レベルセット法を用いた相変化を伴う界面の流動と成長の 数値解析手法*

織田 剛^{*1}, 里深信行^{*2}, 西田秀利^{*2}

Numerical Analysis Method of Interface Movement and Growth with Phase Change by Level Set Method

Tsuyoshi ODA^{*3}, Nobuyuki SATOFUKA and Hidetoshi NISHIDA

^{*3} Fluid & Thermal Engineering Research Sect. Mechanical Engineering Laboratories, Kobe Steel, LTD.,
1 5 5 Takatsukadai, Nishi ku, Kobe shi, Hyogo, 651 2271 Japan

A numerical analysis method using the level set method has been developed to simulate the interface movement and growth with phase change which accompany a change of density. The multi-phase flow and the temperature with the latent heat are solved by the finite volume method on a fixed non staggered Cartesian grid. Particular treatments added to the level set method to calculate the Stefan condition and the remedy added to the temperature equation to avoid the artificial temperature advection beyond the interface are described in detail. Our analysis method is capable of both the solid-liquid and liquid-gas phase changes. Good agreements of the interface location with other published results and better accuracy in temperature and velocity distributions are obtained, though some errors still exist in the growth rate of the interface in each direction from the effect of the Cartesian grid.

Key Words: Numerical Analysis, Level Set Method, Multi phase Flow, Phase Change, Bubble Growth, Stefan Condition, Finite Volume Method, Non staggered Grid

1. 緒 言

蒸発・凝縮問題の数値解析は、気液の密度が大きく異なるために、熱と流れの数値解析のなかでも非常に困難な問題の一つである。この問題を解析するためには、界面を取り扱う数値解析手法がまず必要になる。界面を取り扱う数値解析手法として VOF 法はこれまで広く用いられてきている。この VOF 法にステファン条件を組み込んで相変化解析を実施している研究も、密度変化のない溶融・凝固問題において多く見られる。また、密度変化の大きい蒸発・凝縮問題に VOF 法を適用した研究⁽¹⁾も見られる。しかしながら、VOF 法では検査体積内の流体体積占有率が定義されているだけであり、一般的にこの流体体積占有率から界面を構成する段階では精度が良いとは言えない⁽²⁾。したがって、ステファン条件において必要になる界面の法線方向ベクトルにも精度に問題があることが多い。

最近、界面を取り扱う数値解析に適用事例が増えているレベルセット法⁽³⁾では、界面からの符号付き距

離関数を用いて界面の位置を表現しており、界面の曲率や法線方向を比較的精度良く、かつ、容易に求めることができると言われている。しかし、レベルセット法を蒸発・凝縮問題に適用した研究⁽⁴⁾はわずかであり、改善の余地も多い。

著者らの一部は、これまでレベルセット法を用いて気泡や液滴の流動問題に取り組んできた⁽⁵⁾。本研究では、このレベルセット法を蒸発・凝縮問題に適用する。レベルセット法を用いた相変化問題の計算手法確立と計算精度の検証を目的としており、VOF 法とレベルセット法の計算精度を比較するために、VOF 法による相変化問題と同一の検証問題を取り上げる。

2. 記 号

c_p : 定圧比熱

l : 長さ

L : 潜熱

$\dot{m}_{pc}$: 相変化質量

$\mathbf{n}$: 界面の単位法線ベクトル

$\hat{\mathbf{n}}$: セル境界の単位法線ベクトル

p : 圧力

q_{pc} : 相変化に伴って放出する潜熱

* 原稿受付 2001年1月26日。

^{*1} 正員, (株)神戸製鋼所, 機械研究所流熱技術研究室(〒651 2271 神戸市西区高塚台1-5-5)。

^{*2} 正員, 京都工芸繊維大学工芸学部(〒606 8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E mail: t_oda@rd.kcr1.kobelco.co.jp

t : 時間
 T : 温度
 $\mathbf{u}$: セル中心の速度ベクトル
 $\mathbf{U}$: セル境界の速度ベクトル
 u : セル中心の水平方向速度
 U : セル境界の水平方向速度
 v : セル中心の垂直方向速度
 V : セル境界の垂直方向速度
 v_n : 背景流体側への界面成長速度
 x : 水平方向座標
 y : 垂直方向座標
 α : 界面の片側分布幅
 ϕ : レベルセット関数
 κ : 界面曲率
 λ : 熱伝導率
 μ : 粘性係数
 ρ : 密度
 σ : 界面張力
 τ : 粘性応力テンソル

添え字

i : 水平方向検査体積番号
 j : 垂直方向検査体積番号
 n : 時間段階
 pc : 相変化または界面
 0 : 背景流体 ($\phi > 0$ 側流体)
 1 : $\phi < 0$ 側流体
 $+1, +2, +3$: $\phi > 0$ 側温度プロープ
 $-1, -2, -3$: $\phi < 0$ 側温度プロープ

3. 基礎式

相変化による密度変化を考慮した連続の式, 運動量およびエネルギー保存式を以下に示す.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \dot{m}_{pc} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \{ -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \sigma \kappa \delta(\phi) \mathbf{n} \} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho c_p} \{ \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_{pc} \} \quad (3)$$

レベルセット移流方程式を次式に示す.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi + v_n = 0 \quad (4)$$

界面の成長速度はステファン条件により求める.

$$\rho L v_n = \left\{ \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_0 \right\} \quad (5)$$

計算セル単位体積当たりの相変化質量と相変化に伴って放出する単位体積当たりの潜熱は式(6),(7)によりそれぞれ求めることができる.

$$\dot{m}_{pc} = \frac{\rho v_n l_{pc}}{\Delta x \Delta y} \quad (6)$$

$$q_{pc} = L \dot{m}_{pc} \quad (7)$$

l_{pc} は, 図 1 に示すように 2 次元計算の場合にはセル内において相変化を行う界面の長さであり, 軸対称 2 次元の場合には界面の面積である. レベルセット関数は界面からの符号付き距離関数であり, 背景流体の領域内は正, それ以外の領域内は負としている. 相変化問題では, レベルセット関数が正である相に液相をとり, レベルセット関数が負である相には固相または気相をとると, 3 相に渡った相変化を同時に解くことができるので都合がよい. その場合, レベルセット関数が負である相に固相を用いると溶解・凝固を計算することになり, 式(5)の定義から潜熱 L は正の値をとる. 逆に, レベルセット関数が負である相に気相を用いると蒸発・凝縮を計算することになり, 潜熱 L は負の値をとる.

4. 流れと界面の計算手法

式(1)~(4)をセル中心にすべての変数を定義した直交格子系で離散化し, 有限体積法を用いて解く. なお, $\mathbf{U}$ は移流を計算するためにスターガード格子と同じようにセル境界に配置された流速である. 式(2),(3)の移流拡散方程式を統一的に記述すると式(8)になる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \psi dV + \int_{CS} \psi (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \int_{CV} s dV + \int_{CS} \Gamma \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (8)$$

表 1 に各保存式に対応する変数の詳細を示す.

移流項には 2 次精度の ENO 法を, 拡散項には中心差分を用いる. 生成項と移流項の時間積分には Adams-Bashforth 法を用いる. 拡散項の時間積分には陰解法である Crank-Nicolson 法を用いる. したがって, 式(9)を解くことになる.

Table 1 Specification of variables and coefficients

	ψ	Γ	s	s pressure term
momentum	$\mathbf{u}$	$\frac{\mu}{\rho}$	$\frac{\sigma \kappa \delta(\phi)}{\rho} \nabla \phi$	$-\frac{1}{\rho} \nabla p$
energy	T	$\frac{\lambda}{\rho c_p}$	$\frac{q_{pc}}{\rho c_p}$	

$$\begin{aligned}
 & \int_{CV} \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} dV \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{CS} \{3\psi^n (\mathbf{U}^n \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \psi^{n-1} (\mathbf{U}^{n-1} \cdot \hat{\mathbf{n}})\} dS \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{CV} (3s^n - s^{n-1}) dV \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{CS} \Gamma (\nabla \psi^{n+1} + \nabla \psi^n) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS
 \end{aligned} \quad (9)$$

連続の式(1)と運動量保存式(2)が同時に成り立つように、fractional step 法を用いて圧力を求める。運動量保存式から圧力補正項を除外した中間段階での速度ベクトル $\mathbf{u}^*$ を次式により求める。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^n + \Delta t [-\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \\
 &+ \frac{1}{\rho^{n+1}} \{\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \sigma \kappa \delta(\phi) \mathbf{n}\}]
 \end{aligned} \quad (10)$$

圧力項補正式(11)と連続の式(1)から圧力の Poisson 方程式(12)が得られる。

$$\int_{CV} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} dV = - \int_{CV} \frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla p^{n+1} dV \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{CS} \frac{1}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{CS} (\mathbf{U}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS - \int_{CV} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \dot{m}_{pc} dV \right\}
 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、セル境界における中間段階の速度 $\mathbf{U}^*$ は、セル中心における中間段階の速度ベクトル $\mathbf{u}^*$ から線形補間によって求める。

x 方向の速度の圧力補正を式(13),(14)により行う。 y 方向の速度に関しても同様である。

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \Delta t^n \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i,j} \quad (13)$$

$$U_{i+1/2,j}^{n+1} = U_{i+1/2,j}^* - \Delta t^n \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \quad (14)$$

ただし、圧力勾配は次式により求める。

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}^{n+1}} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
 & \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i,j} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} + \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \right\}
 \end{aligned}$$

表面張力は一定として、CSF モデルを用いている。体積力の重み付き分布関数 δ はレベルセット関数 ϕ の関数として、次式により表す。

$$\left. \begin{aligned}
 |\phi| < \alpha \text{ では } \delta(\phi) &= \frac{1}{2} \frac{(1 + \cos(\pi\phi/\alpha))}{\alpha} \\
 \text{それ以外では } \delta(\phi) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

曲率 κ は主曲率の和で表される。

$$\kappa = - \frac{\phi_x^2 \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{yy}}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} - \frac{m}{x} \phi_x \quad (16)$$

平面 2 次元の場合は $m=0$ ，軸対称 2 次元の場合には $m=1$ とする。ここで、 $\phi_x = \partial\phi/\partial x$ である。

レベルセット関数の再初期化には、Sussman によって提案された体積保存型再初期化⁽⁶⁾を用いている。

5. 相変化と界面の計算手法

界面の移動は式(4)により求めることができる。

左辺第 2 項は流れに乗って界面が移流することを表しており、左辺第 3 項は相変化によって界面が成長することを表している。その相変化による界面の成長速度を式(5)により求める。図 1 に示すように、 $\phi=0$ の界面から $\phi>0$ 側と $\phi<0$ 側へ、界面の法線方向に距離 l_{+1} , l_{+2} , l_{+3} および l_{-1} , l_{-2} , l_{-3} 離れた片側 3 点ずつへ、温度を検知するためのプローブをそれぞれ延ばす。界面 $\phi=0$ における温度を凝固温度または飽和温度として、その両方をここでは T_{sat} で記す。 $\phi>0$ 側における界面近傍法線方向の温度分布を $f_+(\phi)$ とし、3 次曲線で近似する。このとき、距離 l_{+1} , l_{+2} , l_{+3} における検出温度を T_{+1} ,

Fig.1 Position of temperature probe

T_{+2} , T_{+3} とすると, $f_+(0)=T_{sat}$, $f_+(l_{+1})=T_{+1}$, $f_+(l_{+2})=T_{+2}$, $f_+(l_{+3})=T_{+3}$ の条件からこの3次曲線を特定できる. したがって, 界面における $\phi > 0$ 側の熱流束は, 式(17)により求めることができる.

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_0 = \lambda_0 f'_+(0) \quad (17)$$

$\phi < 0$ 側の熱流束も同様である. 3次曲線で近似している理由は, 7章において述べる.

式(5)から界面の成長速度を求めるためには, 密度を与える必要がある. 密度が変化する相変化では, 界面を挟んで流速が大きく異なる. したがって, $\phi > 0$ 側の流れとともに移動する座標系から見た界面の成長速度を求めるためには, 式(5)において密度に ρ_0 を用いる必要があるし, 式(4)の移流速度には $\phi > 0$ 側の界面近傍の流速を用いる必要がある. $\phi < 0$ 側の流れとともに移動する座標系から見た界面の成長速度に関しても同様である. 以下の方法により, 界面の移流速度と成長速度を求める. 距離 l_{+1} と l_{-1} における温度プローブでは, その点を囲むセル境界の移流速度 $\mathbf{U}$ の補間により界面近傍速度 $\mathbf{u}_{+1}$, $\mathbf{u}_{-1}$ を求める. これら2点の界面近傍における速度のうち移流計算での誤差を最小限にするために, 絶対値の小さい方を界面の移流速度として用いる.

$|\mathbf{u}_{+1}| \geq |\mathbf{u}_{-1}|$ では,

$$\rho = \rho_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u}_{+1} \cdot \nabla) \phi + v_n = 0 \quad (18)$$

$|\mathbf{u}_{+1}| < |\mathbf{u}_{-1}|$ では

$$\rho = \rho_0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u}_{-1} \cdot \nabla) \phi + v_n = 0 \quad (19)$$

積分形の式(8)を用いてレベルセット移流方程式を解くと, セル内を界面が横切る状況では $\mathbf{u}_{+1}$ と $\mathbf{u}_{-1}$ の両方の速度を同時に使用するようなことになる. そこで, 相変化が生じる場合のレベルセット移流方程式のみ, $\mathbf{u}_{+1}$ と $\mathbf{u}_{-1}$ の大小関係により微分形の式(18),(19)を切り替えて用いている. 界面から離れたセルにおけるレベルセット関数の移流に関しては, 移流速度をセル中心における速度 $\mathbf{u}_{i,j}$, 界面成長速度を $v_n = 0$ として求めているが, 最終的には再初期化により距離関数へと修正される. 式(4)または式(18),(19)において界面の成長速度がレベルセット関数の生成項に表れている理由は, レベルセットの距離関数としての性質から,

$$|\nabla \phi| = 1 \quad (20)$$

が成り立っているからである.

エネルギー保存式の計算では, 潜熱を取り扱う必要がある. 図2のように, セル間に界面が存在する場合について考える. セル i, j において発生する潜熱は式(7)で表させるが, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y q_{pc} &= l_{pc} \left\{ \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_0 \right\} \\ &= \Delta y_0 \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \Delta x_0 \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ &\quad - \Delta y_0 \left(\lambda_0 \frac{T_{i+1,j} - T_{sat}}{\phi_{i+1,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \Delta x_0 \left(\lambda_0 \frac{T_{i,j+1} - T_{sat}}{\phi_{i,j+1}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

他方, 拡散項の計算において, 幅 Δy の境界 $i+1/2, j$ を通過して流入する熱量と, 幅 Δx の境界 $i, j+1/2$ を通過して流入する熱量は, それぞれ式(22),(23)により求めることができる.

$$q_{i+1/2,j} = \Delta y_1 \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \Delta y_0 \left(\lambda_0 \frac{T_{i+1,j} - T_{sat}}{\phi_{i+1,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$q_{i,j+1/2} = \Delta x_1 \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \Delta x_0 \left(\lambda_0 \frac{T_{i,j+1} - T_{sat}}{\phi_{i,j+1}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (22), (23)$$

式(3)において潜熱を生成項として与える代わりに, 式(21)~(23)を式(3)に代入して整理すると, 拡散項の計算において式(22),(23)の代わりに式(24),(25)を用いれば生成項を加える必要がなく, また, セル境界を界面が通過する位置で分割する必要もなくなる.

Fig.2 Treatment of latent heat

$$q_{i+1/2,j} = \Delta y \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (24)$$

$$q_{i,j+1/2} = \Delta x \left(\lambda_1 \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (25)$$

以上のことから、拡散項の計算において、 $\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} \geq 0$ の場合、

$$q_{i+1/2,j} = \Delta y \left(\lambda_{i+1/2,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right) \quad (26)$$

$\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} < 0$ の場合、

$$q_{i+1/2,j} = \Delta y \left(\lambda \frac{T_{i,j} - T_{sat}}{\phi_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (27)$$

のように場合分けを行う。ただし、式(27)において $\phi_{i,j} \geq 0$ の場合は、 $\lambda = \lambda_0$ 、 $\phi_{i,j} < 0$ の場合は、 $\lambda = \lambda_1$ とする。y 方向に関しても同様である。

エネルギー保存式の移流項の計算においても、相変化問題特有の取り扱いが必要である。界面の位置を境にして温度勾配は不連続に変化する。そこで、移流項の計算で用いているセル境界での温度を、次式により求めている。

$\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} < 0$ 、かつ、 $\phi_{i,j}\phi_{i+1/2,j} \geq 0$ の場合

$$T_{i+1/2,j} = \frac{\phi_{i+1/2,j}T_{i,j} + (\phi_{i,j} - \phi_{i+1/2,j})T_{sat}}{\phi_{i,j}} \quad (28)$$

$\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} < 0$ 、かつ、 $\phi_{i,j}\phi_{i+1/2,j} < 0$ の場合には、(28)式において $\phi_{i,j}$ を $\phi_{i+1,j}$ に置き換えればよい。 $\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} \geq 0$ の場合には 2 次精度の ENO 法を用いている。

それでも、移流項の計算により界面を越えて非現実的な温度の拡散が生じる。また、セル代表点における温度はセル内の平均温度であるので、セル内に界面が存在する場合には、代表点があるセル中心点の温度とは異なる。その結果、式(17)で求める温度勾配に誤差を与える。このような界面を跨いだ移流とセル内平均化に起因する界面の成長速度誤差を避けるために、上記の状況が生じた場合にのみ、セル中心点間に界面を含むセル中心点の温度を補正する。界面の成長速度は、図 1 に示したように界面温度 T_{sat} とプローブ温度 T_{+1} 、 T_{+2} 、 T_{+3} または T_{-1} 、 T_{-2} 、 T_{-3} の片側各 4 点の温度から求めている。上記誤差が含まれるのは T_{+1} または T_{-1} である。そこで、界面温度 T_{sat} とプローブ温度 T_{+2} 、 T_{+3} またはプローブ温度 T_{-2} 、 T_{-3} から界面近傍の温度分布を 2 次曲線で近似して、界面に隣接するセルの中心点温度を補正する。すなわち、 $\phi_{i,j} \geq 0$ の場合には、界面温度 T_{sat} とプローブ温度 T_{+2} 、 T_{+3} から

求めた界面法線方向の温度近似曲線を $h_+(\phi)$ 、式(8)を用いて求めた温度を T^* とすると、式(29)により T^{n+1} を求める。

$$T^{n+1} = T^* + \text{sgn}(h_+(\phi_{i,j}) - T_{sat}) \max\{0, \text{sgn}(h_+(\phi_{i,j}) - T_{sat})(h_+(\phi_{i,j}) - T^*)\} \quad (29)$$

$\phi_{i,j} < 0$ の場合には式(29)において $h_+(\phi)$ と $h_-(\phi)$ を入れ替えればよい。

6. 物性値の平均化法

セル中心において定義されている密度と熱容量は、セル内の面積比に応じて算術平均で求めている。

$$\rho = \frac{A_0\rho_0 + A_1\rho_1}{\Delta x\Delta y} \quad (30)$$

$$\rho c_p = \frac{A_0\rho_0c_{p0} + A_1\rho_1c_{p1}}{\Delta x\Delta y} \quad (31)$$

ここで、 A_0 、 A_1 はそれぞれセル内においてレベルセット関数が正および負になっている領域の面積である。Poisson 方程式(12)において用いられる密度はセル境界で定義された密度であり、式(32)により求めている。

$$\rho = \rho_1 + (\rho_0 - \rho_1)H_\alpha(\phi) \quad (32)$$

ただし、 $H_\alpha(\phi)$ は以下のように定義される。

$$\phi < -\alpha \text{ の場合 } H_\alpha(\phi) = 0$$

$$|\phi| < \alpha \text{ の場合 } H_\alpha(\phi) = \frac{\phi + \alpha}{2\alpha} + \sin\left(\frac{\pi\phi}{\alpha}\right) / (2\pi)$$

$$\phi > \alpha \text{ の場合 } H_\alpha(\phi) = 1$$

ここで、 α にはセル対角幅を用いている。粘性係数 μ と熱伝導率 λ もセル境界で定義されており、セル境界の両端のセル中心点間に界面が存在する場合には、調和平均により求めている。すなわち、 $\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} < 0$ 、かつ、 $\phi_{i,j} > 0$ の場合には式(33)を用いている。

$$\frac{|\phi_{i,j}| + |\phi_{i+1,j}|}{\lambda_{i+1/2,j}} = \frac{|\phi_{i,j}|}{\lambda_0} + \frac{|\phi_{i+1,j}|}{\lambda_1} \quad (33)$$

$\phi_{i,j}\phi_{i+1,j} < 0$ 、かつ、 $\phi_{i,j} < 0$ の場合には、式(33)において、 λ_0 と λ_1 を入れ替えればよい。

7. 計算精度の検証

VOF 法を用いた白川らの検証問題⁽¹⁾と同一問題を取り上げて、計算精度の検証を行う。図 3 に示すような水の 1 次元凝固問題を解く。水の凝固温度を 0°C 、初期水温を 5°C 、冷却面温度を -10°C とする。計算に

用いた水と氷の物性値を表2に示す。凝固開始後1秒後の解析解である Nuemann 解を初期値として時間の経過とともに氷の厚さが増していく過程を計算した。時間刻みは 0.1 秒、格子間隔は 0.1mm とした。図4に計算結果と Nuemann 解の比較を示す。相変化前後で密度変化がない水の1次元凝固問題では、式(3)~(5)を解いているだけではあるが、界面の成長速度を正確に計算できていることが分かる。

次に、図5に示すようなヘリウム液膜の蒸発問題を取り上げ、相変化に伴う密度変化を考慮した流れを解く。初期の液膜厚さを 1mm、初期温度を全域で 4.2K とする。液膜下面の伝熱面から一定熱流束 100W/m^2 で加熱する。格子間隔は 0.1mm、計算時間刻みはヘリウム蒸気速度から求めたクーラン数が 0.5 となるように決めている。式(17)における界面近傍の温度分布を、1次直線、2次曲線、3次曲線でそれぞれ近似した場合の計算結果を図5に示す。図中の実線は加熱された熱量が直ちに蒸発に使われた場合の液膜厚さである。これによると、加熱開始後約 26 秒で液膜はすべて蒸発するはずであるが、計算では界面近傍

温度分布の近似式によって異なる結果を示しており、高次の近似曲線を用いるほど、蒸発終了時刻は理論値に近くなる。なお、温度プローブの界面からの距離 l_{+1} , l_{+2} , l_{+3} はそれぞれセル対角長さの 1 倍, 2 倍, 3 倍とした。 l_{-1} , l_{-2} , l_{-3} も同様である。

同じく白川らの検証問題から、より現実的な問題として過熱液中の気泡成長問題を取り上げる。気液の密度比が約 8 であるヘリウムと気液の密度比が約 1800 である水の2条件について計算を行う。ヘリウムの過熱度は 0.5K、初期気泡径は $20\mu\text{m}$ である。水の場合は、過熱度は 5K、初期気泡径は 1mm である。計算には x 座標と y 座標ともに解析領域幅を初期気泡半径の 10 倍とし、かつ、気泡中心である原点から

Fig. 5 Evaporation of liquid film

Fig. 3 Neumann's problem

Table 2 Properties of ice and water

	Water	Ice
Density [kg/m ³]	1000	1000
Specific heat [kJ/kgK]	4.22	2.10
Thermal conductivity [W/mK]	0.56	2.20
Heat of solidification [kJ/kg]	336

Fig. 4 Comparison between present analysis and Neumann's results

Table 3 Properties of helium liquid and vapor

	Vapor	Liquid
Density [kg/m ³]	16.5	125
Specific heat [J/kgK]	9.63	4.88
Thermal conductivity [mW/mK]	10.5	19.6
Heat of vaporization [kJ/kg]	20.54

Fig. 6 Comparison of film thickness and vapor velocity obtained by three approximate curves

1.05 の等比で拡大する不等間隔格子を用いている．分割数は 40×40 セルである．なお， x 座標を半径にとる軸対称 2 次元計算とした．水と水蒸気の物性値を表 4 に示す．ヘリウムの物性値は表 3 と同じである．

ヘリウム気泡の界面位置と速度ベクトルを図 7 に，等温線を図 8 に示す．なお，セル中心点の物理量をセル接点での値に補間して表示している．これらの図から，界面形状と温度分布はともにほぼ球形を維持していることが分かる．ただし，界面形状が球形を維持している理由には，表面張力の効果も含まれている．気泡内部の温度の分布や流れはほとんどなく，液体は気泡中心から放射状に流れているので，実際の物理現象を表現できていると考えられる．気泡中心から 0° ， 45° ， 90° の直線上の温度と各直線方向の速度の分布を，それぞれ図 9，図 10 に示す．温度においては直交座標の影響はほとんど表れていない．速度においては， 3.0ms では直交座標の影響が表れているが，大きな誤差にはなっていない．

白川らの VOF 法の計算結果では， 0.5ms の時点において既に方向によって速度が異なっており， 3.0ms では液体部において負の速度が生じているので，早い時刻から方向によって界面の成長速度が異なっていると予想される．白川らの計算結果と本計算手法による計算結果との相違は，本計算手法においては界面法線方向温度勾配を温度プローブにより高精度で評価していることに起因していると考えている．なお，ヘリウムの計算においては式(29)はほとんど影響していないことを確認している．

次に，水の気泡界面位置と速度ベクトルを図 11 に，等温線を図 12 に示す．熱拡散率が小さいのでヘリウムほど温度は拡散しておらず，移流が支配的である． 10ms では速度と温度ともに良好な分布をしている． 40ms では界面形状はほぼ球形であるが，等温線は球形ではない．気液の密度差が大きいのでわずかな蒸発量の差が大きな対流を引き起こし，これと界面張力による振動が複合して，気泡は外見から分からない程度に楕円体に変形振動しながら成長している．このときに生じる対流が等温線を変形させている．気泡中心から 0° ， 45° ， 90° の直線上の温度と各直線方向の速度の分布を，それぞれ図 13，図 14 に示す． 40ms の時点では x 軸に長軸を持つ楕円体になる方向に対流が生じている．このように，相変化における密度差が大きいほど，また，熱拡散率が小さいほど計算上の問題が顕在化してきており，さらなる改善の余地があることを示唆している．しかし，白川らの報告⁽¹⁾にある

ような十時型の温度分布にはなっていない．これは，式(29)の効果である．

Table 4 Properties of water liquid and vapor

	Vapor	Liquid
Density [kg/m ³]	0.538	960
Specific heat [kJ/kgK]	2.02	4.22
Thermal conductivity [mW/mK]	24.5	677
Heat of vaporization [kJ/kg]	2260	

8. 結 言

レベルセット法を用いた相変化を伴う界面の流動と成長の数値解析手法を提案した．本手法により，溶融・凝固問題から蒸発・凝縮問題を同一の手法で取り扱うことができる．過熱液中の気泡の成長を含む 4 例の検証問題を実施し，以下の結論を得た．

- (1) 界面の成長速度は，界面近傍の法線方向温度分布を近似する曲線の次数の影響を受け，高次の近似曲線を使用することが好ましい．
- (2) 白川らの VOF 法計算と比較して，直交格子に起因する方向別の界面成長速度差が少ない．
- (3) 本手法でも気泡径が大きくなるにしたがって，直交格子の影響は顕著になる．特に，温度変化が対流支配であるほど，そして気液の密度差が大きいほど，直交格子の影響も大きい．
- (4) 界面を跨いだ温度の移流とセル内平均化に起因する界面の成長速度誤差は，式(29)を用いた温度補正により大幅に改善できる．

文 献

- (1) 白川英親・他 4 名，日本機械学会論文集(B 編)，66 巻 649 号，2405-2412，2000
- (2) 人見大輔・他 2 名，日本原子力学会誌，vol.42, No.1, 43-55, 2000
- (3) Sussman, M., Smeraka, P., Osher, S., J. Comput. Phys., 114, 146-159, 1994
- (4) 長崎孝夫・山本美緒，第 37 回日本伝熱シンポジウム講演論文集(2000-5)，465-466，2000
- (5) R. Q. Liang and N. Satofuka, Proc. of The 7th ISCFD, 502-507, 1997
- (6) Sussman, M., Fatem, E., SIAM J. Sci. Comput., vol.20, No.4, 1165-1191, 1999

Fig.7 Interface location and velocity vector in helium

Fig.11 Interface location and velocity vector in water

Fig.8 Temperature contour in helium

Fig.12 Temperature contour in water

Fig.9 Temperature in helium

Fig.13 Temperature in water

Fig.10 Velocity in helium

Fig.14 Velocity in water