Blasius 境界層のバイパス遷移の直接シミュレーション*

高橋直也^{*1}, 山本稀義^{*2}

Direct Numerical Simulation of Blasius Flow Transition

Naoya TAKAHASHI^{*3} and Kiyoshi YAMAMOTO^{*3}Department of Mechanical Engineering, University of Electro Communications,
1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

By-pass transition of the Blasius boundary layer is directly simulated on a parallel computer. Navier-Stokes equation is solved by the Fourier-Chebyshev spectral method and the simulation starts with an initial flow given by the basic flow plus small disturbances. As a result, it is found that for any initial disturbances, transient growth of streamwise vortices is induced by the linear instability in the flow. Then, only for the disturbance with an amplitude larger than the threshold value, the induced streamwise vortices are amplified further by the nonlinear instability to them with strong three-dimensional deformation. Ultimately, the nonlinear instability breaks down the flow to turbulence. The nonlinear amplification of the streamwise vortices is a distinctive feature of the by-pass transition in comparison with the transition induced by the Tollmien-Schlichting wave instability. The threshold amplitude of the initial disturbance, which triggers the transition, depends on the Reynolds number, Re , and its functional form can be described as $Re^{-\gamma}$. We estimate the numerical value of γ as 1.7, which is equal to the value obtained in the channel flow.

Key Words: Boundary Layer, Turbulence, Three-Dimensional Flow, By-pass Transition, Streamwise Vortex

はじめに

剪断流が乱流に遷移するためには、流れに含まれている微小攪乱がなんらかの力学的不安定性によって非線形相互作用を受けるまで増幅される必要がある。平板境界層の不安定化の機構としてよく知られているのは指数関数的な線形増幅過程を持つ Tollmien-Schlichting(TS)波不安定である⁽¹⁾。TS波の増幅率は線形化された攪乱方程式の一つである Orr-Sommerfeld(OS)方程式の固有値問題から求めることができるが、その線形増幅過程は引き続いて起こる非線形増幅過程に比べて十分長いこと、および臨界レイノルズ数 $Re_c(=519^{(1)})$ が予測可能なことから、OS方程式は応用分野における境界層遷移の予測にしばしば用いられてきた⁽²⁾。

一方、TS波不安定によらない遷移の例として、TS波の亜臨界における乱流遷移の実現が実験的に知られている⁽³⁾⁽⁴⁾。このような遷移は特に初期攪乱の振幅が大きい流れに起こることが知られているが、指数関数的増幅過程を経ないで乱流へ遷移することからバイパス

遷移と呼ばれていて、攪乱の代数関数的かつ過渡的な増幅が特徴である⁽⁵⁾。非粘性における代数関数的な増幅過程は知られていたが⁽⁶⁾、これを有限のレイノルズ数の場合の極限として対応づけたのは Henningson *et al.*⁽⁷⁾であった。彼らは初期攪乱を線形化された攪乱方程式の OS 方程式と Squire(SQ) 方程式の固有関数を用いて解析を行い、非粘性で過渡的な増幅が発生し得ることを導いた。理論的には Reddy *et al.*⁽⁸⁾により、過渡的な増幅が OS-SQ 方程式系の固有値の縮退だけでなく、固有関数の非直交性として一般化されている。彼らはまた OS-SQ 方程式系の線形演算子を特異値分解することにより、数値的に最大増幅を見積もっている。このような手法を境界層が発達する場合に適用するため、Luchini⁽⁹⁾は一般の線形最適化問題の手法を用いて取り扱い、その増幅を見積もっている。

このような過渡的な増幅過程によって流れの中では流れ方向に軸を持つ微細な縦渦(Streamwise Vortex,SV)が多数励起されるが、それだけで流れは乱流に遷移することはできず、流れの中にさらに非線形不安定性が誘起されなければならない。その結果として実現した遷移は縦渦型遷移と呼ばれる⁽⁷⁾。縦渦型遷移が実現した初期攪乱の振幅の大きさはレイノルズ数 Re に依存

* 原稿受付 2001年4月16日。

^{*1} 正員、電気通信大学大学院機械制御工学専攻(〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1)。^{*2} 航空宇宙技術研究所(〒182-8522 調布市深大寺東町7-44-1)。

E-mail: naoya@mce.uec.ac.jp

することが知られている。チャネル流の場合は、近似的に Re^{-1} とあらわされることが報告され^{(5) (10) (11)}、Reddy *et al.*⁽⁸⁾や山本ら⁽¹²⁾によって直接シミュレーションが行われ、 $\gamma \simeq 1.7$ という値が得られている。

本研究では Blasius 境界層のバイパス遷移について初期攪乱の大きさととの関係を探ると共に、そのレイノルズ数依存性を調べる。また遷移過程における流れ場の構造を可視化することによって、遷移のメカニズムを明らかにする。

1. 計 算 方 法

1.1 基礎方程式 流れの座標系は、Fig.1 の通り基本流 U の方向に x 軸、平板に垂直方向に z 軸、スパン方向に y 軸を取る。流れは U と攪乱成分 $\mathbf{v}(x, y, z, t) = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}$ に分解して取り扱ふと、 $\mathbf{v}$ に関する方程式は Navier-Stokes 方程式と連続の方程式から

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + w \frac{dU}{dz} \mathbf{e}_x = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

と導かれる。ここで $\mathbf{e}_x$ は流れ方向の単位ベクトル、 p は圧力場である。また U の $z \rightarrow \infty$ での流速を 1 に規格化してある。本計算では初期流れは Blasius 流に微小攪乱を加えた流れから出発する。また流れ方向に周期性を仮定し、境界層流れを平行流としているが、境界層の厚さは遷移過程と共に時間的に増加するとして取り扱われた。

速度場は流れ方向 x およびスパン方向 y には周期的境界条件を適用して (図 1)、

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \sum_{k_x, k_y} \tilde{\mathbf{v}}(k_x, k_y, z, t) \exp(ik_x x + ik_y y) \quad (3)$$

とフーリエ級数展開して表す。ここで波数 k_x, k_y は流れの計算領域を L_x, L_y とした時、 $k_x = (2\pi/L_x)n_x$, $n_x = 0, \pm 1, \dots, \pm N_x/2$, $k_y = (2\pi/L_y)n_y$, $n_y = 0, \pm 1, \dots, \pm N_y/2$ である。方程式 (1) の計算にはフーリエ・スペクトル法⁽¹³⁾を適用するが、計算のエイリアジング誤差を消去するためには 2/3 則を用いる。一方、 z 方向にはチェビシェフ選点法を用い、 $[0, \infty)$ の流れの領域を取り扱うために代数関数的射影変換⁽¹⁴⁾を行った。また、時間積分には、粘性項に 2 次のクラーク・ニコルソン法、その他の項は 2 次のアダムス・バッシュフォース法を適用した。さらに、非圧縮条件を満たすためには Influence Matrix 法⁽¹³⁾を用いた。

1.2 計算コードの検証 計算コードの検証を 3 種類のレイノルズ数 Re (基本流 U と排除厚さを基準とし

Fig. 1 Coordinate system of Blasius boundary layer flow.

たレイノルズ数)500, 600, 2580 に対して行った。計算領域は TS 波の波長 λ_{TS} を基準として、 $L_x = L_y = \lambda_{TS}$ と取り、空間格子点数を $N_x \times N_y = 32 \times 32$ と取る。また、壁に垂直方向の選点数は 65 をとった。検証は流れの中に発生した TS 波の増幅率 ω を OS 方程式の固有値と比較した。その結果、両者は 3 つのレイノルズ数の場合とも 1% 以下で一致を得たので、計算精度は遷移領域については十分であると考えられる。

以下の直接数値シミュレーションでは $L_x = 2\lambda_{TS}$, $L_y = \lambda_{TS}$ と取り、格子点数は $N_x = 128$, $N_y = 64$ 、選点数を 129 と高精度化して計算を行った。また流れ方向の周期性の効果を調べるため、 $L_x = 4\lambda_{TS}$, $L_y = \lambda_{TS}$, $N_x = 256$, $N_y = 64$ 、選点数を 129 とした直接数値シミュレーションも行われた。

1.3 攪乱のエネルギーノルムと初期条件 攪乱のエネルギーのノルム (平均値) を

$$E(t) = \int_0^\infty dz \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \frac{1}{2} |\mathbf{v}(x, y, z, t)|^2 / L_x L_y \quad (4)$$

と定義する。式 (3) を (4) に代入すれば、

$$E(t) = \sum_{k_x, k_y} \int_0^\infty dz \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}(k_x, k_y, z, t)|^2,$$

$$\equiv \sum_{k_x, k_y} E(k_x, k_y) \quad (5)$$

が得られる。ここで $E(k_x, k_y)$ はフーリエモード (k_x, k_y) のエネルギーを表す。

初期攪乱としては $E(k_x, k_y)$ を一定とする白色ノイズの速度場を与えた。また、この流れは同時に連続条件 (2) と壁面上の境界条件を満たす必要があるが、これらは関数空間 $\tilde{\mathbf{v}}$ に関する線形束縛条件となるので、直交変換を用いた方法によって満たした⁽¹⁵⁾。また攪乱の振幅の尺度として、流れ方向の速度成分 u の選点 z_i 上での自乗平均値 $u_{rms}(z_i, t)$ の最大値 $|u|_{\max}(t)$

$$|u|_{\max}(t) = \max_{z_i \in [0, \infty)} u_{rms}(z_i, t), \quad (6)$$

$$u_{rms}(z_i, t) = \sqrt{\{u(x, y, z_i, t) - \bar{u}(z_i, t)\}^2}, \quad (7)$$

で定義する。上線部は x, y 平均値

$$\bar{a}(z_i, t) \equiv \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy a(x, y, z_i, t) / L_x L_y \quad (8)$$

を表す。

次に流れ場の非線形相互作用の大きさを評価するため、攪乱の 2 次相関 $\overline{(u - \bar{u})(w - \bar{w})}$ を選点 z_i で計算し、その大きさのもっとも大きい値を $\langle uw \rangle(t)$ と定義し、その時間的な変化を調べる。また遷移に伴う境界層厚さの増加は、排除厚さ

$$\delta_D(t) \equiv \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{U + \bar{u}(z, t)}{U_\infty} \right\} dz \quad (9)$$

によって観察する。

2. 計算結果と検討

バイパス遷移の初期攪乱依存性を調べるため超臨界レイノルズ数 600 において初期攪乱の大きさを変えた直接数値シミュレーションを行った。図 2 は、初期攪乱のフーリエモードのエネルギー $E(k_x, k_y)$ を (a) $10^{-5}(|u|_{max} = 0.108)$ 及び (b) $1.25 \times 10^{-5}(|u|_{max} = 0.112)$ と与えた場合の主要な低波数成分 ($0 \leq k_x \leq 3(2\pi/\lambda_{TS}), 0 \leq k_y \leq 6(2\pi/\lambda_{TS})$) のエネルギーの時間的な発達過程を示す。図中の実線は $k_x = 0$ のモードを表し、点線は $k_x \neq 0$ のモードを表す。時間と共に各モードはそれぞれ固有の増幅、減衰過程を示すが、その定性的傾向は $t \simeq 200$ までは (a), (b) 共にほぼ同じである。これは各モードの発達が両方とも線形過程であることを示す。これに対して、 $t \geq 300$ では (a) と (b) でその発達過程が異なってくる。まず (a) では各モードはばらばらに時間と共にゆっくり減衰する。一方、(b) では、各モードが同一レベルに揃ってくるが、これは非線形相互作用によって相関が強くなった結果である。すなわち、(a) では線形不安定性による攪乱の過渡的増幅が発生したが、非線形な増幅が発生しなかったためにその後各モードは個々に減衰し、乱流への遷移が発生しなかった (case 1 と略称) のに対して、(b) では線形不安定性による過渡的増幅によって $t \geq 300$ で更に非線形な増幅が誘起され、その結果として $t \simeq 800$ で乱流に遷移している (case 2)。流れの乱流への遷移は平均流の変形の大きさを表す $(0, 0)$ モードの変化によって如実に示されている。

図 2(b) の遷移過程での $t = 200, 400$ における渦度を可視化した結果を図 3 に示す。まず図 3(a) のエンストロフィーの等値面 ($t = 200$) ではバイパス遷移に特徴的な流れ方向に軸を持つ多数の縦渦の誘起が観測されている。一方、図 3(b) では、図 3(a) では見られない縦渦中のこぶや折り曲り等の 3 次元変形が発生

Fig. 2 Energy evolution in various wave numbers vs. time in Blasius boundary layer flows of (a) the case 1 and (b) the case 2, $Re=600$. Solid lines are two-dimensional modes ($E(k_x, 0)$), and dashed lines are three-dimensional modes ($E(k_x, k_y)$).

している事が観測できるが、このような変形は非線形型相互作用の結果と考えられる。

図 4 には図 3 の縦渦の断面に流れ方向の速度成分 ($U + u$) の等高線を重ねた結果を示す。また、矢印は各点における速度ベクトルを $y-z$ 面に射影した結果を示す。これらの図より、縦渦は境界層の低速度領域 (壁面近傍) に発生している事が分かる。その結果として、図 4(a) では速度成分 ($U + u$) のスパン (y) 方向分布

に変動が発生している事が観測されるが、その変動はまだそれほど大きくはない。一方、図 4(b) では壁近傍から局所的に低速度領域が吹き上げるバースト現象が発生している事が示されている。その結果として、この領域では $\partial(U+u)/\partial z$ 及び $\partial(U+u)/\partial y$ に関する高剪断領域が発生し、流れの不安定化は更に進むと考えられる。これらの現象は、今回観察した縦渦型不安定流れ場に現れる典型的な渦構造であって、図 2(b) におけるモードの発達過程及び図 3 の渦構造ともよく対応している。また、図 4(b) では壁際にあった縦渦

Fig. 3 Vortical structure of the transitional flow of the case 2 at (a) $t = 200$ and (b) $t = 400$.

がバーストによって吹き上げられ、3次元構造の形成への引金となっている様子が捉えられている。このような縦渦構造の崩壊が攪乱の3次元化過程を反映していることから、この場合の遷移は縦渦型遷移と呼ばれている^{(5) (10) (11)}。

Fig. 4 Spanwise cuts of the streamwise vortices of the case 2 at (a) $t = 200$, and (b) $t = 400$. Gray: high vorticity regions, solid lines: contours of $(U+u)$, arrows: velocity vectors mapped on the section.

前記2種類の直接数値シミュレーションにおける攪乱の各速度成分の振幅 $|u|_{max}$, $|v|_{max}$, $|w|_{max}$ の時間的発達を図5に示す。計算結果は case 1 及び case 2 共に流れ方向成分 $|u|_{max}$ が他の2成分 $|v|_{max}$, $|w|_{max}$ に比べてはるかに大きくなっているが、これは攪乱のストリーク構造を反映している。また、これらの速度成分の発達過程は $t \approx 200$ まで定性的にほぼ同じ傾向を示しているが、前記の様に、これは case 1, case 2 共に同じ線形不安定過程を経たことを示している。一方 $t > 300$ になると、case 1 と case 2 でその発達過程は異なり、case 1 では全ての成分が減衰するのに対して、case 2 では再び増幅が始まっている。これらの結果から、case 1 では攪乱の線形不安定性による過渡的増幅のみが発生したのに対して、case 2 ではさらに $t > 300$ で非線形な増幅が発生したことを示している。さらに、case 2 での $t > 600$ では攪乱の増幅は止まり、一定の飽和状態に漸近する傾向を示しているが、これは乱流への遷移が実現した結果である。

次に流れの攪乱の2次相関 $\langle uv \rangle(t)$ の時間的発達を図6に示す。case 1 では $\langle uv \rangle(t)$ は時間と共に一様に

Fig. 5 Time evolution of peak r.m.s. ■: case 1, □: case 2.

零に漸近するのに対して、case 2 ではその絶対値が $t \approx 300$ 以後に急激に増加しているが、これは非線形増幅の発生を示している。さらに、 $t \approx 600$ で最大値に到達し、その後はやや小さい一定値に漸近しているが、これは図 5 でも見られた傾向である。

Fig. 6 Time evolution of correlation $\langle uw \rangle(t)$. ■: case 1, □: case 2.

境界層の厚さは層流と乱流では大きく異なる。遷移過程における排除厚さ $\delta_D(t)$ の変化を図 7 に示す。遷移が発生しない case 1 では δ_D はほとんど変化しないのに対して、遷移が発生する case 2 では $t \approx 600$ 以後

に急激に増加している。この結果を図 5, 図 6 と比較すると、攪乱のエネルギーや攪乱の 2 次相関 $\langle uw \rangle(t)$ は乱流遷移の初期段階で急激に発達し、ある時刻で最大値を取り、その後乱流の平衡状態に漸近するが、境界層の厚さは攪乱のエネルギーや相関の大きさがもっとも大きくなった後に増加が顕著になることがわかる。

Fig. 7 Time evolution of displacement thickness $\delta_D(t)$. ■: case 1, □: case 2.

図 2(b) で述べた縦渦型遷移を導く初期攪乱の振幅 ($|u|_{max}$) の閾値はレイノルズ数 Re に依存する。そのレイノルズ数依存性を調べるため、亜臨界レイノルズ数 $Re = 300$ から超臨界レイノルズ数 $Re = 5000$ に渡って初期攪乱の振幅 $|u|_{max}$ を変えた直接数値シミュレーションを実施し、遷移を誘起する初期攪乱の閾値を求めた結果を図 8 に示す。図中の□は縦渦型遷移が実現した直接数値シミュレーションにおける最小の $|u|_{max}$ を示し、■は遷移が実現しなかった場合の最大の $|u|_{max}$ を示す。遷移を導く振幅の閾値はこれらの間にある。図中の実線はこれらの閾値のレイノルズ数依存性を $Re^{-\gamma}$ で近似した結果を表し、この実線より大きい振幅を有する攪乱では縦渦型遷移が実現する事を示す。直接数値シミュレーションの結果にもっとも合致する値は $\gamma \approx 1.7$ で、この値はチャンネル流の縦渦型遷移で得られた値⁽¹²⁾とも一致する。

おわりに

平板上の Blasius 境界層に発生するバイパス遷移のメカニズムを解明するため、遷移過程の直接数値シミュレーションを行った。その結果、流れの中では、まず、初期攪乱の大きさに関わらず、線形不安定性が発生し、流れ方向に軸をもつ微細な縦渦が渦度的に増

Fig. 8 Threshold amplitude of the initial disturbances vs. Reynolds number Re . ■: Amplitude of the initial disturbance that does not induce SV transition. □: Amplitude that induces SV transition.

幅されることが分かった。この時、もし、初期擾乱の振幅が特定の閾値を越えている場合は増幅された縦渦によって流れの中に更に非線形増幅が誘起されて、その結果、3次元擾乱が急激に増幅され、ついには、乱流に遷移することが分かった。縦渦型遷移を誘起する初期擾乱の閾値はレイノルズ数 Re に依存し、近似的に $Re^{-\gamma}$ と表すことが出来た。直接数値シミュレーションから $\gamma \approx 1.7$ が得られたが、この値はチャンネル流の結果と一致する。

文 献

- (1) Drazin, P. G. and Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability* (1981) Cambridge Univ. Press.
- (2) Arnal, D., Boundary layer transition: predictions based on linear theory, *AGARD-R-793*, (1993) 2.
- (3) Patel, V. C. and Head, M. R., Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows, *Journal of Fluid Mechanics* **38** (1969) 181.
- (4) Matsubara, M. and Alfredsson, P. H., Disturbance growth in boundary layers subjected to free stream turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **430** (2001) 149.
- (5) Trefethen, L. N., Trefethen, A. E., Reddy, S. C., and Driscoll, T. A., Hydrodynamic stability without eigenvalues, *Science*, **261** (1993) 578.
- (6) Landahl, M. T., A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **98** (1980) 243.
- (7) Henningson, D. S. and Schmid, P. J., Vector eigenfunction expansions for plane channel flows, *Studies in Applied Mathematics*, **87** (1992) 15.
- (8) Reddy, S. C., Schmid, P. J., and Henningson, D. S., Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **53** (1993) 15.
- (9) Luchini, P., Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations, *Journal of Fluid Mechanics*, **404** (2000) 289.
- (10) Baggett, J. S. and Trefethen, L. N., Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence, *Physics of Fluids*, **9** (1997) 1043.
- (11) Reddy, S. C., Schmid, P. J., and Baggett, J. S., On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **365** (1998) 269.
- (12) 山本 稀義, 高橋 直也, 平面ホアズイユ流遷移の DNS, 日本流体力学会 講演論文集, (2000), 583.
- (13) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (1988) Springer-Verlag.
- (14) Grosch, C. E. and Orszag, S. A., Numerical solution of problems in unbounded regions: Coordinate transforms, *Journal of Computational Physics*, **25** (1977) 273.
- (15) Hosokawa, I. and Yamamoto, K., On direct numerical simulation of incompressible shear-flow turbulences by the Fourier-Spectral method, *Journal of the Physical Society of Japan*, **55** (1986) 1030.