2 球間クエット流れの遷移過程で生じる速度変動消滅現象*

中 林 功 一^{*1}, 余 偉 明^{*2}
足 立 尚 史^{*3}, 土 田 陽 一^{*4}Disappearance Phenomena of Velocity Fluctuation
in the Transition of Spherical Couette FlowKoichi NAKABAYASHI, Weiming SHA,
Naofumi ADACHI and Yoichi TSUCHIDA^{*5}^{*5} Nagoya Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 466-8555 Japan

In order to study on disappearance phenomena of velocity fluctuation in the laminar-turbulent transition of spherical Couette flow with only an inner sphere rotating, we measured azimuthal component of velocity fluctuation at the equator for various clearance ratios $\beta=0.06\sim0.206$, and considered the evolution of correlation dimension d , maximum Lyapunov exponent λ and power spectra of the azimuthal velocity component with an increase of the rotating Reynolds number Re for each β . Consequently, the following conclusions were obtained. The disappearance phenomena occur only for $\beta\approx0.13\sim0.17$. Even though $d\approx2$, no T^2 torus appears in the case of $\lambda>0$. The kinetic energy of disturbance increases with Re in the range of higher frequencies in the case of β where the disappearance phenomena do not occur, but decreases to almost zero in the case where they occur.

Key Words: Chaos, Transition, Vortex, Spherical Couette Flow, Correlation Dimension, Maximum Lyapunov Exponent, Power Spectrum, Taylor-Görtler Vortex

1. 結 言

内球のみが回転する同心 2 球間のクエット流れの層流-乱流遷移に関する研究は著者らのうちの一人をはじめとして多くの研究者によって実験的にあるいは数値的に研究されてきた⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾. この遷移過程はすきま比 β に強く依存するが, 特に β が約 0.3 付近を境として渦構造が大きく相違することが明らかになってきた. $\beta<0.3$ では環状テイラー・ゲルトラー (TG) 渦が生じるのに対し, $\beta>0.3$ ではそれが発生せずスパイラル状の渦 (スパイラル TG 渦とは異なる) が生じる⁽⁷⁾⁽⁸⁾. ここでは $\beta<0.3$ における遷移過程を扱うが, その場合でも β が約 0.1 以下と約 0.2 以上ではレイノルズ数変化に対する渦構造の変遷に明らかな相違が見られ, 遷移のようすも相違する⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾.

β が約 0.2 以下における層流から乱流への遷移で

は, 回転レイノルズ数 Re を増加させたとき, 超臨界流においてスパイラル TG 渦が発生するが, それまでは速度変動が発生しない. 速度変動発生後 Re をさらに増してゆくと, 速度変動は一般的には消滅することなく増大し続け, ついには乱流になる. しかし, $\beta=0.14$ の場合には, 一度発生した速度変動が消滅するという現象 (または再層流化現象⁽²⁾ という) が発見された. しかし, この消滅現象は β や Re のどのような領域で生じるのか, また, そのメカニズムはどうであるのかについては明らかにされていない.

前報⁽¹¹⁾ では, $\beta=0.14$ における速度変動の消滅現象について, カオス力学的手法である相関次元, ポアンカレ断面および一次元再帰写像の解析法を用いて, 遷移のシナリオを明らかにした. このようなカオス力学的手法は, 散逸系の遷移過程に対する解析手法として最近使用されるようになり, 例えば, Brandstater ら⁽¹²⁾, Belyaev ら⁽¹³⁾ が相関次元, 最大リャプノフ指数等の解析法をクエット系流れの遷移過程の解明に適用し, カオティックな流れの振舞いの特徴付けを行っている.

本報では, 速度変動の消滅現象が Re と β のどのような領域で生じるのか, また, この消滅現象が生じる場合と生じない場合にはどのような相違点があるのか

* 原稿受付 2001 年 4 月 25 日.

^{*1} 正員, フェロー, 愛知工科大学工学部 (☎ 443-0047 蒲郡市西迫町馬乗 50-2) [元: 名古屋工業大学工学部].^{*2} 東北大学大学院理学研究科 (☎ 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉).^{*3} (株) デンソー (☎ 448-8661 刈谷市昭和町 1-1).^{*4} 正員, 名古屋工業大学工学部 (☎ 466-8555 名古屋市中昭和区御器所町).

E-mail: nakabaya@cfd.mech.nitech.ac.jp

について、上述のカオス力学的手法を用いて考察する。

おもな記号

- d : 相関次元
 $E(f)$: パワースペクトル
 $\hat{f}_0$: 内球の回転周波数(代表周波数) Hz
 f : かく乱の無次元周波数
 f_B : 外向き境界流線の変動の無次元基本周波数
 f_S : スパイラル TG 渦の無次元基本周波数 (f_{S1} , f_{S2})
 f_{th} : 低周波領域と高周波領域を区分するための数値
 f_w : 進行波動の無次元基本周波数 (f_{w1} , f_{w2} , f_{w3} , f_w)
 $L(t)$: 相空間でのデータ点間の無次元距離
 R_1, R_2 : 内, 外球の半径 m
 R^* : レイノルズ数比 $= Re/Re_c$
 Re : 回転レイノルズ数 $= U_0 R_1 / \nu$
 Re_c : テイラー不安定の臨界レイノルズ数
 t : 無次元時間(代表時間は $1/\hat{f}_0[s]$)
 U_0 : 内球赤道上的周速度 $= 2\pi R_1 \hat{f}_0$ (代表速度) m/s
 $\tilde{V}_\phi$: 方位角方向の速度変動成分 m/s
 $X(t)$: 無次元の時系列データ
 β : すきま比 $= (R_2 - R_1)/R_1$
 λ : 最大リアプノフ指数
 τ : 無次元遅れ時間

2. 実験装置および方法

2.1 実験装置 実験装置は前報⁽¹¹⁾と同じであるので省略する。本報では、前報で実験を行ったすきま比 $\beta=0.14$ 以外に、 $\beta=0.06, 0.10, 0.158, 0.206$ についても実験を行った。ここでは外球半径 $R_2=87.65 \pm 0.03$ mm を固定したまま、内球半径 R_1 を変えることによりすきま比を変更した。表 1 に本研究で用いた

Table 1 Radius R_1 of inner sphere and critical Reynolds number Re_c for each clearance ratio β

β	R_1 [mm]	Re_c
0.06	82.55 ± 0.04	2760 ⁽⁹⁾
0.10	79.74 ± 0.03	1440
0.14	76.88 ± 0.03	900 ⁽¹¹⁾
0.158	75.71 ± 0.03	760
0.206	72.57 ± 0.04	554 ⁽¹⁰⁾

すきま比 β , 内球の半径 R_1 および臨界レイノルズ数 Re_c を示す。ここで $\beta=0.06, 0.14, 0.206$ の Re_c の値については過去の結果^{(9)~(11)}を採用しているが、 $\beta=0.10$ と 0.158 については今回行った流れの可視化実験により得た値である。流速の測定にはレーザドップラー流速計(LDV)を用い、赤道位置でのすきま中央における方位角方向速度変動成分 $\tilde{V}_\phi$ を測定した。そして、 $\tilde{V}_\phi$ の時系列データから前報⁽¹¹⁾で述べた方法により相関次元を計算する。ここで埋込み次元数、データ点数は前報⁽¹¹⁾と同じである[埋込み次元数 2~17, 前報の式(1)の $N=4\,000 \sim 20\,000$ 点, 式(2)の $M=1\,000$ 点]。さらに本報では、最大リアプノフ指数についても計算する。

2.2 最大リアプノフ指数 リアプノフ指数はカオス的な振舞いに特徴的な初期条件敏感性の程度を測るものであり、 n 次元相空間には n 個のリアプノフ指数が存在するが、ここでは最大リアプノフ指数のみについて考察する。

最大リアプノフ指数の計算方法については、Wolf⁽¹⁴⁾のアルゴリズムに従った。まず、時系列データ $X(t)$ から遅れ時間法により、埋込み次元 m を 8 までとり、トラジェクトリーの再構成を次のように行う： $X(t)=[X(t), X(t+\tau), \dots, X(t+(m-1)\tau)]$ 。そして、図 1 に示すように、基準となるトラジェクトリー上の初期のデータ点 $X(t_0)$ とそれに最も近いデータ点 $X'(t_0)$ を $\tilde{V}_\phi/U_0$ の最大振幅の 3% 以上離れたデータ点から選び、それら 2 点間の距離を初期値 $L(t_0)$ とおく。次に、アトラクタの 1 周期分だけ進めた時間 t_1 (例えばスパイラル TG 渦が主原因の場合には $t_1=t_0+1/f_S$) での 2 点間の距離を $L'(t_1)$ とおき、2 点間の距離の比 $L'(t_1)/L(t_0)$ を求める。そして、 t_1 で再び基準となるトラジェクトリーに近隣するデータ点を探し、それら 2 点間の距離を $L(t_1)$ とおく。次に再び時間を進めて $L'(t_2)/L(t_1)$ を求める。これらの計算を基準となるトラジェクトリーのすべてにわたって(時間 t_M まで)繰返し行い、最大リアプノフ指数 λ を次式により求める。

Fig. 1 Schematic representation of the evolution and replacement procedure

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_k - 1)} \dots \dots \dots (1)$$

なお、最適な遅れ時間 τ は次式で与えられる相互情報関数 $I(\tau)$ の極小値より決定した⁽¹⁵⁾。

$$I(\tau) = \iint P(x, y) \log_2 [P(x, y) / \{P(x)P(y)\}] dx dy$$

ここで、 $x = X(t)$, $y = X(t + \tau)$, $P(x)$ と $P(y)$ は確率密度関数、 $P(x, y)$ は合成確率密度関数である。上述の最大リャプノフ指数の値からアトラクタのタイプは、 $\lambda = 0$ のときはリミットサイクルまたは T^2 トーラス、 $\lambda > 0$ のときはストレンジアトラクタであることがわかる。

3. 実験結果および考察

3.1 速度変動の消滅現象の発生領域 速度変動消滅現象が生じない場合と生じる場合のそれぞれの例として、図2(a), (b)にすきま比 β が0.10と0.158の場合に対する速度変動波形のレイノルズ数変化を示す。図2(a)は速度変動の消滅現象が起こらない場合であるが、ここでは周期変動から始まり、レイノルズ数比 R^* が増すにつれ、振幅の大きさや、変動の複雑

(a) $\beta = 0.10$

(b) $\beta = 0.158$

Fig. 2 Examples of velocity fluctuations

さが徐々に増していく。しかし図2(b)の場合には、波形が周期的なものから複雑なものになった後、複雑さが減少し、再び周期的な波形へと変化する。そして、さらに R^* を増すと速度変動が消滅する。

図3はすきま比 β および Re に対する相関次元 d の変化を示す。 $\beta = 0.14$ の結果については前報⁽¹¹⁾と同じである。図3中の Re - β 面 ($d=0$ 面) 上の曲線は表1の環状TG渦発生の臨界レイノルズ数 Re_c と β との関係を示している⁽¹⁾。 $\beta = 0.06$ および 0.10 の場合には、 Re が Re_c をこえると、 d が約1にまで増大する。その後、 Re の増加につれ d の値は急激に増大する。 $\beta = 0.14$ では、 $d = 1, 2$ から $d = 4 \sim 5$ に達した後 $d = 0$ となり、速度変動の消滅現象が生じる。その後、 Re の増加とともに d は増大する。 $\beta = 0.158$ の場合は、 $d = 1$ から急激に増大した後再び $d = 2$ に減少するが、その後 $d = 3 \sim 4$ へ達し、やがて $d = 0$ になり速度変動の消滅現象が生じた後、 d は増大する。以上のすきま比では、 d が最初に増大し始める Re の値と Re_c の値の差が β の増加とともにゆるやかに大きくなっている。しかし、さらに大きなすきま比の $\beta = 0.206$ になれば、 Re_c をこえてもしばらくは $d = 0$ の状態が続く、 $d = 1$ へ増大するときの Re と Re_c との値の差が急激に増す。その後、 Re の増加に伴い d の値はさらに大きな値へと増大し続け、消滅現象が生じない。このように速度変動の消滅現象が生じる領域は図3中の斜線を施した領域のみに限られる。

図4は、図3の結果から求めた Re - β 面上での $d = 1, 2, 3$ の等値線と、これまでに明らかにされてきたスパイラルTG渦、進行波動、せん断波動が発生する各 Re およびスパイラルTG渦、進行波動が消滅する各 Re との比較を示す。 $d = 1$ および $d = 2$ の等値線は、それぞれスパイラルTG渦および進行波動の発生・消滅の遷移レイノルズ数と一致している。図4から、速

Fig. 3 Re dependence of correlation dimension for each β

Fig. 4 Region of velocity-fluctuation disappearance

度変動消滅現象が生じる β の範囲はおよそ 0.13~0.17 であることがわかる。

3.2 速度変動の消滅現象と最大リャプノフ指数

図5は最大リャプノフ指数 λ および相関次元 d のレイノルズ数比 R^* に対する変化を示す。すべての β の $R^*=1$ では定常な環状 TG 渦が発生し、 $\beta=0.06$, 0.14, 0.158 のいちばん左側の $\uparrow$ ではスパイラル TG 渦、 $\beta=0.206$ のそこでは環状 TG 渦の内部波動がそれぞれ発生する。 $\beta=0.06$ の場合、 $R^*=1.1\sim 1.2$ 付近では $\lambda > 0$ で d が 1.5 の値であるが、 λ の値のばらつきが大きい。これは、この R^* 領域では速度変動の信号のレベルが非常に小さいので電氣的ノイズの相対的比率が大きいことによる影響のためと考えられる。しかしながら、 $R^*=1.22\sim 1.3$ では、 $d=1$, $\lambda=0$ であるので、測定が正確に行われており、この領域ではトラジェクトリーがリミットサイクルを形成していることがわかる。そして、 $R^*>1.3$ では $\lambda > 0$ となり $d > 3$ にまで急増する。これはストレンジアトラクタの発生を意味している。

$\beta=0.14$ の場合は、 $d=1$ と $d=2$ の一定値になっているところでは λ が約零になっており、アトラクタがそれぞれリミットサイクルおよび T^2 トーラスである。その後、 d の値が急に約 5 まで増大するのは、 λ が正でかつ大きな値をとるからである。その後、 $R^*=5.5\sim 5.8$ にかけて d が約 2.5 に減少するが、 λ は正の値のままである。そして、速度変動の消滅現象が生じる少し手前の $R^*=5.8\sim 5.9$ で λ が約零の値に減少するとともに、 d の値も約 1 に減少する。なお上述の λ が正の場合には、図6(a)に見られるように、パワースペクトル $E(f)$ のノイズレベルは大きいままで周波数 f の増加に対して減少傾向を示す。他方、 λ が

Fig. 5 Evolution of correlation dimension and maximum Lyapunov exponents

零の場合には、図6(b)に見られるように、ノイズレベルが低下し高調波成分の線スペクトルのみになる。したがって、相空間ではリミットサイクルになり、 $d=1$ が得られる。 R^* がさらに増すと、 d が零になり、そこでは消滅現象が生じることになるのである。

$\beta=0.158$ の場合は、最初に $d=1$, $\lambda=0$ でリミット

(a) $R^*=5.84$ (b) $R^*=5.86$ Fig. 6 Power spectra ($\beta=0.14$)

サイクル, 次に $d \sim 3$ で λ の値が正になるが, 再び $d \sim 2$, $\lambda=0$ になり T^2 トーラスとなる。 R^* がさらに増加すると, $d \sim 4$, $\lambda > 0$ となり, その後 d の値は再び 1.8 にまで減少するが, $\lambda > 0$ のままである。しかし, それ以上の R^* では d の値が零になる。

$\beta=0.206$ の場合は, R^* が 12.5 付近から d が増大する傾向を示すが, あまり明確には現れない。また d の値が 1 より少し大きな値になりリミットサイクルは描けない。その後, d および λ は R^* とともに増大し続ける。

3・3 速度変動エネルギー変化と消滅現象との関係

速度変動に対するパワースペクトルのうち, 消滅現象が起こらない場合と起こる場合の代表的なものとして, $\beta=0.06$ と 0.158 の場合を図 7(a), (b) に示す。 $\beta=0.06$ の場合, 低レイノルズ数では, 渦対の数 S_P が 2 および 1 のスパイラル TG 渦(流れの可視化とレーザ散乱光の同時計測⁽²⁾によりそれぞれの基本周波数は f_{s1} , f_{s2} であることを確定⁽⁹⁾)によるピーク値が現れ, R^* の増加に伴いその高調波成分が高周波側に広がっていく。他方, 高レイノルズ数($R^* \geq 1.31$)では, 外向き境界流線の変動 f_B (この場合の f_B は $R^*=1.31$

(a) $\beta=0.06$ (b) $\beta=0.158$

Fig. 7 Power spectra

と 1.37 では S_P 値が時間的に変化するスパイラル TG 渦の回転周波数に一致)⁽⁹⁾ によるピーク値ならびに波数 m が 8, 10 および 11 のそれぞれの進行波動 f_{w1} , f_{w2} , f_{w3} ⁽⁹⁾ によるピーク値が現れ, 同時にそれらの高調波, 干渉波のピーク値も現れている。他方, $\beta=0.158$ の場合は, 低レイノルズ数では $S_P=3$ のスパイラル TG 渦(f_{s1}), 高レイノルズ数では $S_P=2$ のスパイラル TG 渦(f_{s2})および $m=6$ の進行波動(f_w)による上述と同様のピーク値が現れている。

(a) $\beta=0.06$ (b) $\beta=0.14$ (c) $\beta=0.158$

Fig. 8 Difference of the kinetic energy of disturbance between lower and higher frequency regions

これらの結果より次のことがいえる。 $f=1$ 付近にスパイラル TG 渦(あるいは外向き境界流線の変動)によるピークが現れ, R^* の増加に伴い高調波成分が高周波側に広がってゆく。一方, 進行波動は $f>2$ で見られる。そこで, スパイラル TG 渦と進行波動の二

つのかく乱の基本周波数の間にある $f=2$ を敷居値 f_{th} として, 次式で与えられる低周波と高周波の二つの周波数領域のもつパワー, E_{high} と E_{low} , を比較する。

$$E_{high} = \int_2^{\infty} E(f) df \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$E_{low} = \int_{0.1}^2 E(f) df \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(2)は進行波動を含む $f>f_{th}$ の高周波領域でのかく乱の運動エネルギーに対応し, 式(3)はスパイラル TG 渦を含む $f<f_{th}$ の低周波領域でのかく乱の運動エネルギーに対応する。

その結果を $\beta=0.06, 0.14, 0.158$ の各場合について図 8(a)~(c)に示す。 $\beta=0.06$ の場合, 低 R^* においてほとんど零に近かった高周波成分のかく乱のエネルギーは, 進行波動によるかく乱のエネルギーが加わると徐々に増加し始める。そして, R^* が約 3 以上になると, 完全に高周波成分と低周波成分のパワーが逆転する。 $\beta=0.14$ の場合には, 低 R^* においてかく乱のエネルギーの大部分が低周波成分で占められている。 R^* が増加すると進行波動が加わり高周波成分のエネルギーが増加し始め, $R^*=2$ 付近でほぼ同じ割合になる。しかし, このあたりから高周波領域のエネルギーは減少し, ついには速度変動消滅前の $R^*=5.5 \sim 6.4$ で非常に小さい値になった後, 消滅現象が起きる。図 8(b)中の A, C, E はエネルギーの減少を, B, D は増加を示す。図 8(c)の $\beta=0.158$ の場合もエネルギーの減少, 増加の大きさは $\beta=0.14$ と異なるものの, $\beta=0.14$ と同様の変化をたどる。

以上のように, 速度変動の消滅が生じない場合は, 高周波領域のかく乱のエネルギーがカオス領域において増大し続けるが, 速度変動の消滅が生じる場合には, 高周波領域のかく乱のエネルギーがカオス領域においてほぼ零にまで減少する。速度変動の消滅現象はレイノルズ数の増加にかかわらず進行波動が弱まっていき, あるレイノルズ数に達したとき突然スパイラル TG 渦が消滅して環状 TG 渦に戻る現象であると考えられる。しかし, それがどのようなダイナミクスに基づくものなのかは現段階では明らかでない。

4. 結 論

本研究では, 速度変動の消滅現象の発生領域とその原因を調べるため, すきま比を $\beta=0.14$ 以外に拡張して実験を行った結果, 次のことが明らかになった。

(1) 速度変動の消滅現象が発生するすきま比の範囲は, $\beta=0.13 \sim 0.17$ である。

(2) 速度変動の消滅現象が生じる場合は、その前に相関次元の値が4~5まで増加した後に零にまで減少し、その後レイノルズ数の増加とともに増大する。一方、速度変動の消滅が生じない場合は、相関次元の値が減少せずに増大し続ける。

(3) 位相空間内に T^2 トーラスを形成するのは、相関次元 $d=2$, 最大リャプノフ指数 $\lambda=0$ のときである。 $\lambda>0$ になれば d は増大する。 $d=2$ でも $\lambda>0$ であれば T^2 トーラスにはならない。

(4) 速度変動の消滅が生じない場合には、レイノルズ数の増加に伴い高周波成分のかく乱のエネルギーが増大し続ける。しかし、速度変動の消滅が生じる場合には、高周波成分のエネルギーがほぼ零にまで減少する。

本研究には平成8, 9年度科学研究費補助金(基盤C)(No. 10650169)が与えられた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Nakabayashi, K., Transition of Taylor-Görtler Vortex Flow in Spherical Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **132** (1983), 209-230.
- (2) Nakabayashi, K. and Tsuchida, Y., Spectral Study of the Laminar-Turbulent Transition in Spherical Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **194** (1988), 101-132.
- (3) Bühler, K. and Zierep, J. (Comte-Bellot, G. and Mathieu, J., eds.), Dynamical Instabilities and Transition to Turbulence in Spherical Gap Flows, *Advances in Turbulence, Proceeding 1st European Turbulence Conference*, (1987), 16-26, Springer.
- (4) Yavorskaya, I. M.,ほか5名, Stability, *Non-uniqueness and Transition to Turbulence in the Flow between Two Rotating Spheres*, (1980), 1, Space Research Institute, Academy of Science, USSR.
- (5) Bühler, K. and Zierep, J. (Kozlov, V. V., ed.), New Secondary Instabilities for High- Re number Flow between Two Rotating Spheres, *Laminar-Turbulent Transition*, (1984), 677-685, Springer.
- (6) Nakabayashi, K. and Tsuchida, Y., Flow-History Effect on Higher Modes in the Spherical Couette System, *J. Fluid Mech.*, **295** (1995), 43-60.
- (7) Araki, K., Mizushima, J. and Yanase, S., The Non-axisymmetric Instability of the Wide-Gap Spherical Couette Flow, *Phys Fluids*, **9** (1997), 1197-1199.
- (8) Egbers, C. and Rath, H. J., Existence of Taylor Vortices and Wide-Gap Instabilities in Spherical Couette Flow, *Acta Mech.*, **111** (1995), 125-140.
- (9) 中林功一・鄭志明, 回転2球間クエット流におけるかく乱の基本周波数のすきま比依存性, 機論, **55-517**, B (1989), 2574-2580.
- (10) 中林功一・鄭志明, 2球間クエット超臨界流のかく乱の構造と渦運動, 機論, **57-541**, B (1991), 2924-2930.
- (11) 中林功一・森西洋平・小林政弘, すきま比 $\beta=0.14$ での回転2球間クエット流れの層流-乱流遷移のカオス, 機論, **63-615**, B (1997), 3499-3504.
- (12) Brandstater, A. and Swinney, H. L., Strange Attractors in Weakly Turbulent Couette-Taylor Flow, *Phys. Rev. A*, **35** (1987), 2207-2220.
- (13) Belyaev, Yu. N. and Yavorskaya, I. M., Spherical Couette Flow: Transitions and Onset of Chaos, *Fluid Dyn.*, **26-1** (1991), 7-15.
- (14) Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A., Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica*, **16D** (1985), 285-317.
- (15) Fraser, A. M. and Swinney, H. L., Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information, *Phys. Rev.*, **A33** (1986), 1134-1140.
- (16) Bühler, K., Symmetric and Asymmetric Taylor Vortex Flow in Spherical Gaps, *Acta Mech.*, **81** (1990), 3-38.