四面体有限要素を用いた並列 LES 解析*

(第2報, 高レイリ数熱伝達問題への適用)

海保真行^{*1}, 森 英明^{*1}, 池川昌弘^{*2}, 加藤千幸^{*3}Parallel Large Eddy Simulation Technique
using Tetrahedral Finite Elements

(2nd Report, Application to Heat Transfer Problems at High Rayleigh Number)

Masayuki KAIHO^{*4}, Hideaki MORI, Masahiro Ikegawa, and Chisachi KATO^{**} Hitachi, Ltd., Mechanical Engineering Research Laboratory,
502 Kandatsu, Tsuchiura-shi, Ibaraki, 300-0013 Japan

A parallel LES technique for viscous incompressible flow with heat transfer based on the finite-element method using tetrahedral elements has been developed. It uses an algorithm based on the SIMPLER method to solve the Navier-Stokes equations, in which a BTD term is introduced to ensure computational stability. In this technique, the Crank-Nicholson method is used as a time integration scheme to improve the accuracy to solve both the Navier-Stokes equations and the energy equation. Moreover, the Smagorinsky model is applied to approximate the Reynolds stress term and the zero-equation model is applied to solve the energy equation. The code based on this technique is parallelized by using mesh partitioning by finite elements in order to carry out the element-based calculations and by using row-based domain decomposition of the global matrix to solve the linear equations. The developed LES technique was verified by simulating natural convection problems in a cubic cavity at $Ra=10^3$ to 10^{10} . Numerical results at $Ra=10^3$ to 10^8 agree well with those computed by other researchers and successfully demonstrated the stable prediction of the unsteadiness and the heat transfer at $Ra=10^9$ to 10^{10} . It was also applied to a realistic heat transfer problem in a rotating cavity. Computed heat transfer coefficients at $Ra=1.09 \times 10^9$ and 2.18×10^9 were found to be within 15% of those measured experimentally. This acceptable error means that the new LES technique can be applied to solve heat transfer problems in a rotating flow-field.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, LES, Finite Element Method, Tetrahedral Element, Viscous Flow, Incompressible Flow, Parallel, Heat Transfer

1. 緒 言

スーパーコンピュータや並列コンピュータの発達により, 数値流体解析技術は格段の進歩を遂げてきた。しかし, ターボ機械に代表される回転機械や電子・情報機器の冷却における, 非定常な乱流を伴う乱流熱伝達問題など, 現在の解析技術をもってしても予測精度が不十分な現象は多く残されている。例えば, 回転電機のような発熱を伴う回転機械の冷却流路内の熱伝達率予測を行うには, 高速回転場の遠心加速度により浮力項が増大し, 高レイリ数に対する安定な解析が必須となる。

また, 実機問題の解析が難しい原因の一つは高品質なメッシュ生成の困難さにある。実機の非常に複雑な流路を有するものに対して, 特に六面体要素

を用いて歪みの少ない高品質のメッシュを生成するのは困難である。これに対して, 四面体要素の場合, テローニ法^①などによりメッシュの自動生成が可能であり, アダプティブメッシュ^②の手法などによるメッシュの粗密制御が比較的容易である。さらに最近では, 壁近傍の境界層を正確に捕らえるため, 壁近傍に層状に生成した規則的な四面体メッシュと, それ以外の領域の不規則な四面体メッシュとを組み合わせたメッシュ生成技術^{③④}が提案されている。実機レベルの解析に対するニーズが高まるにつれて, このような四面体要素の優位性は顕著になると考えられる。

非構造格子を用いて非圧縮性粘性流の有限要素解析を行った例としては, 川原ら^⑤, 水野ら^⑥が挙げられる。ともに, 三角形要素について, 流速・圧力とも同次数, すなわち流速・圧力ともに三角形一次要素を用いた解析を行っている。特に水野らは, 時間進行法として Donea らが提案した FS(Fractional Step)法^⑦を採用するとともに, 過度な数値粘性になりにくい上流化

* 原稿受付 2001年6月5日。

^{*1} 正員, (株)日立製作所機械研究所(☎300-0013 土浦市神立町502)。^{*2} 正員, 北海道大学大学院工学研究科(☎060-8628 札幌市北区北13西8)。^{*3} 正員, 東京大学生産技術研究所(☎153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)。

E-mail: kaiho@merl.hitachi.co.jp

手法として Gresho ら⁶⁾が提案した BTD (Balancing Tensor Diffusivity)項を導入し、二次元キャビティ内流れの安定な解析を実現している。

上記のように、非構造格子を用いた有限要素解析の要素技術については、様々な研究がなされているが、四面体要素を用いた実用的な3次元問題について精度を評価した例は少ない。また、乱流場を高精度に解析するには LES (Large Eddy Simulation)⁹⁾の適用が有効であると考えられるが、複雑形状流路を対象とした四面体有限要素を用いた LES 解析については筆者らが知る限り報告例がない。

筆者らは、非構造格子を用いた乱流解析の実用化を目的として、SIMPLER(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised)法¹⁰⁾をベースにした新しい手法を用いた四面体要素による並列 LES 解析技術を開発し、前報¹⁾にて、タービン発電機内の通風冷却流路の圧力損失予測に適用しその有効性を示した。本論文では、上記解析コードに温度場解析機能を組み込み、様々な解析結果^{10)~12)}が報告されている立方キャビティ内の自然対流問題を取上げ、報告例がない $Ra=10^6$ までの解析を行い他の解析結果と比較した結果について説明する。また、回転機械の閉塞空間部を模擬した回転実験による熱伝達率の測定値と解析値を比較した結果について説明し、本解析コードの高レイリ数流れ場の解析に対する有効性を示す。

2 支配方程式及びその解法

2.1 解析アルゴリズム 本研究で対象としている温度場を考慮した非圧縮性粘性流の支配方程式はナビエ・ストークスの式、連続の式、エネルギー式で与えられ、テンソル記号を用い総和規約に従うと、次のようになる。

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} = -P_{,i} / \rho + \nu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} + g_i \beta (T - T_{ref}) \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{T} + (U_j T)_{,j} = \alpha T_{,jj} \quad (3)$$

ここに U_i は x_i 軸方向の流速成分、 P は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数を、また上付の $\cdot$ は時間微分を表す。また、 g_i は x_i 軸方向の重力加速度、 β は体膨張率、 T は温度、 T_{ref} は代表温度、 α は温度拡散係数を表す。流速に関する境界条件は、境界 $\Gamma(\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)$ 上で次式で与えられる。

$$U_i = \hat{U}_i \quad ; \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (4)$$

$$P = 0, \quad n_j U_{i,j} = 0 \quad ; \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (5)$$

ここに、上付きの $\hat{\cdot}$ は、その値が既知であることを表わしており、 n_i は境界 Γ 上に立てた単位法線ベクトル n の x_i 軸に関する方向余弦である。式(4)は入口及び壁面における速度固定境界を表しており、式(5)は出口境界を表している。温度に関する境界条件は、境界 $\Gamma(\Gamma = \Gamma'_1 + \Gamma'_2)$ 上で次式で与えられる。温度固定境界と断熱壁境界を扱えるようになっている。

$$T = \hat{T} \quad ; \quad \text{on } \Gamma'_1 \quad (6)$$

$$n_j T_{,j} = 0 \quad ; \quad \text{on } \Gamma'_2 \quad (7)$$

支配方程式(1)、(2)に対し、有限要素法による定式化を行うことを考える。解析アルゴリズムとして、前報¹⁾にて提案した、ロバストな解析手法である SIMPLER 法に準拠したアルゴリズムを用いる。本解法では、式(1)の対流項に起因する数値的不安定性を除去するために、BTD 法を導入するとともに、解析精度の向上を図るために、Crank-Nicholson 法を用いて時間積分を行っている。このようにすると、 Δt を時間刻みとし、時刻 $t = n \Delta t$ における流速 U_i^n と圧力 P^n が既知であるとき、次の時刻における未知量 U_i^{n+1} 、 P^{n+1} は、次のような3段階の計算手順を用いて求めることができる。

(第1ステップ)

$$(\tilde{U}_i - U_i^n) / \Delta t = \frac{1}{2} (F_i^n + \tilde{F}_i) \quad (8)$$

(第2ステップ)

$$\phi_{,ii} = -\tilde{U}_{i,i} \quad (9)$$

$$P^{n+1} = -\phi / \rho \Delta t \quad (10)$$

$$U_i^* = \tilde{U}_i + \phi_{,i} \quad (11)$$

(第3ステップ)

$$\psi_{,ii} = -U_{i,i}^* \quad (12)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^* + \psi_{,i} \quad (13)$$

ただし、

$$F_i^n = -U_j^n U_{i,j}^n + U_k^n (U_j^n U_{i,j}^n)_{,k} \Delta t / 2 - \nu U_{i,jj}^n \quad (14)$$

ただし、 $\tilde{U}_i$ 、 U_i^* はそれぞれ第1、第2修正速度ベクトル、 ϕ 、 ψ はそれぞれ第1、第2修正ポテンシャル関数である。式(14)の右辺第2項が BTD 項を表わしている。

エネルギー式に関しても、式(8)、(14)と同様に次の通り Crank-Nicholson 法を用いて時間積分を行う。

$$(T^{n+1} - T^n) / \Delta t = \frac{1}{2}(G^n + G^{n+1}) \quad (15)$$

ただし、

$$G^n = -U_j^n T_{j,j}^n - \alpha T_{j,j}^n \quad (16)$$

式(8)~(13)及び(15)の有限要素法による定式化については、通常のガラーキン法¹³⁾を適用し、流速・圧力・温度・修正ポテンシャルの全てに対して一次要素を用いて補間する。式(8),(9),(12),(15)は後述する並列行列解法により陰的に解いた。式(11),(13)は、質量行列を対角項に集中化した質量集中行列を用いて陽的に解いた。

2.2 LES 解析 乱流現象を高精度に再現し熱伝達を正確に予測するには、何らかの乱流モデルを使用した解析が不可欠である。本研究では、スマゴリンスキー・モデルを用いた LES 解析¹⁴⁾を行っている。以下にその定式化について記す。なお、以下の式においては、浮力項を省略してある。

式(1)・(2)にグリッドスケールのフィルタ平均操作を施すと次の2式が得られる。

$$\bar{U}_i + \bar{U}_j \bar{U}_{i,j} = -\bar{P}_i / \rho + \{\nu(\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) - \bar{U}_i' \bar{U}_j'\}_{,j} \quad (17)$$

$$\bar{U}_{i,i} = 0 \quad (18)$$

ここに、 $\bar{U}_i$ 、 $\bar{P}$ はそれぞれ、グリッドスケール流速の x_i 軸方向成分、グリッドスケールの圧力を表す。 $-\bar{U}_i' \bar{U}_j'$ はサブグリッドスケールの乱流応力(レイノルズ応力)であり、本解析ではスマゴリンスキー・モデルにより定式化する。

$$-\bar{U}_i' \bar{U}_j' = \nu_{SGS}(\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{U}_k' \bar{U}_k' \quad (19)$$

$$\nu_{SGS} = (C\Delta)^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{0.5} ; \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) \quad (20)$$

ただし、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (21)$$

ここに、 ν_{SGS} は SGS(Subgrid Scale)乱流粘性係数で、 Δ は要素の代表寸法であり、本解析では Δ を各要素の体積の3乗根として計算した。また、 C は乱流モデル定数であり 0.15 とした。式(19)を式(17)に代入すると、次式が得られる。

$$\bar{U}_i + \bar{U}_j \bar{U}_{i,j} = -\bar{P}_i / \rho + (\nu + \nu_{SGS})(\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i})_{,j} \quad (22)$$

実際には、2.1 節に述べた手法を用いて式(1)・(2)の代わりに式(22)・(18)を解く。 ν_{SGS} は壁面からの距離に比例して減衰させる必要がある。減衰の方法については文献¹⁵⁾を参照されたい。境界層内に十分な解像度のメッシュを使用できる場合は ν_{SGS} に対する減衰が効くが、実用的には必ずしもそのようなメッシュを用いた解析を行うことはできないため、減衰が効かず過度な渦粘性力加わり、壁面近傍の流速を過小評価してしまう恐れがある。特に、壁面における熱伝達率を精度良く求めるには、壁面近傍の流速の解析精度が大きな影響を及ぼす。この解決策としてダイナミック・スマゴリンスキー・モデルなどの使用が考えられるが、複雑流路など実用的な問題に対する計算の安定性など課題は多い。そこで本解析では、実用的な解決策として、壁面上に節点を有する全ての要素において ν_{SGS} を強制的に 0 とし、壁面上で過度な渦粘性力が加わらないような解析方法を試みた。

なお、温度場に関する乱流モデルも様々提案されているが、現状の解析プログラムにおいては次式で表される温度場 0 方程式モデルを用いた。

$$\dot{T} + (U_j T)_{,j} = (\alpha + \alpha_{SGS}) T_{,jj} \quad (23)$$

$$\alpha_{SGS} = \nu_{SGS} / \text{Pr}_{SGS} \quad (24)$$

ここで、 α_{SGS} は SGS 温度拡散係数、 Pr_{SGS} は SGS 乱流プラントル数を表す。本解析では Pr_{SGS} として 0.4 を用いている。

3. メッシュ生成及び並列化手法

3.1 メッシュ生成手法 LES により乱流を高精度に再現するには、壁近傍にメッシュを集中する必要があるため、本研究では、第1章で述べたような、壁近傍に層状に生成した規則的な四面体メッシュと、それ以外の領域の不規則な四面体メッシュとを組み合わせたメッシュ生成を行った。

図1にそのような不規則-層状接続メッシュ生成の概観を示す。簡単のため、図は2次元の三角形メッシュとした。図に示すように、壁面から層状に規則的なメッシュが生成されており、その後、デローニ法で生成された不規則なメッシュが接続されている。層状メッシュ部分のメッシュ生成パラメータとしては、第1メッシュ幅 h 、層数 n 、層状部拡大率 a の3つがある。壁面の法線方向の要素厚さは、壁面上に位置する第1メッシュにおいて h 、2層目

Fig.1 Conceptual view of combination mesh between layered mesh and irregular mesh.

で ha , 3 層目で ha^2 と, 徐々に拡大していく. 不規則メッシュ部分のメッシュ生成パラメータについても, 最小要素寸法 $\Delta_{\min}$, 最大要素寸法 $\Delta_{\max}$, 不規則部拡大率 b の 3 つがある. 最小要素寸法 $\Delta_{\min}$ は, 壁面の接線方向の壁面上の要素サイズを表す. 不規則メッシュの領域においては, 要素サイズは, 最小要素寸法から不規則部拡大率 b で壁面から離れるにしたがって拡大していく. 拡大は, 要素サイズが最大要素寸法 $\Delta_{\max}$ になるまで続き, その後は, 平均的な要素サイズが $\Delta_{\max}$ の均一なメッシュとなる. なお, 本研究では, ラプラス・スモージングと呼ばれる節点の座標を平均化する手法を適用してメッシュの品質改善を行っている.

3.2 並列化手法 上で述べたような非構造格子を用いた解析の並列化には, 有限要素メッシュを使用するプロセッサ数と等しい数の領域に分割し, 各領域を一つのプロセッサに計算させる領域分割法が用いられる. 代表的な領域分割のアルゴリズムとしては, グラフ理論を利用した RSB (Recursive Spectral Bisection) 法や RGB (Recursive Graph Bisection) 法などがある. 本研究では大規模メッシュを高速で分割できる点を優先して RGB 法を選んだ.

領域分割法を用いて, 実際にどのように並列計算を実現するかを次に説明する. 陽的に解く部分においては, ある節点を有する要素内で計算した流速の修正量 dU_{ie} のその節点への寄与分の総和をその節点での修正量 dU_i とし, dU_i を古い値 U_i^n に加えていくことにより流速を求めていく. 分割した領域間の境界を接続境界と呼ぶこととすると, 接続境界上に節点が存在する場合, A, B の各領域毎に計算した $dU_{ia} \cdot dU_{ib}$ を互いに通信して和をとってから古い流速値 U_i^n に加えることにより, 新しい値 U_i^{n+1} が

Fig.2 Analysis model and boundary conditions.

計算される. 実際の計算においては, 通信の高速化を目的として, 接続境界上の複数の節点についてデータを一つの配列にまとめてから通信を行なう一括通信方式を開発し, 通信を実行している. 使用プロセッサ数にもよるが, 本方式により, ほぼ最大限のプロセッサ間通信性能を引き出すことができる.

式(8),(9),(12),(15)においては, 全体系の連立 1 次方程式を解く必要がある. そのため, 並列計算性能の良い行列解法を選ぶことが重要となる. 本研究では, 日立製超並列計算機 SR2201 に備えられた並列行列計算ライブラリのうち, 分散メモリ配置型インターフェイスを用いた PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) 法を採用した. 一般に, 並列行列解法のソフトウェアは, 有限要素メッシュ自身を領域分割して解くデータ構造に対応しておらず, 全体行列を行分割するデータ構造となっている. 本研究では, そのようなデータ構造の違いを意識せずにすむように, 領域分割と行分割の間のデータ変換を行う汎用的なインターフェースを作成し, コードに組込んで並列行列解法を使用している.

4. 計算結果と検討

4.1 立方キャビティ内自然対流 本節では, ベンチマーク問題として一般に用いられる, 3 次元立方キャビティ内の自然対流問題を対象として, 本解析プログラムの温度場解析に対する精度検証を行った結果について記す.

図 2 に解析モデルと境界条件及び初期条件を示す. 計算は無次元化して行った. 解析領域については, 図に示すように, 1 辺の長さ L が 1 の立方体とし, 温度に関する境界条件は, 高温壁面で $T_h = 1.5$, 低温壁面で $T_c = 0.5$, その他の壁面は断熱壁とした. 流速に関しては全ての壁面で $U_i = 0$ とし, 初期温度 $T = 1.0$, 初期流速 $U_i = 0$ とした. 作動流体

(a) Global view (b) Sectional view

Fig.3 Global and sectional view of the mesh.

Table 1 Mesh generation parameters.

h	n	a	$\Delta_{\min}$	$\Delta_{\max}$	b
0.001	5	2.0	0.04	0.1	1.3

Table 2 Time increment at each Rayleigh Number.

Ra	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
Δt	10	5	2	1	0.5	0.2	0.1	0.05

は空気、プラントル数は $Pr=0.71$ である。図 3 にメッシュ図を、表 1 にメッシュ生成パラメータを示す。図 3 (a) はメッシュ全体の概観図を、(b) は中央断面図を表している。節点数は 36,746 で要素数は 206,943 である。表 1 に示すように、層状メッシュ部の第 1 メッシュ幅は 0.001、層数は 5 として、高レイリ数の流れに対応できるようにした。

図 3 に示したメッシュを用いて、 $Ra=PrGr$ で定義されるレイリ数が $10^3 \sim 10^{10}$ の解析を行った。ただし、 Gr はグラフホフ数を表し $Gr=g\beta(T_h-T_c)L^3/\nu^2$ で定義した。各ケースの時間刻みの無次元値 Δt の値を表 2 に示す。自然対流解析の場合、強制対流のように代表流速を予め定義することができないため、ここで用いた Δt は、粗メッシュによる解析から事前に決定した。本問題の 2 次元解析の例としては De Vahl Davis⁽¹⁰⁾、Le Quere⁽¹¹⁾ などが、3 次元解析としては山崎ら⁽¹²⁾ などが挙げられるが、計算された最大のレイリ数としては 10^8 程度までで、それ以上のレイリ数に対する解析は報告されていない。これは、De Vahl Davis が報告しているようにレイリ数が 2×10^8 から流れの非定常性が生じ、解析が困難になるためと考えられる。

図 4、5 に $Ra=10^4$ 、 10^6 の中央断面内の流速ベクトルと温度分布の解析結果を示す。図内の左側が本解法による結果を、右側が De Vahl Davis の解析結果を表す。温度、流速のいずれの場合も分布は良く一致している。図 6 に $Ra=10^8$ 、 10^{10} の中央断面内の流速ベクトルと温度分布の解析結果を示す。図からわかるように、計算はレイリ数が 10^{10} まで安定

Fig.4 Velocity vectors computed by the present scheme(left) and streamline computed by De Vahl Davis⁽¹⁰⁾(right).

Fig.5 Temperature profiles computed by the present scheme(left) and De Vahl Davis⁽¹⁰⁾(right).

に行うことができた。

次に、定量的な精度検証のため、加熱壁面の平均ヌセルト数 Nu_{mean} の計算結果を、従来の報告例と比較した。本計算における平均ヌセルト数の算出位置は、図 2 に示したように加熱壁面の中央線上であり、本計算のような無次元計算の場合、加熱壁面中央線上の温度勾配の平均値として求められる。表 3 及び図 7 に平均ヌセルト数を比較した結果を示す。

Fig.6 Velocity vectors(left) and temperature profile(right) computed by the present scheme.

Table 3 Comparison of mean Nusselt Number at the hot wall between the present calculations and the conventional results. ($Ra=10^3$ to 10^6 : De Vahl Davis⁽¹⁰⁾, $Ra=10^7$ to 10^8 : Le Quere⁽¹¹⁾)

Ra	Present cal.	De Vahl Davis ⁽¹⁰⁾ or Le Quere ⁽¹¹⁾	Error
10^3	1.077	1.116	3.5%
10^4	2.223	2.242	0.8%
10^5	4.424	4.564	3.1%
10^6	8.754	9.270	5.6%
10^7	16.130	16.523	2.4%
10^8	28.847	30.225	4.6%
10^9	50.689	—	—
10^{10}	84.406	—	—

従来結果の内, $Ra=10^3 \sim 10^6$ は De Vahl Davis⁽¹⁰⁾, $Ra=10^7 \sim 10^8$ は Le Quere⁽¹¹⁾ の計算結果である. 本計算の平均ヌセルト数の値(図中◇)は, $Ra=10^3 \sim 10^8$ の範囲において誤差 6% 以内で一致した. 他の報告例でも研究者によりこの値にばらつきがあり, 本計算結果から, 本解析プログラムの予測精度が十分実用に供するものであることがいえる.

図 8 にレイリ数が 10^8 , 10^{10} の場合の, x 方向速度の最大値 U_{max} の時間履歴を示す. レイリ数が 10^8 の場合, 計算当初は若干の乱れが見られるが, 最終的には定常解に落ち着いている. レイリ数が 10^{10} になると, U_{max} は乱流的な挙動を示す. この現象は, De Vahl Davis がレイリ数 2×10^8 以上で非定常な挙動を示すと指摘したことに一致する. 図 7 に壁面の

Fig.7 Comparison of mean Nusselt Number at the hot wall between the present calculations and the conventional results. ($Ra=10^3$ to 10^6 : De Vahl Davis⁽¹⁰⁾, $Ra=10^7$ to 10^8 : Le Quere⁽¹¹⁾)

(a) History of U_{max} at $Ra=10^8$

(b) History of U_{max} at $Ra=10^{10}$

Fig.8 Time history of the maximum horizontal velocities.

v_{SGS} を 0 にしない場合の計算結果(図中□)を載せてある. 計算の安定性が増し $Ra=10^{12}$ まで計算できたが, 乱流的挙動が始まる $Ra=10^8$ からヌセルト数の値が落ち始めた. これは, 第 2 章で述べた理由で壁面近傍の流速を過小評価しているためと考えられる. 本結果から, 壁面の v_{SGS} を 0 にする手法が, 実用的な意味で有効であることがわかる.

Fig.9 Schematic of experimental facility.

Fig.10 Schematic of test piece.

4.2 回転する閉塞空間内の熱伝達 本節では、実機に近い例題として、回転機械の閉塞空間部を模擬した回転実験¹⁰⁾による熱伝達率の測定値と解析値を比較した結果について説明する。

図9に実験装置の概観を、図10に閉塞空間を模擬したテストピースの構造図を示す。テストピースは、図10のように銅板をFRPで囲んで断熱したもので、銅板とFRPの間にフィルムヒーターが挟まれている。テストピースはロータの端面に取り付けられ、さらに図10の手前側をアクリル板で覆われる。その状態でヒーターを加熱し、モータによりテストピースを回転する。したがって、テストピース内の閉塞空間は、内径側端面が開放されたサーモサイフンのような形となる。実験装置の詳細については文献(16)を参照されたい。

実験は、次式で表されるレイリ数 Ra を $2 \times 10^6 \sim 2 \times 10^9$ に変化させて行った。

$$Ra = \frac{H^3 (R_1 + R_2) \Omega^2 \beta (T_w - T_a) Pr}{2\nu^2} \quad (25)$$

ただし、 H は閉塞空間内伝熱面の内外径差、 R_1 、 R_2 はそれぞれ伝熱面の内径、外径、 Ω は回転の角速度、 T_w 、 T_a はそれぞれ伝熱面の温度、開放空間部空気温度、 Pr は空気のプラントル数を表す。

Fig.11 Analysis mesh and boundary conditions for a rotating cavity problem.

(a) Pressure side

(b) Suction side

Fig.12 Contour of Nusselt Number on the heated walls.

Fig.13 Close up of velocity vectors in a rotating cavity.

測定結果は、熱伝達の大きさを表す無次元数であるヌセルト数 Nu で整理した。 Nu は次式で求められる。

$$Nu = \frac{QH}{\lambda A (T_w - T_a)} \quad (26)$$

ただし、 Q はヒーターの加熱量、 λ は空気の熱伝導率、 A は加熱面の面積を表す。実験結果を整理した結果、正圧面、負圧面それぞれにおいて、 Ra と Nu との関係が以下の式で表されることがわかった。

$$\text{(正圧面)} \quad Nu = 0.334 Ra^{1/3} \quad (27)$$

$$\text{(負圧面)} \quad Nu = 0.141 Ra^{1/3} \quad (28)$$

Fig. 14 Comparison of Nusselt number.

上記実験結果と比較するため、図 11 に示した回転座標モデルにより、実験結果のうち最大のレイリ数の場合を含めて 2 ケース ($Ra=1.09 \times 10^9$, 2.18×10^9) の解析を実施した。静止座標系でみて開放空間部の流体は静止しているため、開放空間部の回転座標系上の速度境界条件としては $U=r\Omega$ とした。

図 12, 13 にそれぞれ、加熱壁上の熱伝達率分布、断面内流速ベクトル図を示す。図からわかるように閉塞空間内下部に循環流が形成され加熱壁上に流速が大きい領域が存在し、その領域において強制対流状態となり熱伝達率が非常に大きくなっている。

図 14 に、面内の熱伝達率の平均値を式(27),(28)に示した実験式と比較したものを示す。図 14 の●(正圧面)、◆(負圧面)が今回の解析結果である。本解析では 2 種類のレイリ数に対して同じメッシュを用いた。そのため、特に正圧面の強制対流領域における壁面近傍の流速が相対的に小さめに評価され、正圧面のヌセルト数の勾配が若干小さくなっているが、正圧面、負圧面の誤差はそれぞれ、 $Ra=1.09 \times 10^9$ で 3.8%, 15.1%, $Ra=2.18 \times 10^9$ で -8.7%, 13.5% であり、ほぼ $\pm 15\%$ の範囲にある。

以上の検討結果から、本解析手法が、高レイリ数の熱伝達問題に対して有効であることがわかった。特に、レイリ数が 10^9 以上の実機レベルの高速回転流れ場に対応する解析を安定に行えることから、回転電機等の高レイリ数の冷却問題にも有効に活用できる見通しが得られた。

5. 結 言

複雑形状に対する乱流解析精度の向上を目的として開発した四面体要素を用いた LES 解析技術を冷却分野へ適用範囲を拡大することを目的として、解析コードに温度場解析機能を組み込んだ。壁面近傍の層状メッシュとそれ以外の領域の不規則なメッシュとを接続したメッシュを使用し、プラントル数が 0.71 (空気)

でレイリ数が $10^3 \sim 10^{10}$ の場合の 3 次元立方キャビティ内の自然対流解析、及び、回転機械の閉塞空間部を模擬した回転実験との比較解析 ($Ra=1.09 \times 10^9$, 2.18×10^9) を実施した。計算精度の検討及び特に高レイリ数における計算の安定性の検討を行った結果、以下の点が明らかとなった。

(1) 立方キャビティ内自然対流問題において、本解析手法により計算された加熱壁面の平均ヌセルト数は、レイリ数が $10^3 \sim 10^8$ で 6% 以下の誤差で De Vahl Davis らの従来報告例の値と一致する。また、従来の報告例がないレイリ数が 10^9 程度以上 10^{10} までの乱流域においても、流れ場の非定常性を再現でき、平均ヌセルト数の時間平均値を安定に計算することができる。

(2) 閉塞空間部の回転実験との比較において、本解析手法により計算された加熱壁面の平均ヌセルト数は、誤差 15% 以内で実験値と一致する。本解析コードは回転電機の通風冷却などの高レイリ数の実機問題に有効に活用できる。

文 献

- (1) Johnson, A.A. and Tezduyar, T.E., *Comput. Mech.* 95, 1, (1995), Hawaii, USA.
- (2) Chan, C. T. and Anastasiou, K., *Comm. in Numer. Meth. in Engrg.*, 13, (1997), 33-46.
- (3) Jiang, C.B., Kawahara, M., Hatanaka, K. and Kashiwama, K., *Comput. Fluid Dyn. J.*, 1-4, (1993), 443 - 462.
- (4) 竹内・水野, 機論, 61-588, B(1995), 118 - 122.
- (5) Donea, J., Giuliani, S. and Laval, H., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 30, (1982), 53 - 73.
- (6) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Upson, C.D., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 4, (1984), 557-598.
- (7) Shumann, U., *J. Comput. Phys.*, 18, (1975), 376-404.
- (8) Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, (1980).
- (9) 海保・横張・池川・加藤, 機論, 66-645, B(2000), 8 - 15.
- (10) De Vahl Davis, G., *Int. J. Num. Method Fluids*, 3, (1983), 249-264.
- (11) Le Quere, P., *Computers Fluids*, 20-1, (1991), 29-41.
- (12) 山崎・他 3 名, 第 12 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1998), 475.
- (13) Donea, J. et al., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 48, (1985), 25-43.
- (14) Smagorinsky, J., *Mon. Weath. Rev.*, 91-3, (1963), 99-164.
- (15) 加藤, 低マッハ数の乱流中に置かれた物体から放射される流体音の数値解析に関する研究, 東京大学博士論文, (1995-9).
- (16) 森・塩原・服部, 機論, 66-650, B(2000), 138-142.