差分法ダイナミックモデルに適した SGS 乱流モデルの構築*

(第2報, SGS スカラー流束のモデル化)

坪倉 誠^{*1}, 小林 敏雄^{*2}, 谷口 伸行^{*3}

Development of SGS Models for the Dynamic Procedure Using Finite Difference Method (2nd Report, Modeling of SGS Scalar Flux)

Makoto TSUBOKURA^{*4}, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI^{*4} Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
4259 Nagatsuta, Midori ku, Yokohama shi, Kanagawa, 226 8502 Japan

Two different subgrid-scale scalar flux models, namely isotropic and anisotropic representation, for the dynamic procedure using finite difference method are derived following the procedure proposed in the previous reports. The proposed models have been assessed on plane turbulent channel flow with passive scalar transport at various grid resolutions and are found to show better agreement with DNS results than those of Smagorinsky's model. The isotropic model is improved to be anisotropic representation by considering the effect of GS velocity gradient on the SGS scalar flux and using the results of *a priori* test obtained by the LES of a finer grid resolution. The anisotropic model mitigates the isotropic one's overestimation of scalar intensity and streamwise scalar flux near the wall. The notable feature of the proposed models is their insensitivity to the discrete form of the test filtering operation applied during the implementation of the dynamic procedure, which clearly indicates the validity of the proposed models for use in the context of finite difference method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Turbulent Flow, Large Eddy Simulation, Subgrid Scale Model, Plane Channel Flow

1. 緒言

Large Eddy Simulation (LES) は、乱流場を数値解析する際に、計算格子以下のスケール (Subgrid-Scale; SGS) についてのみ乱流モデルを適用するため、レイノルズ平均乱流モデルと比較してより普遍的でかつ高精度な乱流モデルの開発が可能であると期待されている。一方、計算格子スケール (Grid-Scale; GS) 以上の運動は基礎式から非定常数値解析により直接求められるために、解析結果が、離散化に用いた数値スキームや格子解像度の影響を強く受けるという問題点を有する。従って一般的に SGS モデルの開発においては、高波数成分まで高精度で捕えられるスペクトル法を用いてモデルの評価がなされる。しかしこれは逆に開発されたモデルを差分法を用いた解析に適用した際、差分誤差の影響で、スペクトル法で確認された効果が得られないという問題を引き起こす。その一例として Germano ら⁽¹⁾により提案されたダイナミックモデルを、差分法を用いて壁乱流に適用した場合、平均流速の対数則領域、および主流方向乱流強度が過大評価されることが知られている⁽²⁾。さらにダイナミックモデルや Bardina により提案されたスケール相似則モデル⁽³⁾を適用した場合に

は、フィルタ操作の離散化に解析結果が依存するという問題が起こる⁽⁴⁾。即ち SGS モデルの開発、評価においては、工学的問題においてしばしば用いられる差分法による、格子解像度依存性を考慮に入れた検討が重要である。実際森西ら⁽⁵⁾は差分精度と格子解像度が壁乱流 LES に及ぼす影響を詳細に調べている。著者らは既報において、Yoshizawa ら⁽⁶⁾による手法を踏襲して、差分法ダイナミックモデルへの適用を考慮し、スマゴリンスキーモデルに対してより差分誤差に対する整合性のとれた等方渦粘性型モデルを導出した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。そして提案したモデルを様々な格子解像度の壁乱流 LES に適用した結果、スマゴリンスキーモデルと比較して改善された統計量を予測し、かつ離散テストフィルタ操作に対する依存性も小さい事が解った。

一方工学的問題においては、乱流場における熱・物質等の乱流輸送現象に関わる問題が多々あり、こういった場の予測には高精度な SGS スカラー流束モデルの開発が不可欠である。そこで本研究では、既報の SGS 応力モデルの導出手法を SGS スカラー流束モデルに適用し、差分法により適した等方型スカラー流束モデルの提案を行い、さらにその改良モデルとして非等方型モデルの導出を行う。得られたモデルをスカラー輸送を含む平行平板間乱流 LES に適用し、様々な格子解像度に対して評価することで、差分法を離散化に用いた場合の、提案したモデルの有用性について検討を行う。

* 原稿受付 2001 年 6 月 20 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田 4259)。^{*2} 正員, 東京大学生産技術研究所第2部 (〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)。^{*3} 正員, 東京大学情報基盤センター (〒113-8658 東京都文京区弥生 2-11-16)。

E-mail: tsubo@depe.titech.ac.jp

2. SGS モデリング

2.1 基礎式 本研究では流体は非圧縮ニュートン流体であるとする。この時、流れ場の基礎式は連続の式と運動方程式で表される。この基礎式に対して空間フィルタ操作を施すことで LES の基礎式を得る。ここでは空間フィルタ操作を次のように表す。

$$f^g(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; \Delta^g) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad \text{.....(1)}$$

G はフィルタ関数であり、フィルタ幅 Δ^g でフィルタ操作された関数を f^g で表している。尚、グリッドフィルタ操作は右上肩添え字 “ g ” で、ダイナミックモデルにおいて必要なテストフィルタ操作は右上肩添え字 “ T ” で表す。以降、右上肩添え字については総和規約をとらない事とする。フィルタ操作を連続で行う場合、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; \Delta^T) f^g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = (f^g)^T = f^{gT} \quad \text{.....(2)}$$

と表す。グリッドフィルタ操作を施した連続の式、運動方程式、ならびに本研究で扱うパッシブスカラーの輸送方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial u_j^g}{\partial x_j} = 0 \quad \text{.....(3)}$$

$$\frac{\partial u_i^g}{\partial t} + \frac{\partial u_i^g u_j^g}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^g}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \quad \text{.....(4)}$$

$$\frac{\partial \theta^g}{\partial t} + \frac{\partial \theta^g u_j^g}{\partial x_j} = +\alpha \frac{\partial^2 \theta^g}{\partial x_j \partial x_j} + \Sigma - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad \text{.....(5)}$$

式中 u_i は速度ベクトルの直交座標系 x_i 軸方向成分 ($i=1,2,3$)、 p は圧力を密度で割った値、 θ はパッシブスカラー、 ν 及び α は分子動粘性係数及び分子拡散係数、 Σ は流体中の単位体積当りのスカラー生成率である。式(4)、(5)の最終項は SGS 応力、及び SGS スカラー流束であり、次のように与えられる。

$$\tau_{ij} = (u_i u_j)^g - u_i^g u_j^g \quad \text{.....(6)}$$

$$q_j = (\theta u_j)^g - \theta^g u_j^g \quad \text{.....(7)}$$

2.2 SGS 応力のモデル化 等方渦粘性型モデルは SGS 乱流応力と歪み率テンソルの比例関係で表されるモデルであり、一般によく用いられるスマゴリンスキーモデルは次のように与えられる。

$$\tau_{ij}^g - \frac{1}{3} \tau_{kk}^g \delta_{ij} \approx -2 C \{ (\Delta^g)^2 \sqrt{S_{lm}^g S_{lm}^g} \} S_{ij}^g \quad \text{.....(8)}$$

ただし S_{ij} は歪み率テンソルであり次のように表される。

$$S_{ij}^g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^g}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \right) \quad \text{.....(9)}$$

以降、このモデルを “S モデル” とする。

これに対して著者らは前報⁽⁷⁾において次に示す等方型渦粘性モデルを提案した。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \approx -\frac{2}{3} C \tau_{kk} S_{ij}^g / \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \quad \text{.....(10)}$$

このモデルは、SGS 応力 τ_{ij} の輸送方程式において、その生成項が支配的であるとの仮定から、ある時間スケール T を生成項に乗じることによって得られる。式(10)中に含まれるモデル係数 C についてはダイナミックモデルを用いて決定する。この時サブテストスケール(STS)応力 $T_{ij} = (u_i u_j)^{gT} - u_i^{gT} u_j^{gT}$ に対するモデル化が必要になり、同様に等方型渦粘性モデルを用いてモデル化される。

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \approx -\frac{2}{3} C T_{kk} S_{ij}^{gT} / \sqrt{2 S_{lm}^{gT} S_{lm}^{gT}} \quad \text{.....(11)}$$

このモデルにおいて右辺に含まれる SGS 及び STS 乱流エネルギー τ_{kk} 、 T_{kk} に対してモデル化の必要がある。このモデル化については著者⁽⁸⁾によりダイナミックモデルの定式化における差分誤差の整合性を考慮して次のようなモデル化が提案されている。

$$\tau_{kk} = (u_k^g u_k^g)^g - u_k^{g^g} u_k^{g^g} \quad \text{.....(12)}$$

$$T_{kk} = (u_k^g u_k^g)^{gT} - u_k^{g^gT} u_k^{g^gT} \quad \text{.....(13)}$$

この式(10)~(13)で表されるモデルを用いる利点は次の二つである。

- (I). SGS モデル中に長さスケール、例えば式(8)中の Δ^g が陽的に含まれない。即ちダイナミックスマゴリンスキーモデルを用いた場合に予め決定する必要のある SGS モデルと STS モデルの長さスケールの比 Δ^{gT} / Δ^g を決める必要がない。
- (II). 差分法により離散化したテストフィルタ操作において現れるフィルタパラメータ Δ^T / h (h は格子幅) に対する解の依存性が小さい。(フィルタパラメータについては 3.2 節参照)

断らないかぎり本研究では SGS 応力に対してはこの式(10)~(13)を用いる。以降このモデルを “I モデル” とする。

2.3 SGS スカラー流束のモデル化

SGS スカ

ラー流束モデルとして一般によく用いられるのは式(8)のスマゴリンスキーモデルからの類推により得られる次のモデルである。

$$q_j \approx -C_\theta \{ (\Delta^s)^2 \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_j} \dots\dots\dots(14)$$

以降、このモデルを式(8)と同様、“Sモデル”とする。モデル係数 C_θ に対してはSGS乱流プラントル数 Pr_{sgs} と式(10)のSGS応力のモデル係数 C を用いて

$$C_\theta = C / Pr_{sgs} \dots\dots\dots(15)$$

とししばしば表される。 Pr_{sgs} に対しては一般に定数0.5程度の値(例えばEidson⁽⁹⁾)が経験的に用いられる。これに対してMoinら⁽¹⁰⁾はこの Pr_{sgs} (もしくは C_θ)をダイナミックに求める手法を提案している。

式(14)に対して、前節で示した式(10)のSGS応力モデルとより整合性を有するSGSスカラー流束モデルを得る為に、Yoshizawaら⁽⁶⁾のSGS応力のモデル化手法を踏襲して、SGSスカラー流束モデルを導出する。即ちSGSスカラー流束の輸送方程式においてその生成項が他の項に対して支配的であると仮定し、適当な時間スケールを乗じる事でモデルを得る。SGSスカラー流束 q_j の生成項は次のように表される。

$$P_j = -\tau_{jk} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_k} - q_k \frac{\partial u_j^s}{\partial x_k} \dots\dots\dots(16)$$

この生成項に含まれるSGS応力とスカラー流束に対して、等方性を仮定すると、SGS応力についてはその対角成分は $\tau_{kk}/3$ で与えられ、その他の非対角成分、及びSGSスカラー流束についてはゼロとなる。このとき時間スケールとして T を乗じることで、SGS応力は次のようにモデル化される。

$$q_j \approx -\frac{1}{3} T \tau_{kk} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_j} \dots\dots\dots(17)$$

このモデルは結果的にSGSスカラー流束とスカラーの勾配の比例関係を仮定した等方型の渦拡散モデルの形をしていることに注意されたい。ここで式(10)のSGS応力モデルの導出に際して用いた時間スケール、

$$T = C_\theta / \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \dots\dots\dots(18)$$

を用いると次のSGSスカラー流束モデルが得られる。

$$q_j \approx -\frac{1}{3} C_\theta \tau_{kk} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_j} / \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \dots\dots\dots(19)$$

以降このモデルを式(10)で表されるSGS応力モデルと同様に“Iモデル”とする。この時、モデル係数 C_θ に対してはスマゴリンスキー型スカラー流束モデルと同

様にSGS乱流プラントル数を用いて式(15)で表せる。本研究では C_θ はダイナミックモデルを用いて決定する。この時STSスカラー流束 $Q_j = (\theta u_j^s)^{sT} - \theta^{sT} u_j^{sT}$ に対しては式(19)から次のようにモデル化を行う。

$$Q_j \approx -\frac{1}{3} C_\theta T_{kk} \frac{\partial \theta^{sT}}{\partial x_j} / \sqrt{2 S_{lm}^{sT} S_{lm}^{sT}} \dots\dots\dots(20)$$

この時、SGSとSTSスカラー流束の間に次の関係が成立することに着目する。

$$F_j = Q_j - q_j^T = (\theta^s u_j^s)^T - \theta^{sT} u_j^{sT} \dots\dots\dots(21)$$

式(19)、(20)でモデル化されたSGS、STSスカラー流束をこの式(21)に代入した物と $(\theta^s u_j^s)^T - \theta^{sT} u_j^{sT}$ との誤差、

$$e_j = F_j + C_\theta H_j \dots\dots\dots(22)$$

$$H_j = \frac{T_{kk}}{3} \frac{\partial \theta^{sT}}{\partial x_j} / \sqrt{2 S_{lm}^{sT} S_{lm}^{sT}} - \left\{ \frac{\tau_{kk}}{3} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_j} / \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \right\}^T \dots\dots\dots(23)$$

が最小自乗法により最小となるようにモデル係数は求められる(Lilly⁽¹¹⁾)。

$$C_\theta = -\frac{F_j H_j}{H_i H_i} \dots\dots\dots(24)$$

式(23)に含まれる τ_{kk} 、 T_{kk} に対してはSGS応力と同様に式(12)、(13)を用いてモデル化する。本研究の目的の一つは、SGS応力に対してその有効性が示された定式化が、どの程度SGSスカラー流束に対しても有効であるか調べることである。

2・4 SGSスカラー流束モデルの非等方化 2.2

節において示したSGSスカラー流束の生成項、即ち式(16)はSGSスカラー流束の生成はGSスカラー勾配のみならずGS速度勾配も寄与する事を示している。生成項に対して等方性を仮定しない事で次に示す、非等方型モデルが得られる。

$$q_j \approx -C_\theta \left\{ \tau_{jk} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial u_j^s}{\partial x_k} \right\} / \sqrt{2 S_{lm}^g S_{lm}^g} \dots\dots\dots(25)$$

非等方型モデルについてはいくつかのバリエーションが考えられる為、本研究では4.3節においてSGSスカラー流束の各成分とスカラーもしくは速度勾配との相関性を調べた上で、最終的に壁乱流場において有効なモデルを提案する。

3. 数値解析手法

3.1 解析モデル 対象とする流れ場は平行平板間乱流とする。この時、主流方向、壁垂直方向、スパン方向をそれぞれ x 、 y 、 z (もしくは x_1 、 x_2 、 x_3) とする。解析結果は全て平板間半幅 δ 、壁面剪断応力から求まる摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{(\nu \partial u / \partial y)_{wall}}$ 、壁面スカラー流束から求まる摩擦温度 $\theta_\tau = (\alpha \partial \theta / \partial y)_{wall} / u_\tau$ を用いて無次元化を行う。

この時、上下壁面のスカラー値をそれぞれ T_{top} 、 T_{bottom} としてスカラー場については次の二種類の場を考える。即ち Type I は上下平行平板においてスカラー値をゼロとし($T_{top}=0$, $T_{bottom}=0$)、流体内部において単位体積当たり1の生成量がある($\Sigma=1$)とする。Type II は平行平板下面においてスカラー値を1とし、上面においてゼロ($T_{top}=0$, $T_{bottom}=1$)とする。この条件はHoriuti⁽¹²⁾やKimら⁽¹³⁾によるDNSと一致しており、本研究ではDNSの結果と比較することでその有用性を検討する。流れ場を決めるパラメータとしてレイノルズ数 $Re = u_\tau \delta / \nu$ とプラントル数 $Pr = \nu / \alpha$ が挙げられる。本研究ではレイノルズ数は180とする。プラントル数については0.1、0.7、2.0の三ケースについて解析を行う。解析領域についてはDNSと同じ $4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$ とする。

主流方向及びスパン方向には等間隔に格子を配し、壁方向には不等間隔格子を適用する。壁方向には壁近傍に十分細かい格子を配置することにより (壁面最近傍点は壁座標で $y^+ = 0.9$)、壁上では速度ゼロの滑りなし条件を与えている。なお、流れ方向、スパン方向には周期境界条件を与えている。用いた格子数 (解像度) については壁垂直方向については一定の65とするが、主流方向、スパン方向については表1に示す5通りの解像度について調べ、特に格子解像度による影響を考慮に入れた検討を行う。

3.2 離散化手法 基礎式の離散化にはスタッガード配置による有限差分法を用いている。このとき、運動方程式の対流項、圧力勾配項、及び連続の式に対して、森西⁽¹⁴⁾により提案された運動量エネルギー同時保存離散化手法を適用しており、それぞれの項に対する離散化精度は四次である。時間進行法には半陰解法的

アルゴリズムを採用し、粘性項の壁方向の二階微分項は二次精度のクランク・ニコルソン法で、他の全ての項は三次精度のルンゲ・クッタ法で離散化する。圧力ポアソン方程式の解法には周期方向にはFFT、壁方向には七重対角行列法を適用している。離散化手法に対するその他の詳細は森西の文献⁽¹⁴⁾を参照されたい。

陽的フィルタ操作は被フィルタ関数をテイラー展開することで次のような微分形で近似できる。⁽¹⁵⁾

$$f^{ab} = f^a + \frac{\Delta^{b2}}{24} \frac{\partial^2 f^a}{\partial x_j \partial x_j} + O\left\{\left(\Delta^b\right)^4\right\} \dots\dots\dots (26)$$

この式に対して、被フィルタ関数の二階微分を二次精度の中心差分法で与えることで、次のような差分法により離散化した陽的フィルタ操作を定義できる。

$$f_i^{ab} = f_i^a + \frac{\left(\Delta^b\right)^2}{24} \frac{f_{i-1}^a - 2 f_i^a + f_{i+1}^a}{h^2} \dots\dots\dots (27)$$

本研究では、非一様な格子を用いている壁方向については十分細かい格子を配し、陽的なフィルタ操作は行わない。

この離散化されたフィルタ操作に対して、格子幅 h とフィルタ作用幅 Δ の比が離散化されたフィルタ操作におけるパラメータとして予め決定する必要がある。本研究ではグリッドフィルタ操作、テストフィルタ操作に対して、表2に示すそれぞれ三種類のパラメータ値について調べる。この時グリッドフィルタ操作は小文字、テストフィルタ操作は大文字で表すとする。即ちフィルタ操作(Aa)は $(\Delta^T/h)^2 = 4$ 、 $(\Delta^S/h)^2 = 1$ を表す。式(8)、(14)で表されるスマゴリンスキーモデルを用いたダイナミックモデルにおいて必要となるモデルパラメータ Δ^{ST}/Δ^S についてはGermanoらにより提案されている値2と、壁面方向には陽的なフィルタ操作を施さない点、及びモデルにおける長さスケールが各方向のフィルタ幅を用いて $\Delta^S = \sqrt{\Delta_x^S \Delta_y^S \Delta_z^S}$ で定義される事を考慮して^{2^{2/3}}で与える。Sモデルに対してはこのダイナミックモデルパラメータ Δ^{ST}/Δ^S と、陽的テストフィルタ操作に対するパラメータ $(\Delta^T/h)^2$ を予め決める必要がある。一方Iモデルについては、2.1節で述べた通りダイナ

Table 1 Grid resolution

Grid number	Region size	Grid width
24 × 36	4πδ × 2πδ	Δx ⁺ = 94.2, Δz ⁺ = 31.4
32 × 48		Δx ⁺ = 70.7, Δz ⁺ = 23.6
48 × 72		Δx ⁺ = 47.1, Δz ⁺ = 15.7
64 × 96		Δx ⁺ = 35.3, Δz ⁺ = 11.8
96 × 144		Δx ⁺ = 23.6, Δz ⁺ = 7.9

Table 2 The ratios of filter and grid width on the discrete filtering operation

	a	b	c	A	B	C
$(\Delta^S/h)^2$	1	4/3	2			
$(\Delta^T/h)^2$				4	6	8

ミックモデルパラメータは存在しないが、陽的グリッド・テスト両操作を含むため、 $(\Delta^T/h)^2$ と $(\Delta^S/h)^2$ を予め決める必要がある。モデル係数の負値に起因する数値不安定性についてはGermanoの提案通り、流れ方向、及びスパン方向に対する平均操作を採用し、回避している。

4. 解析結果

4.1 等方型SGS流束モデル(1) 最初にSGS応力、スカラー流束モデルに対して式(8)、(14)を用いたSモデルと、既報にて提案したSGS応力モデル(式(10))とSGSスカラー流束モデルとして式(19)を用いたIモデルの比較を行う。流れ場はType Iとし、格子解像度は主流、スパン方向に 32×48 としている。

図1に平均流速、平均スカラー、主流方向乱流強度、スカラー強度の分布を示す。既に報告されているようにSモデルを用いた場合、平均流速が過大評価される傾向にあるのがここでも確認される。これに対してIモデルの予測精度は良好であり、DNS⁽¹²⁾と良い一致を示している。平均スカラー分布は、平均流速とほぼ同様の傾向を示しており、Sモデルは対数則域で過大評価を示している。乱流強度、スカラー強度についてもSモデルが過大評価をしており、この傾向は提案したIモデル

Fig. 1 Mean velocity(above left), scalar(above right), GS streamwise turbulent intensity(below left) and r.m.s. of GS scalar(below right) predicted by Smagorinsky's and proposed isotropic models and their dependence on filtering parameter

(Type I, Pr=0.7, grid resolution: 32x48)

ルを用いる事で改善される。ここで用いた解像度に対しては、平均流速はフィルタパラメータ(Aa)を用いたIモデルが最もDNSに近い一致を示している。一方で平均スカラー量についてはIモデル(Aa)の解は若干ではあるがDNSの値に対してやや大きく評価している。

差分法LESにおいては空間解像度の影響について十分吟味した上でモデルの評価をする必要がある(森西⁽⁶⁾)。そこで次に同じ流れ場に対して、格子解像度を変化させた場合の解の依存性を検討する。ここでは次式で定義されるバルク流速、ならびにバルクスカラー量に対する比較を行う。

$$U_b = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} |u_y^s| dy \quad (28)$$

$$\Theta_b = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} |\theta^s| dy \quad (29)$$

図2に横軸にスパン方向格子解像度をとった時の各種解像度におけるバルク流速(左図)、スカラー量(右図)の分布を示す(尚、グラフ中の凡例は左右両図に共通である事に注意されたい)。今回テストした全ての解像度においてSモデルはバルク流速を過大評価しているのが解る。この過大評価はテストフィルタパラメータを小さくすることで幾分改善されるが、パラメータ(A)においても過大評価の改善は十分とはいえない。一方IモデルはこのSモデルと比較して良好な結果を示している。即ちIモデルは、グリッドフィルタ操作に対するパラメータを小さくすることで、全ての解像度に対してバルク流速をより小さく見積もるのがわかる。Iモデルの特筆すべき点はテストフィルタ操作に対

Fig. 2 Bulk velocity(left) and scalar(right) profiles predicted by Smagorinsky's and proposed isotropic models and their dependence on filtering parameter and grid resolution(Type I, Pr=0.7)

する依存性が小さい事であり、図中、(Ab)と(Cb)の結果、(Ac)と(Be)の結果はよく一致している。バルクスカラー量についてはバルク流速とほぼ同様の傾向が観察され、Sモデルに対するIモデルの有用性が示されている。ただし格子解像度を上げた時のDNS値への漸近挙動については、Sモデル、Iモデル共にスカラー場と速度場で若干の相違が観られる。

スカラーの統計量については流れ場に対するSGS応力モデルの影響とスカラー場の乱流拡散を担うSGSスカラー流束モデルの影響の両方を受ける。従ってスカラー量の統計量の改善に対して、SGSスカラー流束モデルがどの程度効いているのか明確でない。そこで次節において、SGS応力モデルとそのフィルタパラメータを固定し(即ち、流れ場は同じとし)、SGS流束モデルに対するフィルタパラメータを変化させ、提案したSGS流束モデルの有用性を検討する。

4.2 等方型SGS流束モデル(2) ここでは、SGS応力モデルとしては式(10)を採用し、モデルパラメータとしては図1、図2より解像度 32×48 において最も良好な平均流速を予測したフィルタパラメータ(Aa)(断らない限り)を用いて流れ場の解析を行う。SGSスカラー流束モデルについては式(19)を適用し、流束モデルに対してのみフィルタパラメータを(Aa)、(Ab)、(Ac)、

(Cb)と変化させることで提案した等方型流束モデルのフィルタ操作に対する依存性、並びに分子プラントル数の変化に対する予測精度を調べる。

図3にGSスカラー変動のr.m.s.値(上図)、ならびにGS主流方向スカラー流束(下図)を示す。SGSスカラー流束モデルを用いない解析においては(図中(+))、これらの乱流統計量はDNSと比較して大きく評価され、モデルを導入する事でこの傾向が改善される事が解る。この過大評価はSGSスカラー流束モデルに対するフィルタパラメータを(Aa)から(Ac)と順にグリッドフィルタパラメータを大きくする事でよりDNSに近い値を示す。SGS応力モデルには(Aa)を用いているが、より広いグリッドフィルタ幅を用いた方が統計量は改善されるようである。尚、(Ab)と(Cb)の結果はよく一致しており、提案したSGSスカラー流束モデルにおいてもテストフィルタ操作に対する依存性が小さい事が確認される。

図4にTypeIIの境界条件の場合に得られた、SGSプラントル数の値を示す。図中、DNSの値はKimら⁽¹¹⁾によるアプリオリテストにより求められた、ダイナミックスマゴリンスキーモデルによるものである(Cabotら⁽²⁾)。一般にSGSプラントル数については0.5程度の値が最適値として用いられ(Eidson⁽⁹⁾)、Rogersらの一様剪断乱流のDNSによるアプリオリテスト(Moinら⁽¹⁰⁾)からも同様の値が得られている。図4から解るように、Kimら

Fig. 3 R.M.S. of GS scalar(above) and GS scalar flux for streamwise direction(below) predicted by the proposed isotropic model and their dependence on filtering parameter in case SGS stress model is fixed(Type I, $Pr=0.1, 0.7, 2.0$, grid resolution: 32×48)

Fig. 4 SGS turbulent Prandtl number predicted by the proposed isotropic models at various molecular Prandtl number in case SGS stress model is fixed (Type II, $Pr=0.1, 0.7, 2.0$, grid resolution: 32×48)

Fig. 5 Bulk velocity and scalar profiles normalized by the DNS results predicted by the proposed isotropic model in case filtering parameter for SGS stress is fixed. (left: Aa, right: Ab for the SGS stress model, Type I, $Pr=0.7$)

のDNSの結果も壁面近傍を除いてテストしたプラントル数に関わらずおおよそ0.5程度の値を取っている。これに対して、本研究から得られたSGSプラントル数は、SGS 応力モデルに対するフィルタパラメータと同じ(Aa)を用いた場合、DNS 値と比較して過大評価傾向にあることが解る。また $Pr=0.7$ と 2.0 の間で比較的大きな分子プラントル数依存性 (SGS プラントル数の) が観察される。この問題はSGS 応力モデルにおけるフィルタパラメータ(Aa)に対して、大きなグリッドフィルタパラメータをSGS スカラー流束モデルに適用する (即ち(Ab),(Ac)) ことで解決する。

図5に様々な解像度に対して、SGS 応力モデルを固定し (図の左はフィルタパラメータ(Aa)、右は同(Ab))、SGS スカラー流束モデルに対するパラメータを変化させた時の、DNSの結果で規格化したバルク流量(U_b)、スカラー量(Θ_b)の値を示す。図中、 $\Theta_b(Aa_Ab)$ は、SGS 応力に対してフィルタ(Aa)を用い、SGS スカラー流束モデルにおいてフィルタ(Ab)を用いた事を意味する。各解像度において、SGS 応力と同じフィルタ幅を用いた場合 (図中 $U_b(Aa)$ に対して $\Theta_b(Aa_Aa)$ 等)、規格化されたバルクスカラー量がバルク流量と比較して大きく評価される傾向にあるが、グリッドフィルタに対してより広いフィルタ幅を用いる事で (図中 $U_b(Aa)$ に対して $\Theta_b(Aa_Ab)$ や $\Theta_b(Aa_Ac)$ 等)、バルク流量とスカラー量の間に整合性がとれる事が解る。

IモデルのSGS 応力とスカラー流束モデルでのフィルタパラメータの最適値が異なる原因の一つに、式(18)で示される時間スケールにSGS 応力モデルと同じ乱流速度場の時間スケールを与えたことが挙げられる。レイノルズ平均乱流モデルにおいてはこの時間スケールに対してスカラー場の時間スケールを考慮するモデルが提案されている。SGS モデルに対しても同様の改善方法も考えられるが、スカラー流束モデルにおける線

形性と簡便さを考慮して、本研究ではグリッドフィルタパラメータを変化させる事で、解決策とする (尚、厳密にはSGS プラントル数を場の関数として求めるダイナミックモデルを用いた場合、線形性は崩れる)。図4、5からSGS 応力モデルに(Aa)、(Ab)を用いた場合、スカラーモデルには(Ac)を用いる事を提案する。

4.3 非等方型 SGS 流束モデルの構築

本節では非等方型モデルの構築の為に、本研究で対象とする流れ場に対して、式(25)左辺のSGSスカラー流束と右辺に含まれるGS速度勾配項、GSスカラー勾配項との相関関係を調べる。ただし瞬時のDNS解析結果が提供されていない為、本研究では簡便な方法として、Iモデルを用いたフィルタパラメータ(Ab)、解像度 96×144 のLES解析結果を用いて評価を行う。従ってここでは通常のアプリオリテストにおいては真の値を用いるべき式(25)の左辺のスカラー流束はスケール相似則モデルを用いて評価する。即ち式(25)中の左右両辺全てのSGS 応力、並びにスカラー流束はスケール相似則モデルを用いて、次のように近似する。

$$\tau_{ij} \approx \left(u_i^g u_j^g \right)^g - u_i^{gg} u_j^{gg} \dots\dots\dots (30)$$

$$q_j \approx \left(\theta^g u_j^g \right)^g - \theta^{gg} u_j^{gg} \dots\dots\dots (31)$$

この方法は左辺のスカラー流束をスケール相似則モデルでモデル化している点と、解析結果そのものにIモデルの影響が入るため、厳密な意味でのアプリオリテストとは成りえないが、格子解像度が本研究で対象としているレイノルズ数、プラントル数に対してLESとしては十分高い事、スケール相似則モデルが実際のSGS 応力、流束との相関性が高い事から定性的な議論は可能であると考ええる。

今、相関を求めるに際し、次に示す変数を定義する。

$$F_j = \left(\theta^g u_j^g \right)^g - \theta^{gg} u_j^{gg} \dots\dots\dots (32)$$

$$G_j = -\tau_{jk} \frac{\partial \theta^g}{\partial x_k} / \sqrt{2 S_{lm}^{gT} S_{lm}^{gT}} \dots\dots\dots (33)$$

$$H_j = -\frac{1}{3} \tau_{kk} \frac{\partial \theta^g}{\partial x_j} / \sqrt{2 S_{lm}^{gT} S_{lm}^{gT}} \dots\dots\dots (34)$$

$$I_j = -q_k \frac{\partial u_j^g}{\partial x_k} / \sqrt{2 S_{lm}^{gT} S_{lm}^{gT}} \dots\dots\dots (35)$$

F はスケール相似則モデルにより近似されたSGS スカ

Fig. 6 Correlation coefficient between SGS scalar flux and various models (Type I, $Pr=0.7$, grid resolution: 96×144)

Fig. 7 Correlation coefficient between SGS scalar flux and various models (Type I, Pr=0.7, grid resolution: 96x144)

ラー流束、 $\mathbf{G}$ は式(25)右辺第一項のスカラー勾配による生成項に時間スケールを乗じた物、 $\mathbf{H}$ は $\mathbf{G}$ を等方化した物(等方型スカラー流束モデル)、 $\mathbf{I}$ は式(25)右辺第二項の速度勾配による生成項に時間スケールを乗じた物である。この $\mathbf{F}$ と $\mathbf{G} \sim \mathbf{I}$ の組み合わせに対して相関係数を求める。この時相関係数は例えば F_1 と G_1 について

$$C.C.(F_1, G_1) = \frac{|F_1 G_1|}{[F_1 F_1]^{1/2} [G_1 G_1]^{1/2}} \dots \dots \dots (36)$$

と定義する。尚 $[\cdot]$ は主流方向・スパン方向平均を表す。

図6からわかる通り、等方型スカラー流束モデル($\mathbf{H}$)は特に壁方向成分(v)についてスカラー流束 $\mathbf{F}$ との相関性が良い事が解る(左図)。これに対して、等方化を施さない $\mathbf{G}$ との相関は特に壁方向成分に対してはむしろ悪化する(中図)。速度勾配項($\mathbf{I}$)との相関については特に主流方向(x)成分について良い相関を示している(右図)。この結果、等方型モデル($\mathbf{H}$)に速度勾配項($\mathbf{I}$)を加えたモデルは、等方型モデルと比較すると、壁垂直方向成分の相関を維持したまま主流方向成分の相関を向上させることが図7から解る。

以上の結果より非等方モデルとして本研究では次のモデルを提案する。

$$q_j \approx -C_\theta \left\{ \frac{1}{3} \tau_{kk} \frac{\partial \theta^s}{\partial x_j} + q_k \frac{\partial u_j^s}{\partial x_k} \right\} / \sqrt{2 S_{lm}^s S_{lm}^s} \dots \dots \dots (37)$$

このモデルを“Aiモデル”とする。このモデルにより得られた統計量を等方型モデル(Iモデル)と比較したのが図8である。尚、ここでも4・2節と同様にSGS応力モデルとしては式(10)を採用し、フィルタパラメータとしては(Aa)を採用する。式(19)の等方型モデルでは改善

Fig. 8 R.M.S of GS scalar(left) and GS scalar flux for streamwise direction(right) predicted by the proposed isotropic and anisotropic models in case SGS stress model is fixed (Type I, Pr=0.7, grid resolution: 32x48)

が困難であった、GSスカラー変動のr.m.s.値、並びに主流方向スカラー流束の過大評価が非等方モデルを用いる事で改善されているのが解る。また、既報において提案したSGS応力モデルの特徴の一つであるテストフィルタパラメータに対して解の依存性が小さいという特徴は、提案した非等方SGSスカラー流束モデルにおいても良好に継承されているのが解る(図中、(Ab)と(Cb)の結果がほぼ一致している)。

結言

既報において提案したSGS応力モデルの定式化を踏襲してSGSスカラー流束のモデル化を行った。得られた等方型モデルを提案したSGS応力モデルと組み合わせてスカラー輸送を伴う平行平板間流れに適用した結果、一般に用いられるスマゴリンスキーモデルと比較して、改善された結果を示した。提案した等方型スカラー流束モデルについては、SGS応力モデルに用いたグリッドフィルタ幅に対して、やや大きめのグリッドフィルタ幅を適用することで、バルク流量とバルクスカラー量との間により整合性のとれた結果が得られる事がわかった。またより解像度の高いLES解析結果を用いたアプリオリテストより、非等方型のスカラー流束モデルの提案を行った。この非等方型モデルは等方型モデルでは改善が困難であったスカラー変動や主流方向スカラー流束の過大評価を改善した。尚、両モデル共、様々な格子解像度において評価した結果、差分テストフィルタ操作に対する依存性が小さい事が確認され、差分解析における有用性が示された。

本研究で提案したモデルの問題点として分母に $\sqrt{2 S_{lm}^s S_{lm}^s}$ が含まれる為に、歪み率テンソルがゼロに近い流れ場に対してSGS渦粘性・拡散係数の予測精度が悪くなる可能性がある。従ってこのような場に適用する場合は、何らかのモデルの補正が必要となる。パディ近似等の適用は一つの解決策となると考えられる⁽⁴⁾。

謝辞

本研究で用いた離散スキームの適用に際して、森西洋平博士（名古屋工業大学）に解析コードを御提供頂いた。また本研究の一部は文部省科学研究費補助金（No. 11305017 及び 12750132）に依った。合わせてここに感謝の意を表す。

参考文献

- (1) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., Phys. Fluids A3 (1991), 1760-1765
- (2) Cabot, W. and Moin, P., Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows, ed. Galperin and Orszag, Cambridge Univ. Press (1993), 141-158
- (3) Bardina, J., Ph. D. Dissertation (1983), Stanford Univ.

- (4) Tsubokura, M., Kobayashi, T. and Taniguchi, N., Proc. of the 1st AFOSR int. conf. on DNS and LES (1997), pp.325-332
- (5) 森西, 市川, 奥村, 中林, 機論 B 編, 66-647(2000), 1750-1757
- (6) Yoshizawa, A., Tsubokura, M., Kobayashi, T. and Taniguchi, N., Phys. Fluids 8 (1996), 2254-2256
- (7) 坪倉, 小林, 谷口, 機論 B 編, 66-648(2000), 1975-1983
- (8) Tsubokura, M., Phys. of Fluids 13 (2001), 500-504
- (9) Eidson, T. M., J. Fluid Mech. 158(1985), 245-268
- (10) Moin, P., Squires, K., Cabot, W. and Lee, S., Phys. Fluids A3 (1991), 2746-2757
- (11) Lilly, D. K., Phys. Fluids A4 (1992), 633-635
- (12) Horiuti, J. Fluid Mech. (1992), 405-433
- (13) Kim, J. and Moin, P., Turbulent Shear Flows 6 (1989), Springer-Verlag, 85-96
- (14) 森西, 機論 B 編, 62-604(1996), 4090-4112
- (15) Leonard, A., Adv. in Geophysics vol. 18A (1974), 237-248
- (16) 森西, private communication