなわち、1階微分近似を用いる方法では、最初に全計算点で、式(3)あるいは(4)を用いて1階微分値を計算する。次に、それらの値を式(14)に代入し中点での1階微分値を求め、式(10)より2階微分値を計算する。

3.2 2階微分の直接評価 2階微分を、1階微分と同様に、クラウド内での関数の線形結合として、次のように、直接評価することも可能である。

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \sum_{k \in C(i)} b_{ik} f_k \quad (15)$$

係数 b_{ik} の決め方には種々の方法があるが、例えば、関数 f として、次のような試験関数を考えれば、

$$1, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}\tilde{y}, \tilde{x}^2, \tilde{y}^2, \dots$$

連立方程式、

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k \in C(i)} b_{ik} &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} b_{ik} \tilde{x}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} b_{ik} \tilde{y}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} b_{ik} \tilde{x}_k \tilde{y}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} b_{ik} \tilde{x}_k^2 &= 2 \\ \sum_{k \in C(i)} b_{ik} \tilde{y}_k^2 &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \right. \quad (16)$$

が得られる。いま、クラウドの構成点数を N 、試験関数の個数を M とすると、 x と y の次数の対称性を考慮した上で $M \geq N$ を満たすように試験関数を選ぶと、連立方程式(16)を QR 分解などで予め解くことにより、最小自乗法的に係数 b_{ik} を決定出来る。

同様に、ラプラス演算子を、

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_i = \sum_{k \in C(i)} c_{ik} f_k \quad (17)$$

のように近似すると、係数 c_{ik} は、次の連立方程式を QR 分解などで予め解くことにより求まる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k \in C(i)} c_{ik} &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} c_{ik} \tilde{x}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} c_{ik} \tilde{y}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} c_{ik} \tilde{x}_k \tilde{y}_k &= 0 \\ \sum_{k \in C(i)} c_{ik} \tilde{x}_k^2 &= 2 \\ \sum_{k \in C(i)} c_{ik} \tilde{y}_k^2 &= 2 \\ \dots & \end{aligned} \right. \quad (18)$$

4. 等間隔デカルト格子での精度検証

最初に、等間隔のデカルト格子点を利用してグリッドレス法の精度検証を行なう。検定問題として、ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \quad (19)$$

を考える。計算領域は、一辺が1の正方形内、すなわち、

$$0 \leq x, y \leq 1$$

Fig. 2 Solution of Poisson equation (19).

Fig. 3 L_2 error vs. mean point spacing.

とし、境界では、解析解

$$f = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y) \quad (20)$$

を与える。解析解の分布は、図2のようになる。数値実験は、最も粗い格子を 9×9 とし、順次細分化した 17×17 , 33×33 , 65×65 , および、 129×129 の5段階の格子点で、それぞれ数値解を求め解析解との L_2 誤差の格子収束性より、グリッドレス法の実効精度を検証する。クラウドの構成点は、2次精度中心差分法と同様に、自点と格子線分で結ばれた隣の点までとする。また、ポアソン方程式の解法は、全ての内点の初期値をゼロとし、単純な(前処理無し) GMRES 法⁽⁵⁾により残差が初期の値より8桁下がるまで緩和計算する。

図3に、点(格子)間隔と L_2 誤差の関係を示す。図中の記号は、○印(Method I)は、式(10)と(14)を用いた1階微分による評価の結果であり、□印(Method II)は、式(17)を用いたラプラス演算子の直接評価の結果である。ただし、連立方程式(18)の元数は、低次の6とする。また、比較のため、+印(Finite Dif.)として、従来の有限差分法による結果も合わせて示してある。図の直線は、3番目の細分化以降の密な格子における結果に対して最小自乗法を適用して描いたものである。図に示した様に、3種類の計

Fig. 4 Comparison of L_2 error using Eq.(11) and Eq.(14).

算法による結果は完全に一致し、直線の傾きは2.02である。したがって、等間隔のデカルト格子点に対しては、ここで提案したグリッドレス法による2階微分の評価法は、従来の2次精度中心差分法と全く同等で、2次精度である。

図4は、式(10)の1階微分の評価に式(11)の単純な算術平均を用いた場合と式(14)を用いた場合の比較を示す。式(12)からも推測出来るように、単純な算術平均を用いても、ポアソン方程式の解となるような連続(滑らか)な関数に対しては、2次精度となるが、式(14)を用いた場合の誤差のオーダーを $O[\Delta x^2]$ とすると、式(11)を用いた場合の誤差のオーダーはおおよそ $O[(2\Delta x)^2]$ と成っている。これより、式(14)を用いることの妥当性が確認出来る。

5. 構造および非構造格子での精度検証

ここでは、構造、半構造、および、非構造格子点上で、解析解の存在するラプラス方程式の数値解をグリッドレス法により求め、得られた数値解と解析解から L_2 誤差を求め、その格子収束性によりグリッドレス法の実効精度を検証する。対象とする検定問題として、半径が1の円柱を過ぎるポテンシャル流れを考える。この流れの流れ関数は、ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

の解として、循環が無い場合は、

$$f = U_\infty y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \quad (22)$$

で与えられる。ここで、 U_∞ は、一様流速である。計算領域を、半径4.8の円内、すなわち

$$r_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2 \quad : \quad r_1 = 1.0, \quad r_2 = 4.8$$

とすると、流れ関数の分布は、図5のようになる。

Fig. 5 Stream function about a circular cylinder.

Fig. 6 Structured grid around a circular cylinder.

Fig. 7 L_2 error vs. mean point spacing.

ラプラス方程式の数値解法は、境界点での流れ関数の値は解析解で固定し、内点の流れ関数の初期値には一様流の値を与え、単純な GMRES 法により緩和計算し、残差が初期の値より 8 桁下がった時点で収束解と判定する。

5.1 構造格子での検証 最初に、図 6 に示すような構造格子に対して、グリッドレス法の精度検証を行なう。図の格子は、各四角形セルの midpoint で半径方向と円周方向の長さがおおよそ等しくなるように、代数的に形成した格子点数 16×5 (総点数 80) の構造格子である。ここでは、この格子を最も粗い格子とし、細分化により 32×9 , 64×17 , 128×33 , および、 256×65

(総点数 16640) の 5 段階の格子を形成し、それぞれの格子で得られる数値解から L_2 誤差を求め、その格子収束性よりグリッドレス法の近似精度を見積もる。各点のクラウドは、自分自身と格子線分で結ばれた隣の点までとし、全ての内点のクラウドは 5 点で構成する。ラプラス演算子の直接評価法の係数 c_{ik} 求める連立方程式 (18) は、低次の 6 元とする。

また、比較のために、一般座標変換を行なったラプラス方程式

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial f}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad (23)$$

に対して、2 次精度中心差分法を適用した数値計算結果も示す。ここで、各係数は、

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ \beta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \gamma &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma = -\frac{1}{J} \left(D_x \frac{\partial y}{\partial \eta} - D_y \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)$$

$$\tau = \frac{1}{J} \left(D_x \frac{\partial y}{\partial \xi} - D_y \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

で与えられる。ただし、

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (25)$$

および、

$$\begin{aligned} D_x &= \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \\ D_y &= \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (26)$$

である。

図 7 に、得られた L_2 誤差の格子収束性を示す。図の縦軸は、誤差を示し、横軸は平均の点間隔を示す。記号は、○ 印 (Method I) は、式 (10) と (14) を用いた 1 階微分による評価法の結果であり、□ 印 (Method II) は、式 (17) を用いたラプラス演算子の直接評価法の結果である。また、+ 印 (Finite Dif.) は、式 (23) の有限差分法による結果を示す。図の実線は、3 番目の細分化以降の密な格子における結果に対して最小自乗法を用いて描いたものである。3 種類の手法は、直線の傾きがどれもおよそ 2.0 で、2 次精度の格子収束

Fig. 8 Semistructured grid around a circular cylinder.

Fig. 9 L_2 error vs. mean point spacing.

性を示すといえる。なお、誤差の絶対値は、この例の場合、1階微分の連続による評価法が最も小さく、ラプラス演算子の直接評価法による誤差が最も大きい。ただし、ラプラス演算子の直接評価法による解法は、式(17)の係数 c_{ik} を予め求めてしまえば、式(23)～(26)を用いる従来の有限差分法と比較しても、非常に簡単に魅力的である。

5.2 半構造格子での検証 次に、図8に示するような半構造格子に対して、グリッドレス法の近似精度検証を行なう。この格子は、前節の図6の格子から、半径方向に偶数番目の点を円周方向に半格子移動することにより解析的に作成した半構造格子で、全ての内点は、6本の格子線分を持っている。したがって、各点のクラウドを、自分自身と格子線分で結ばれた隣の点までとすると、全ての内点のクラウドは7点で構成される。そこで、ラプラス演算子の直接評価法(17)の係数 c_{ik} を求める連立方程式(18)は、低次の8元とする。

図9に、1階微分の連続による評価法とラプラス演算子の直接評価法によりそれぞれ得られた、 L_2 誤差の格子収束性を示す。この場合も、両者のデータの勾配は、およそ2.0となり、2次精度の格子収束性を示している。また、この半構造格子は、前節の構造格子

Fig. 10 Unstructured grid around a circular cylinder.

Fig. 11 L_2 error vs. mean point spacing.

において、半径方向の偶数番目の点を円周方向に半格子回転することにより作成したが、得られた数値解の誤差は、構造格子の場合より、絶対値が20%から60%小さくなっている。

5.3 非構造格子での検証 この章の最後に、図10に示するような非構造格子に対して、グリッドレス法の近似精度検証を行なう。図の格子は、単純なドロネ三角形分割⁽⁶⁾により作成した総点数80の非構造格子である。ここでは、この格子を最も粗い格子とし、全ての三角形を順次細分化することにより、同様な5段階の非構造格子を作成する。最密格子の総点数は、前述の構造および半構造格子の場合と同様に、16640である。各点のクラウドを、自分自身と格子線分で結ばれた隣の点までとすると、この格子系における内点のクラウドの構成点数は、最少が6点、最多が8点となる。そこで、ラプラス演算子の直接評価法(17)の係数 c_{ik} を求める連立方程式(18)の元数は、クラウドの構成点数に応じて低次の8元または10元とする。これは、QR分解が基本的に最小自乗法と同様で、必要以上に条件式を多くしても近似精度の改善にはつながらないので、元数は未知数の数に応じて低次の項から近似の対称性を維持する値にするためである。

Fig. 12 Unstructured grid on a spherical surface.

図 11 は、1 階微分の連続による評価法とラプラス演算子の直接評価法に対して得られた L_2 誤差の格子収束性を示す。最も粗い格子でのデータは大きく外れているが、3 番目以降の密な格子に対して得られた両者のデータの勾配は、およそ 2.0 となり、この非構造格子の場合も、2 次精度の格子収束性を示していると言える。また、図 7 や 図 9 と比較して、この非構造格子で求めた 1 階微分の連続による評価法 (Method I) の誤差は、構造格子や半構造格子で求めた誤差よりも絶対値が小さいことが分かる。これは、格子をドロネ三角形分割により作成する際に、文献⁽⁶⁾に従って点分布の平滑化を行なっていることに起因する可能性が有る。

6. 球面上のポアソン方程式での検証

海流や気流の簡単な数学モデルは、球面上あるいは球殻内で記述された一連の偏微分方程式であるため、球面座標系で記述された偏微分方程式に対する有効な数値計算法の研究は興味深い [7-10]。ここでは、次式で示される球面上のポアソン方程式を用いてグリッドレス法の精度検証を行なう。

$$\frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \zeta \quad (27)$$

いま、地球を想定すると、 a は地球の半径、 ϕ は経度であり、 θ は赤道から北極方向を正とした緯度である。また、 ζ を文献⁽⁷⁾で与えられた Rossby-Haurwitz 波の渦度

$$\zeta = 2\omega \sin \theta - K(R^2 + 3R + 2) \sin \theta \cos^R \theta \cos R\phi \quad (28)$$

とすると、流れ関数 f の解析解は、

$$f = -a^2 \omega \sin \theta + a^2 K \sin \theta \cos^R \theta \cos R\phi \quad (29)$$

となる。ただし、 $R = 4$ で、

$$a = 6.37122 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\omega = K = 7.848 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

である。数値解は、全球面上の流れ関数の初期値をゼロとして単純な GMRES 法による緩和計算で求める。

球面座標系における数値計算では、次に示す様な、いわゆる極問題⁽⁹⁾を如何に回避するかが大きな問題となる。

- 赤道付近で経度方向の格子密度を維持しようとすると極付近で格子が過密となり数値計算の困難を来す。
- 極が方程式 (27) の特異点に成る。

グリッドレス法では、点の配置に対する自由が高いため、例えば、図 12 のような非構造格子点を用いれば、赤道付近も極付近もほぼ均等に分解できる。また、座標系自体も各点で独立に決めても計算上支障が生じないので、容易に特異点を除去出来る。例えば、図 12 で、球の中心から北極の方向を z 軸とし、経度がゼロの方向を x 軸とすると、赤道から中緯度まで ($|\theta| \leq 45^\circ$) は z 軸を基軸とした球面座標系で、中緯度から極まで ($|\theta| \geq 45^\circ$) を x 軸を基軸とした球面座標系で、それぞれ、表示すると、どちらの座標系でも式 (27) は同じ形をしているが、特異点は計算領域には存在しなくなる。そこで、最初に各点で各自の座標系に基づいて

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} \Big|_i = \sum_{k \in C(i)} a_{ik} (f_k - f_i) \quad (30)$$

や

$$\frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \sum_{k \in C(i)} c_{ik} f_k \quad (31)$$

などの係数を求めてしまえば、以後は、各点の座標系にかかわらず全点で式 (27) の解法を同一に行なえる。

誤差の格子収束性の検証は、図 12 の格子を最も粗い格子 (総点数 770) とし、全ての三角形を順次細分化することにより得られる同様な 5 段階の非構造格子を用いて行なった。最密格子の総点数は 196610 である。図 13 は、2 番目に粗い格子 (総点数 3074) 上で式 (31) を用いて得られた数値解 (実線) と解析解 (破線) の比較を示す。得られた数値解は解析解を良く再現している。図 14 に 1 階微分の連続による評価法と球面上のラプラス演算子の直接評価法によりそれぞれ求めた数値解の L_2 誤差の格子収束性を示す。両者の誤差の値はほぼ同じで、その勾配がおよそ 2.0 であることより、ここで用いたグリッドレス法はどちらも 2 次精度であることが確認出来る。ただし、球面上のラプラス演算子を式 (31) を用いて直接評価する方

Fig. 13 Stream function of Rossby-Haurwitz wave.

Fig. 14 L_2 error vs. mean point spacing.

法は、係数 c_{ik} を予め求めてしまえば、演算量も少なく非常に簡単で、実際に計算時間は1階微分の連続による評価法の半分以下である。

7. 結 論

グリッドレス法により2階微分値を求める方法として、1階微分を求める操作を2回施す方法と、2階微分あるいはラプラス演算子を直接近似する方法を提案し、ポアソン方程式を用いて近似誤差の格子収束性を検証した結果、次のような結論が得られた。

- (1) 2種類のグリッドレス法は、等間隔のデカルト格子点では、従来の有限差分法と全く同等の結果を与えることが確認できた。
- (2) グリッドレス法は、従来の有限差分法と異なり、構造格子点や非構造格子点などのあらゆる格子点に対して適用可能であり、近似誤差は2次精度で

あった。

- (3) グリッドレス法は、点分布や各点での座標系の選択に高い自由度が有り、球面座標においても極問題が容易に除去され2次精度の解が得られた。
- (4) ラプラス演算子を直接近似するグリッドレス法は、取り扱いが容易で経済的であることが確認出来た。本研究の一部は、科学研究補助金(12650167)を得て行なった。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) Morinishi, K., Gridless Type Solver - Generalized Finite Difference Method -, Computational Fluid Dynamics for the 21st Century, Springer (2001), 43-58.
- (2) Morinishi, K., Gridless Type Solution for High Reynolds Number Multielement Flow Fields, AIAA Paper 95-1856 (1995).
- (3) Morinishi, K., A Gridless Type Solver for Parallel Simulation of Compressible Flow, Parallel Computational Fluid Dynamics, Elsevier (1999), 293-300.
- (4) 森西, 圧縮性流れに対する風上グリッドレス型解法, 日本機械学会論文集 (B 編), 66 (2000), 3092-3099.
- (5) Saad, Y. and Schultz, M.H., GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7, 856-869 (1986).
- (6) Anderson, W.K., Grid Generation and Flow Solution Method for Euler Equations on Unstructured Grids, NASA TM 4295, (1992).
- (7) Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob, R., and Swarztrauber, P. N., A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry, Journal of Computational Physics, 102 (1992), 211-224.
- (8) Chien, R. J., Hack, J. J., and Williamson, D. L., Spectral Transform Solutions to the Shallow Water Test Set, Journal of Computational Physics, 119 (1995), 164-187.
- (9) Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. S., The "Cubed Sphere": A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry, Journal of Computational Physics, 124 (1996), 93-114.
- (10) Lanser, D., Blom, J. G., and Verwer, J. G., Spatial Discretization of the Shallow Water Equations in Spherical Geometry Using Osher's Scheme, Journal of Computational Physics, 165 (2000), 542-565.