軸対称乱流噴流中の乱流拡散係数の分布*

岡田 吉弘^{*1}, 酒井 康彦^{*1}, 小林 紀久^{*2}

Distribution of the Eddy Diffusivity in an Axisymmetric Turbulent Jet

Yoshihiro OKADA, Yasuhiko SAKAI^{*3} and Norihisa KOBAYASHI^{*3} Department of Mechano Informatics & Systems, Nagoya University,
Furo cho, Chikusa ku, Nagoya shi, Aichi, 464 8603 Japan

The axial velocity, radial velocity and concentration of a high Schmidt number matter were measured simultaneously in an axisymmetric turbulent jet. The diffusing fluid is a water solution of the commercial dye (Schmidt number $Sc \approx 3800$), and an issuing Reynolds number is 6400. A combined probe of a fiber optic concentration sensor and a X type hot film was used to measure the axial velocity, radial velocity and concentration simultaneously. The normalized axial and radial mass flux show similar profiles. Eddy diffusivities are the function of only r/L_c (the radial distance normalized by the half width of axial mean velocity). The effect of the axial concentration gradient is dominant for the axial mass flux near the jet centerline, and also the effect of the radial concentration gradient becomes significant far from the jet centerline.

Key Words: Turbulent Flow, Diffusion, Jet, Axisymmetric Flow, Velocity, Scalar, Joint Statistics, Joint pdf, Mass Flux, Eddy Diffusivity

1. 緒 言

21 世紀を迎え, 科学技術と人間生活の共栄を目指す上で, 環境問題は我々が解決すべき最も重要な課題の一つである. 主として自動車の排気ガス等によって都市部の空気が汚染される都市環境問題から, 温室効果ガスや酸性雨を引き起こす汚染物質の地球規模での拡散現象まで, 乱流拡散現象の研究はより重要度を増している.

このような状況の中, 我々は乱流拡散現象の基礎的な研究として, 軸対称乱流噴流中の軸方向瞬時速度と, そこに拡散される染料の瞬時濃度の同時測定を行い, 結合統計量として軸方向物質フラックスの空間分布について詳しく報告してきた⁽¹⁾.

しかしながら, これまで我々が測定に用いていた I-型熱膜プローブと光ファイバプローブを組み合わせる方法では速度の一方成分しか測定できず, 流れ方向速度の変動量 u と濃度の変動量 c に関する結合統計量しか得られなかった. そこで本稿では, X-型の熱膜プ

ローブと光ファイバプローブを組み合わせることにより, 速度の二方向成分と濃度の同時測定を行い, 軸方向および半径方向物質フラックスの分布を測定し, 軸対称乱流噴流中の乱流拡散係数の分布を調べた.

おもな記号

u, v : 軸方向速度, 半径方向速度の変動量

c : 濃度の変動量

x, r : 円柱座標系

D : ノズル出口直径 (2.0mm)

Sc : 分子 Schmidt 数 (約 3800)

L_c : 軸方向平均速度の半径方向分布半値幅

L_C : 平均濃度の半径方向分布半値幅

t_{ul}, l_{ul} : 軸方向速度の積分時間, 長さスケール

2. 実験装置および実験条件

はじめに, 軸対称乱流噴流の形成される水路の概観および座標系を図 1 に示す. 図のように座標系はノズル出口を原点とし, 噴流の中心軸を x 軸, 半径方向を r 軸とする円柱座標系である. 幅 250mm の水路には, 水位 200mm で静止した水が満たされており, ノズルの軸は水面下 106mm で水路の中央に位置している. 拡散流体は工業用染料 (C.I. Direct Blue 86; 分子 Schmidt 数

* 原稿受付 2000 年 10 月 16 日.

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464 8603 名古屋市中種区不老町).

^{*2} 正員, (株) 本田技術研究所(〒351 0113 和光市中央 1-4-1).
E-mail: ysakai@mech.nagoya-u.ac.jp

Fig. 1 Water channel and coordinate system

Fig. 2 Nozzle

Fig. 3 X-type probe

$Sc \approx 3800$)の水溶液であり、出口直径 $D = 2.0\text{mm}$ のノズル(図2)から出口 Reynolds 数約 6400 で静止流体中に噴出される。その際の出口濃度 C_J および出口速度 U_J はそれぞれ、 4.0g/l 、 3.2m/s である。染料水溶液はヘッドタンクから供給され、出口速度はヘッドタンクの高さを変えることにより調節される。また、本実験で使用した周囲流体は地下水を汲み上げたものであり、染料の水溶液は温度補償装置により地下水の温度 $\pm 1^\circ\text{C}$ 程度に保たれているため、浮力による噴流形成への影響はほとんど無いと考えられる。

瞬時速度の測定には、図3に示す直径 $51\mu\text{m}$ 、長さ 1.0mm の2本の受感部を持つ X-型熱膜プローブ(KANOMAX 標準直線プローブ MODEL 1243-20W)を用いた。2本の熱膜のなす角は 90° 、間隔は 1.0mm である。熱膜プローブを接続した熱線流速計(ハヤカワ計測研究所 MODEL HC-30)からの出力電圧は、サンプリングボードを通してコンピュータに取り込まれ、事

Fig. 4 Fiber optic probe

Fig. 5 Combination of two probes

前に測定した校正関数にしたがって噴流の軸方向速度 u および半径方向速度 v に変換される。

拡散物質濃度の測定は、図4に示す光ファイバプローブを用いた光学系により行われた。その測定原理は、拡散物質の層に照射された光がそのエネルギーを吸収され、透過光強度が減衰する現象に基づく吸光度法⁽²⁾⁽³⁾によるものである。本研究で用いた染料の吸光スペクトルは波長 665nm 付近で最大値をとるため、それに近い、波長 670nm の半導体レーザー光を光ファイバによりプローブ先端まで導き、光ファイバの端面間の検査空間を通過させる。検査空間内の拡散物質によるレーザー光強度の減衰により拡散物質の瞬時濃度の測定を行った。なお、光ファイバのコアの直径は、発光側、受光側ともに 0.01mm であり、レーザー光の広がりを無視すれば、検査空間は直径 0.01mm 、長さ 0.4mm の円柱形となる。

瞬時速度の軸方向成分、半径方向成分および瞬時濃度の1点同時測定は、X-型熱膜プローブと光ファイバ

Fig. 6 Variation of axial mean velocity and mean concentration along the jet centerline

プローブを組み合わせて複合プローブを構成することによって行われた。図5にその配置を示す。プローブ同士の接触による破損を防ぐため、熱膜交差点と光ファイバとの間隔は0.5mmとした。なお、本測定における複合プローブの検査体積は、熱膜プローブの測定部と光ファイバプローブの測定部を内包する直方体の体積と仮定し、約0.6mm³となる。

本研究での測定体積は速度場および濃度場の最小スケールに比べて大きい、積分スケールよりも小さく⁽⁴⁾、後に示す物質フラックスのような大きいスケールの変動に強く関連する統計量に関しては本研究の測定体積で信頼できる値が測定可能である⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

3. 実験結果

3.1 流れ場の基本特性 はじめに、本研究で形成した軸対称乱流噴流の基本的な特性について簡単に示していく。

3.1.1 流れ場および拡散場の発展 図6に中心軸上の軸方向平均速度 U_c および平均濃度 C_c の下流方向変化を示す。図中の丸印が本研究での測定値を示しており、実線は測定値の最小二乗近似直線を表している。 C_J および U_J はそれぞれノズル出口での濃度と速度を表しており、平均値の逆数の発展が下流方向距離に比例している様子がわかる。それぞれの発展は、次式となった。

$$\frac{C_J}{C_c} = 0.152 \left(\frac{x}{D} + 5.05 \right), \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{U_J}{U_c} = 0.141 \left(\frac{x}{D} + 0.161 \right), \quad \dots\dots\dots (2)$$

Fig. 7 Half width of the axial mean velocity and mean concentration

図7に平均濃度の半値幅 L_C および軸方向平均速度の半値幅 L_U の下流方向への発展の様子を示す。丸印で表されている本研究での測定値は下流方向距離に比例している様子がわかる。実線で示した最小二乗直線近似は次式となった。

$$\frac{L_C}{D} = 0.102 \left(\frac{x}{D} + 10.6 \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{L_U}{D} = 0.088 \left(\frac{x}{D} + 10.8 \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

これらの特性は、図中に示した過去の測定値⁽¹⁾⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾とおよそ一致している。

3.1.2 瞬時波形 図8(a)-(c)に、同時測定により得られた濃度及び速度2成分の0.4秒間の瞬時波形を示す。(a),(b)はそれぞれ噴流中心軸上の $x/D = 30, 50$ における測定値を示し、(c)は $x/D = 50$ での中心軸から離れた位置 $r/L_U = 0.74$ (Reynolds 応力や物質フラックスのピーク付近)での測定値を示している。また、それぞれの変動量は rms 値で無次元化されている。図からは、(a)-(c)の全ての位置で、濃度変動 c と軸方向速度変動 u は低周波の変動に関して信号に類似性が見られ、互いに相関を持つ様子がわかる。これは、軸対称噴流中では軸方向速度と拡散物質濃度は正の相関を持つ⁽¹⁾ことを示している。

(a),(b)の中心軸上では、 c と v 、 u と v に関して明確な相関は認められない。これは、噴流の軸対称性によるものである(中心軸上では $\langle cv \rangle = 0, \langle uv \rangle = 0$ である)。(c)の噴流の中心軸から離れた位置では、 c と v 、 u と v に関してもある程度の相関が認められ、半径方向の物質フラックスおよび Reynolds 応力が発生する様子がわかる(中心軸から離れた位置で $\langle cv \rangle$ が値を持つ

Fig. 8 Fluctuation signals of concentration and velocity

Fig. 9 Marginal pdfs at $x/D = 50$

ことは、後の図12にも現れている)。

なお、著者ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾により、これらの相関が発生する物理的背景および相関のスケール構造が調べられている。

3.1.3 中心軸上の確率密度関数 図9に、噴流中心軸上の速度及び濃度の周辺確率密度関数を示す。噴流中心軸上では、軸方向変動速度 u および 半径方向

Fig. 10 Axial mass flux on the jet centerline

変動速度 v の確率密度関数は Ribeiro ら⁽¹⁰⁾ によって行われた測定と同様にほぼ Gaussian 分布に一致し、変動濃度 c の確率密度関数は Venkataramani ら⁽¹¹⁾ や酒井ら⁽¹⁾ によって示されているように Gaussian 分布からずれる様子が見られる。

3.2 物質フラックスの分布

3.2.1 軸方向物質フラックス 図10に、軸方向物質フラックス $\langle cu \rangle$ の中心軸上変化を示す。縦軸には噴流出口濃度 C_J と出口速度 U_J で無次元化した軸方向物質フラックスの逆数の平方根をとり、横軸は出口直径 D で無次元化した下流方向距離をとっている。黒丸が本研究での測定値を、破線は酒井ら⁽¹⁾ による今回と同様の染料水溶液噴流に対する I-型熱膜プローブと光ファイバプローブを組み合わせた方法での測定値を示している。逆数の $1/2$ 乗がほぼ直線上に分布していることから、酒井ら⁽¹⁾ によって示されたように、軸方向物質フラックスが下流方向距離の 2 乗に反比例することがわかる。図中の実線は本研究の測定値に対する最小二乗近似直線を表しており、次式で与えられる。

$$\sqrt{\frac{C_J U_J}{\langle cu \rangle}} = 0.99 \left(\frac{x}{D} + 14.0 \right) \quad \dots \dots \dots (5)$$

この減衰係数 0.99 は、酒井ら⁽¹⁾ によって得られた値 1.005 (図中の破線) とほぼ一致している。

次に、図11に軸方向物質フラックスの半径方向分布を示す。横軸は軸方向速度の半値幅 L_U で無次元化された半径方向距離を、縦軸は中心軸上の平均濃度 C_c および軸方向平均速度 U_c で無次元化された軸方向物質フラックスを示している。図中の記号は本研究での $x/D = 50 \sim 90$ までの測定値を表し、一点鎖線は Chevray ら⁽¹²⁾ による温度場、3本の破線は Panchapakesan ら⁽⁹⁾ による He 濃度場に対する測定値を表している。また、実線は著者ら⁽¹⁾ による今回と同様の染料水溶液噴流に対する測定値を示している。測定値にはややばらつきが見られ

Fig. 11 Axial mass flux across the jet

Fig. 12 Radial mass flux across the jet

るが、他の研究者と同様の分布を示しており、およそ相似な分布を示している。また、特に $0 \leq r/L_c \lesssim 1$ の濃度変動、速度変動ともに大きい領域において報告者により差が見られることがわかる。また、Panchapakesanらのデータが下流方向へ発展しているのは、ヘリウムと空気の密度差による浮力の効果が現れているものと考えられる。

3.2.2 半径方向物質フラックス 図12に、半径方向物質フラックス $\langle cv \rangle$ の半径方向変化を示す。縦軸は中心軸上の平均濃度および軸方向平均速度で無次元化された半径方向物質フラックスを示している。図中の記号は本研究での $x/D = 50 \sim 90$ までの測定値を表し、一点鎖線および破線はChevrayら⁽¹²⁾ およびPanchapakesanら⁽⁹⁾ による測定値を表している。本研究の測定値は相似な分布を示し他者の測定値とほぼ一致している様子がわかる。また、他者の結果も含め、どの測定値もほぼ $r/L_c = 0.75$ 付近にピークを持っている。

3.3 乱流拡散係数の分布 物質フラックスの基本的なモデルとして次式のような勾配型表示

$$\langle cu_i \rangle = -K_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

がある。ここで、 K_{ij} は乱流拡散係数(あるいは渦拡散係数)テンソルであり、流れ場中の場所の関数となる。この乱流拡散係数に関する報告は、軸対称乱流噴流中においてはLemoineら⁽¹³⁾ によるものが著者らの知る限り唯一であるが、その測定結果には非常にばらつきがあり信頼性の低いものとなっている。また、軸対称乱流噴流中で速度とスカラー量の同時測定を行った他の研究例^(7,9,12) においても乱流拡散係数については報告されていない。

いま、円柱座標系において軸対称性を考慮すると、式(6)は

$$\begin{pmatrix} \langle cu \rangle \\ \langle cv \rangle \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial r} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。ただし、

$$K \equiv \begin{pmatrix} K_{xx}(x, r) & K_{xr}(x, r) \\ K_{rx}(x, r) & K_{rr}(x, r) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

特に中心軸上では、

$$\langle cu \rangle = -K_{xx}(x, 0) \frac{\partial C}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\langle cv \rangle = -K_{rx}(x, 0) \frac{\partial C}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (10)$$

であるが、中心軸上で $\langle cv \rangle = 0$ より $K_{rx}(x, 0) = 0$ であることがわかる。また、酒井ら⁽⁴⁾ によって中心軸上において K_{xx} が定数と見なせることが実験的に示されており、 $K_{xx}(x, 0) = 1.01 \times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$ ($K_{xx}(x, 0)/U_j D = 0.160$) が得られている。本実験での軸方向物質フラックス $\langle cu \rangle$ の測定値(図10)からは、 $K_{xx}(x, 0) = 9.93 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ ($K_{xx}(0)/U_j D = 0.155$) が得られ、酒井らの測定値とほぼ一致している。

いま、軸対称噴流の自己保存性を考慮して、変数 $X \equiv x/D$, $R \equiv r/L_c(x)$ を導入すると、中心軸上の平均濃度、軸方向平均速度、およびそれぞれの半値幅の発展は

$$C_j/C_c(X) = \alpha_C X, \quad U_j/U_c(X) = \alpha_U X \quad (11)$$

$$L_c(X)/D = \beta_C X, \quad L_U(X)/D = \beta_U X \quad (12)$$

と表すことができる。ここで α_C , α_U , β_C , β_U はそれぞれの発展の定数係数である。実際にはそれぞれの統計量によって仮想原点は異なるが、以下の議論では噴流出口よりも十分下流で自己保存が成立する状況を考え、仮想原点は無視する。また、平均濃度の半径方向分布は次式で近似できる⁽⁴⁾。

$$\frac{C(X, R)}{C_c(X)} = \exp[-\ln 2 \cdot R^2] \quad \dots\dots\dots (13)$$

この座標系 (X, R) に対して、式(7)は

$$\begin{pmatrix} \langle cu \rangle' \\ \langle cv \rangle' \end{pmatrix} = -\mathbf{K}' \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial X} \\ \frac{\partial C}{\partial R} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

と書ける。ここで

$$\begin{pmatrix} \langle cu \rangle' \\ \langle cv \rangle' \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \langle cu \rangle \\ \langle cv \rangle \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (15)$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{S}. \dots\dots\dots (16)$$

である。この変換行列 $\mathbf{S}$ は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial r} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial X} \\ \frac{\partial C}{\partial R} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

によって定義され、次式で表される。

$$\mathbf{S} \equiv \begin{pmatrix} 1/D & -R/DX \\ 0 & 1/L_C \end{pmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

このとき、 $\mathbf{K}'$ が対角成分のみ

$$\mathbf{K}' \equiv \begin{pmatrix} K_{XX}(X, R) & 0 \\ 0 & K_{RR}(X, R) \end{pmatrix}$$

であると仮定[†]すると、式(14)より次式を得る。

$$\frac{\langle cu \rangle + \beta_C R \langle cv \rangle}{C c U c} = \alpha_U \exp[-\ln 2 R^2] \frac{K_{XX}}{U_J D} \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\langle cv \rangle}{C c U c} = 2 \ln 2 \frac{\alpha_U}{\beta_C} R \exp[-\ln 2 R^2] \frac{K_{RR}}{U_J D} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、左辺が下流方向距離 X によらず、無次元化された半径方向距離 R のみの関数であれば、乱流拡散係数 K_{XX} , K_{RR} もまた R のみの関数となることがわかる。従って、図11および図12の相似性より、 K_{XX} と K_{RR} は R のみの関数であると考えられる。さらに、式(16)より、

$$K_{xx} = K_{XX}, \dots\dots\dots (21)$$

$$K_{xr} = \beta_C R (K_{XX} - K_{RR}), \dots\dots\dots (22)$$

$$K_{rr} = K_{RR}, \dots\dots\dots (23)$$

$$K_{rx} = 0. \dots\dots\dots (24)$$

となる。

図13～図14に、式(19)～(24)を用い、物質フラックスの測定値および噴流発展のデータから求められた乱流拡散係数の半径方向変化を示す。乱流拡散係数は噴流の出口速度 U_j および出口直径 D で無次元化されている。なお、プロットに際して関係式 $R \equiv r/L_C = (\beta_U/\beta_C)r/L_U$ を用いている。

Fig. 13 Variation of the K_{xx} across the jet

Fig. 14 Variation of the K_{xr} across the jet

図13は軸方向の乱流拡散係数 K_{xx} の半径方向変化を示しており、本研究での測定値とともに Chevray ら⁽¹²⁾ および Panchapakesan ら⁽⁹⁾ のスカラーフラックスの測定値から求めた乱流拡散係数の変化を表示している。なお、Chevray らの報告には流れ場の発展に関するデータが記述されていないため、Papanicolaou ら⁽⁷⁾ を参照し、様々な実験において平均的な値と思われる、 $\alpha_U = 0.149$, $\beta_U = 0.107$, $\beta_C = 0.127$ を用いた。また、Panchapakesan らの実験で使用されたヘリウムガスの密度は空気のそれと大きく異なるため、出口直径として有効直径 $\sqrt{\rho_{\text{air}}/\rho_{\text{helium}}} D$ を用いて比較を行った。図からは、 K_{xx} が中心軸付近から外縁部に向かって単調に増加し、 $1.3 \lesssim r/L_U \lesssim 1.6$ においてピークを持っている様子がわかる。これらのピークは速度場や濃度場の変動強度や物質フラックスのピークよりも外側にあり、変動量のピークを過ぎても軸方向の輸送係数は増加し続けることを示している。

図14に、乱流拡散係数 K_{xr} の半径方向変化を示す。図のように中心軸上ではゼロであり、外縁部に向かって $r/L_U \simeq 1.6$ まで単調に増加している。ここで、軸

[†] 元の座標系 (x, r) に対する式(7)でこのような仮定を行うと、噴流中の平均濃度分布の性質上ある半径方向距離 $(2 \ln 2 R^2 - 1 = 0$ を満たす位置)において $\partial C/\partial x = 0$ となるために矛盾を生じる。

Fig. 15 Balance of the axial mass flux

Fig. 16 Variation of the K_{rr} across the jet

方向物質フラックスの勾配型表示

$$\langle cu \rangle = -K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - K_{xr} \frac{\partial C}{\partial r} \dots\dots\dots (25)$$

の各項の半径方向変化を図15に示す。図のように、中心軸付近では軸方向の濃度勾配による輸送が支配的であるが、半径方向距離が大きくなると、 $r/L_U \gtrsim 1$ で $\partial C / \partial x < 0$ となる(すなわち、軸方向下流側の濃度の方が大きくなる)ため、それを補うような形で半径方向の濃度勾配により軸方向への物質輸送が発生することがわかる。すなわち、噴流の外縁部においては軸方向への物質輸送に対して半径方向の濃度勾配の効果が重要となることがわかる。

図16は半径方向の乱流拡散係数 K_{rr} の半径方向変化を示しており、先と同様に一点鎖線と破線により Chevray ら⁽¹²⁾ および Panchapakesan ら⁽⁹⁾ のスカラーフラックスの測定値から求めた乱流拡散係数の変化を示している。図からは、 K_{rr} が中心軸付近から外縁部に向かって減少していく様子がわかる。Panchapakesan ら

の測定値には $r/L_U \simeq 0.3$ 付近にピークが現れているが、本研究での測定値や Chevray らの結果には明確なピークは現れていない。また、 $0.4 \lesssim r/L_U \lesssim 2.0$ における減少はほぼ直線と見なすこともできる。また、測定範囲の全域において半径方向への拡散係数 K_{rr} に比べて軸方向への拡散係数 K_{xx} の方が大きく、その比は中心軸付近で約5倍、外縁部では数十倍となる。

4. 結 言

本研究では、X-型熱膜プローブと光ファイバプローブを組み合わせることにより軸対称乱流噴流中の拡散場において軸方向速度、半径方向速度および濃度の同時測定を行い、軸方向および半径方向物質フラックスの分布を測定し、乱流拡散係数の分布を得た。主な結論を以下に示す。

(1) 軸方向および半径方向物質フラックスの半径方向分布は各下流方向断面においてほぼ相似な形状を示し、従って、軸対称噴流中の乱流拡散係数は無次元化された半径方向距離 r/L_U のみの関数となる。

(2) 軸方向への物質輸送に対して噴流の中心軸付近では軸方向の濃度勾配の効果が支配的であるが、外縁部においては半径方向の濃度勾配の効果もまた重要となる。

文 献

- (1) 酒井康彦, 岡田吉弘, 中村育雄, 小林紀久, 三輪昌隆, 日本機械学会論文集 (B 編), **65**-634 (1999), 2000-2008.
- (2) 大倉洋甫, 他3名 吸光度法—有機編—, 共立出版 (1984), 10-13.
- (3) 中村育雄, 宮田勝文, 酒井康彦, 日本機械学会論文集 (B 編), **48**-436 (1982), 2484-2491.
- (4) 岡田吉弘, 酒井康彦, 小林紀久, 日本機械学会論文集 (B 編), **67** (2001), 投稿中.
- (5) 酒井康彦, 岡田吉弘, 中村育雄, 小林紀久, 日本機械学会論文集 (B 編), **66**-647 (2000), 1727-1733.
- (6) Becker, H. A., Hottel, H. C. and Williams, G. C., *J. Fluid Mech.*, **30** (1967), 285-303.
- (7) Papanicolaou, P. N. and List, E. J., *J. Fluid Mech.*, **195** (1988), 341-391.
- (8) Panchapakesan, N. R. and Lumley, J. L., *J. Fluid Mech.*, **246** (1993), 197-223.
- (9) Panchapakesan, N. R. and Lumley, J. L., *J. Fluid Mech.*, **246** (1993), 225-247.
- (10) Ribeiro, M. M. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, **70** (1975), 1-15.
- (11) Venkataramani, K. S., Tutu, N. K. and Chevray, R., *Phys. Fluids*, **18** (1975), 1413-1420.
- (12) Chevray, R. and Tutu, N. K., *J. Fluid Mech.*, **88** (1978), 133-160.
- (13) Lemoine, F., Wolff, M. and Lebouche, M., *Exp. Fluids*, **20** (1996), 319-327.