格子ボルツマン法の高精度壁面境界条件*

日 置 潤*¹, 梶 島 岳 夫*²

Consistent Wall Boundary Condition for Lattice-Boltzmann Method

Jun HIOKI and Takeo KAJISHIMA*³.*³ Department of Mechanical Engineering, Osaka University,
2-1 Yamadaoka, Suita-shi, Osaka, 565-0871 Japan

A new approach to represent the non-slip boundary condition in the lattice-Boltzmann method (LBM) was proposed to improve the resolution for flow in the vicinity of solid wall. Considering the velocity distribution function as a volumetric average in each lattice, the solid boundary was taken into account in the convection process, not in the collision process as in the previous method. Then we applied it to the driven flow in a square cavity of Reynolds number up to 7 500. The wall-limiting profile of velocity and the numerical stability were significantly improved by our method in comparison with previous ones. We believe our proposal could contribute to develop an applicability of LBM for higher Reynolds number flows.

Key Words: Lattice-Boltzmann Method, Boundary Condition, Computational Fluid Dynamics, Viscous Flow, Cavity Flow

1. 結 言

近年, 数値流体力学における計算法として一般的である差分法, 有限要素法に対して, より高い効率と広範な適用性が期待できる方法として格子ボルツマン法 (Lattice-Boltzmann Method, 以下 LBM と呼ぶ) が単相, あるいは多相の非圧縮粘性流れに用いられるようになってきた。LBM は, セルオートマトンの一種である格子ガスオートマトン法 (Lattice Gas Automata, 以下 LGA と呼ぶ) をもとに提案された計算法で, 流体を多数の仮想的な粒子の集まりとしてその移動速度を有限個に近似し, 移流と衝突の繰り返しを速度分布関数を用いて計算することにより, 流れ場の巨視的な変化を求める方法である⁽¹⁾⁻⁽³⁾。LBM は, アルゴリズムのシンプルさと, 計算局所性の高さから, 複雑な流れ場に対しても適用が容易であり, 更に大規模な並列計算に適しているなどの利点を持っている。しかし, 計算可能なレイノルズ数の制限, 換言すれば高レイノルズ数における計算機容量の増大などの欠点も指摘されている。

筆者らは LBM の工学的な有用性を高めるため, 適用可能なレイノルズ数の上限の拡大, および計算の高

精度化, 高効率化を目的として LBM アルゴリズムの研究を行なっている。

最近, FDLBM (Finite Difference Lattice Boltzmann Method)⁽⁴⁾⁻⁽⁵⁾や ISLBE (Interpolation Supplemented Lattice Boltzmann Method)⁽⁶⁾⁻⁽¹⁰⁾などの非等方, 不等間隔格子を用いた計算法の確立や, SGS モデルの提案⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁴⁾など, 様々な改善が行なわれている。しかし, 壁面をもつ流れ場において最もその計算精度に影響を及ぼす壁面境界条件に関しては, 速度分布の壁面漸近特性を自然に表現できる方法は見当たらず, 上に挙げられた手法において格子の集中によって補っているのが実情である。

LBM で用いられる固体壁境界条件としては, LGA から用いられていたすべりなし, あるいはすべり境界条件⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾, 壁面での局所平衡分布を仮定した方法⁽²⁾, 稲室らによるすべり速度を考慮にいたした方法⁽¹⁷⁾などが挙げられる。これらはそれぞれに長所短所があるが, どの壁面境界条件を用いても高レイノルズ数での計算において, 壁面から第一層目の速度の値がすべってしまふ。この問題があっても格子解像度を上げることによりある程度は精度の改善が得られるが, 根本的な解決にはなっていない。

本稿では, LBM によって解析可能なレイノルズ数の上限を拡大することを目的として, 上で述べた壁面境界条件の不具合に対する解決策として新しい壁面境界

* 原稿受付 2001 年 6 月 18 日。

*¹ 大阪大学大学院 (現在, ユニチカ (株))。*² 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)。

E-mail: kajisima@mech.eng.osaka-u.ac.jp

Fig. 1 LBM unit for 2D-9velocity model

条件を提案する. さらに, その条件を 2 次元 cavity 流れに適用し, 従来の壁面境界条件を用いた計算結果, および差分法による 2 次元 cavity 流れの数値解析結果として Ghia ら⁽¹⁸⁾のデータと比較を行なうことによって, その有効性を示す.

2. 数 値 計 算 法

2.1 LBM の基礎方程式 これより以下の物理量は, すべて代表長さ L , 流れ場の代表速さ U , および代表密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである. また, 流体の仮想的な粒子近似である格子モデルは, 空間次元や格子形状の違いにより様々なモデルが提案されているが, ここでは図 1 のような 2 次元の正方格子を用いたモデルとして一般的な 2 次元 9 速度モデルで記述する. 2 次元 9 速度モデルの場合の粒子速度 $\mathbf{e}_i$ は, $\mathbf{e}_i = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ で与えられる. 2 次元 9 速度モデルでは, 2 次元平面を等方等間隔の正方格子で分割し, 時間 t , 格子点 $\mathbf{x}$ において速度 $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) で移動する流体粒子の速度分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ を, 次の基礎方程式を用いて計算し, その時間発展を求めていく.

$$f'_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i(f(\mathbf{x}, t)) \quad (1)$$

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f'_i(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

f を衝突前, f' を衝突後の分布関数とする. ここで, Δt は時間刻みであり, 格子間隔を Δx とおくと, $\Delta x = \mathbf{e}_i \Delta t$ となる. また, $\Omega(f(\mathbf{x}, t))$ は衝突関数であり, 粒子同士の衝突による速度の変化を表す関数である. ここでは, 非圧縮の LBM で一般的に用いられている, 緩和時間 τ による単一緩和時間近似をおこなう BGK モデル⁽¹⁹⁾で表す.

$$\Omega_i(f(\mathbf{x}, t)) = -\frac{1}{\tau} \{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\} \quad (3)$$

f_i^{eq} は局所平衡分布関数であり, 速度の絶対値が $e_i = 0, 1, \sqrt{2}$ に対して, それぞれ次の式で表される.

$$e_i = 0, \quad f_i^{eq} = \frac{4}{9} \rho \left\{ 1 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\} \quad (4)$$

$$e_i = 1, \quad f_i^{eq} = \frac{\rho}{9} \left\{ 1 + 3\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\} \quad (5)$$

$$e_i = \sqrt{2}, \quad f_i^{eq} = \frac{\rho}{36} \left\{ 1 + 3\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\} \quad (6)$$

また, 流体の密度 ρ や流速 $\mathbf{u}$ は, 粒子の分布関数 f_i によって, 次のように表される.

$$\rho = \sum_{i=1}^9 f_i \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^9 \mathbf{e}_i f_i \quad (8)$$

なお, これらの式は適切な変換を施すことにより, 流体力学の基礎方程式である, 質量保存式, Navier-Stokes 方程式に帰着することが知られている⁽¹⁾⁻⁽³⁾.

LBM は, もともと LGA を統計的な考えに基づき, ブール代数で表された粒子の量を粒子の密度分布である速度分布関数で置き換えたものである. このような観点から, 統計的な性質をもつ速度分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ は, ある点における粒子分布と考えるよりはむしろ, ある点を含む微小体積での粒子分布の平均値とするのが妥当である. つまり, 粒子密度分布を $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ とおくと,

$$f_i(\mathbf{x}, t) dx = \int \phi_i(\mathbf{x}, t) dx \quad (9)$$

と表される. 2 次元 9 速度モデルの場合では, この領域 dx を, 格子点を中心とした一辺の長さが格子点間距離と同一の正方形と考える (図 2). このようにおいても, 粒子の移流過程では, この領域内の粒子は完全に隣り合う領域に移流を行うことが可能であり, 衝突過程では領域内でのみ衝突, 拡散を行なうと仮定するので, 方程式および計算法に関して従来の方法を変更する必要はない.

2.2 境界条件 LBM での一般的な壁面境界の状態である, 格子点を通り格子線に対して平行な壁面について考える. このとき, 壁面が通る格子点において, 計算をおこなう流体の領域は図 3 の様に壁のない上半分の領域であるものとする.

従来の方法では, 流体粒子は格子点上にのみ存在するとし, 図 3 の場合では格子点の存在する位置, つまり壁面上の分布として取り扱うのが一般的であった. このため, 従来の壁面境界条件では基本的に壁面の存

Fig. 2 2D-9velocities grid and statistic domains

Fig. 3 Grid and domain layout in wall-bounded area

在は移流過程には関係しない。そして、衝突過程には粒子同士の衝突を計算するかわりに壁面との衝突を行ない、壁面側の未知の速度分布関数を求めている。この計算手法は明らかに LGA からの伝統的な方法である。

これに対して本論文で提案する方法は、衝突過程では壁面との干渉を問わず、移流するときに壁面と干渉する領域に関して境界条件を適用する。また、求められる速度は従来法のように格子点上での速度ではなく、領域内の流体粒子の速度の平均である。この場合、移流前に壁面を含む領域にある流体粒子と、移流後にその領域に流れ込んでくる粒子、2つの場合について考察を行なう必要がある。

まずは壁面を含む領域から移流した後、別の領域に流れ出す粒子について考える (図 4 (a) の 3つのベクトルを参照)。壁面については完全弾性反発であることを仮定すると、この領域に存在する下向き方向の速度成分を持った粒子はすべて壁面と衝突し、壁面の上側の第一層目に移流する。このとき、壁面との衝突による粒子の速度方向の変化、つまり速度分布関数の変化、再分配を表す壁面の衝突則はあらかじめ定めておく。これら壁面と衝突する粒子の中には壁面と角度を持って衝突するものもあるため、壁面と粒子が衝突する位置は本来まちまちであるが、計算の簡単化のために領域内の粒子をひとまとめにして衝突を行ない、その後移流することとすると、以上のプロセスは次のよ

うな式で表すことができる。

$$f_i^w = W_i(f_4, f_7, f_8), \quad (i = 3, 5, 6) \quad (10)$$

$$f_i' = f_i + f_i^w, \quad (i = 3, 5, 6) \quad (11)$$

ここで、 f_i^w は壁面との衝突によって得られる壁面より遠ざかる方向の速度成分を持つ粒子である。 W_i は壁面と粒子との衝突を表した関数であり、壁面衝突関数と呼ぶこととする。この壁面衝突関数に関しては後に詳細に示す。また、 f_i' は前述した移流過程の直前の速度分布関数であり、衝突過程の後上向き速度を持った粒子に加え、壁面との衝突によって速度が変化した粒子が一緒になって移流することを表している。

次に、壁面上部第一層目より移流し、壁面を含む領域に流入してきた粒子について考える (図 4 (b) の 3つのベクトル参照)。これらの壁面上部第一層目の粒子のうち、上半分の領域から移流してきた粒子は壁面には衝突せずにそのままの方向速度で移流を完了する。しかし、領域中心の格子点よりも下部の粒子に関しては、壁面に衝突しその速度方向を変えることとなる。このケースでは、前述のものと同様壁面で完全弾性反発と見なしているため、粒子の移動速度を考えると壁面と衝突してもなお上方向速度を持った粒子として壁面を含む領域内で移流を完了する。また、壁面と衝突する位置はこれも上記のケースと同様まちまちであるが、こちらの場合には領域内に流入してくる粒子の方をひとまとめとして考えると、

$$f_i = f_i^w = W_i(f_4, f_7, f_8), \quad (i = 3, 5, 6) \quad (12)$$

$$f_i(x, t) = \frac{1}{2} f_i'(x - e_i \Delta t, t - \Delta t), \quad (i = 4, 7, 8) \quad (13)$$

と表される。

このようにして、移流過程において壁面境界条件を適用することにより、質量の保存が成り立つ。また壁面を含む格子点の領域においても衝突過程が問題なく行なえることによって、流れ場の変化に対する安定性が増すと考えられる。

2.3 壁面衝突関数 壁面衝突関数は、基本的に壁面により未知となっている速度分布関数を決定するという、従来の壁面境界条件と同じ考え方である。ただし、前述のように壁面上の点では静止粒子、あるいは壁面と平行な方向速度を持つ分布関数は存在しないために、これを考慮する必要がある。壁面衝突関数のベースとする方法としては、後述の比較計算に用いた従来法のいずれを採用しても結果はほとんど変わらなかった。そこで、ここではこれらの中で最も基本的でシンプルな条件である、すべりなし壁面境界条件および、これに対し移動壁面に対する拡張を加えられたも

Fig. 4 Conceptual images of collision with boundary wall

のに対して修正を施し、これを壁面衝突関数として説明をする。

ここで考える壁面との衝突は静止粒子、および壁面と平行方向に移動する粒子に関しては壁面との衝突はないものとする。そこで、壁面のごく近傍で壁面のもつ移動速度で流体粒子が平衡状態にあると仮定すると、壁面と平行方向への移動のみの場合、以下の関係を導くことができる。

$$f_4 + f_7 + f_8 = f_3^w + f_5^w + f_6^w \quad (14)$$

$$f_5^w - f_6^w + f_8 - f_7 = \frac{u_0}{3} \rho \quad (15)$$

ここでは壁面が下側にあるとし、速度分布関数の添字は図1のとおりとする。また、 u_0 は壁面の移動速度である。このとき、未知である速度分布関数 f_3^w , f_5^w , f_6^w に対して、次のような形を仮定する。

$$f_3^w = W_3 = f_4 + a_3(u) \quad (16)$$

$$f_5^w = W_5 = f_7 + a_5(u) \quad (17)$$

$$f_6^w = W_6 = f_8 + a_6(u) \quad (18)$$

これは、速度分布関数が粒子の壁面との衝突を静止状態における基本的なすべりなしの跳ね返り条件と、壁面の移動によって生じる粒子の運動量の変化とで表そうとしたものである。以上の条件から、

$$f_3^w + f_5^w + f_6^w = f_4 + f_7 + f_8 + a_3 + a_5 + a_6 \quad (19)$$

$$a_3 + a_5 + a_6 = 0 \quad (20)$$

$$f_5^w - f_6^w - f_7 + f_8 = a_5 - a_6 = \frac{u_0}{3} \rho \quad (21)$$

の関係があるが、これだけでは方程式が閉じない。ここでは簡単に $a_5 = -a_6$ の条件を付加してこの式を閉

じる。これにより、速度分布関数は、

$$f_3^w = W_3 = f_4 \quad (22)$$

$$f_5^w = W_5 = f_7 + \frac{u_0}{6} \rho \quad (23)$$

$$f_6^w = W_6 = f_8 - \frac{u_0}{6} \rho \quad (24)$$

となり、粒子と壁面の衝突である壁面衝突関数部を決定することができる。

3. 数値計算結果

3.1 計算条件 非圧縮流体計算の検証問題として、最も基本的な流れ場の一つである2次元のcavity流れで前章で提案した境界条件を検討する。Ghiaらのデータ⁽¹⁸⁾に対して、基本的なすべりなし境界、壁面での平衡分布を仮定した境界、すべり速度を仮定した境界の3種類を比較する。実質的な無次元の時間刻みを合わせるために、時間刻み $\Delta t = 1$ 、格子点間距離を $\Delta x = 1$ とおき、代表速度として壁面の移動速度 $U_0 = 0.1$ とする。移動壁面と静止壁面の接点である上部の角2点に関しては、特異点であるために本来十分な考察が必要であるが、移動壁の一部として扱う場合と、静止壁として扱う場合、どちらも流れ場に対して大きな差として表れてこなかったため、今回この2点は静止壁面上にあるとした。代表長さをcavityの1辺の長さ L 、動摩擦係数を ν とするレイノルズ数 $Re = LU_0/\nu$ を $Re = 100, 1000, 3200, 7500$ とし、それぞれ十分な時間発展計算を行う。それぞれの境界条件の適用範囲を考慮して、 $Re = 100, 1000$ では格子点数 65×65 、 $Re = 3200$ では 129×129 点、 $Re = 7500$ では 257×257 の格子を用いる。

なお、 $Re = 3200$ において、今回提案する境界条件については格子点数が 65×65 の場合についても解が

Fig. 5 2D-Cavity flow condition

得られているので図示に含める. そのほかの境界条件を用いてこのレイノルズ数で計算を行なうと, 数値的に発散を起こしてしまい, 計算を継続することが困難であった. このことより, 提案された境界条件が比較的安全性の高いものであることがわかる.

3.2 計算結果 計算結果を図6-図8に示す. 図6の(a)から(d)は計算領域の中心を通る線上で速度 $u(x)$, および $v(y)$ の分布を示している. 図中, BBはすべりなし境界条件, EQは平衡分布境界条件, SVはすべり速度境界条件を示している. また, 図7および図8は, 図6と同様の数値を上部壁と下部壁面の周辺について詳細に描いたものである. 図6から明らかに, 提案した境界条件(図中の present)は低レイノルズ数においても, (a)の様により結果を得られ, (b), (c)のような中レイノルズ数の領域や, (b), (d)にみられる格子解像度が不足気味の計算領域においても, 同様に従来の境界条件に比べて Ghia らとの一致が良い⁽¹⁸⁾. 特に, 従来の壁面境界条件の問題点と考えられる, せん断力の強い流れ場における壁面から第1点目における速度のすべりは, 格子解像度が不足するとその影響が強くなる. 図7, 図8をみると, 従来法ではせん断速度が強くなると絶対的なすべりが増加しているのが明らかである. 新しい境界条件を用いることにより, 壁面からの速度の立ち上がりは滑らかになり, 従来法に比べて計算精度が改善されている.

図6で示された LBM の結果の違いは, 境界条件の扱いのみに起因している. 図7, 8の壁近傍の速度分布の拡大表示で確認できるすべりによる速度の差が図6の分布の差の要因であり, 境界条件の改善効果は大きいことがわかる.

3.3 数値計算の安定性 今回, 次の判定条件によって収束判定を行なった.

$$\sqrt{S} < 1.0 \times 10^{-7} \quad (25)$$

ただし,

$$S = \frac{1}{9(L+1)^2} \sum_{i=0}^8 \sum_{x=0}^L \sum_{y=0}^L \{f'_i(x, y) - f_i(x, y)\}^2 \quad (26)$$

その結果, 表1のように, 収束までの計算ステップ数を得ることができた. ここで求められたステップ数は, 各境界条件とも同ステップ数の助走期間の後のものである. また, 'Overflow' は, 今回設定したステップ数の上限 (1000000 step) までに発散してしまったものを表している. 同様に, 'Not Conv.' と表示したものは, その期間中に発散しないか収束しなかったものである. 計算結果のうち, 表1(c)の高レイノルズ数部分は, 流れ場が十分に収束する前に判定条件を満たしてしまっている. そのため, 本来は収束までにさらに計算時間を要する.

新たに提案した方法は, 表で見られるとおり, レイノルズ数に対して十分な格子解像度のある場合には, 他の境界条件とほとんど同程度の計算回数で収束する. また, 他の条件では発散する, あるいは収束しないものについても, 収束することが確かめられた. これより, 新しい境界条件は従来の方法よりもロバストである.

Table 1 Time steps of flow convergence
(a) 65 × 65 grid points

Re	new	BB	EQ	SV
100	4471	8873	4379	4331
400	11676	18377	11382	11354
1000	18410	92614	15895	15866
3200	Not conv.	Overflow	Overflow	Overflow

(b) 129 × 129 grid points

Re	new	BB	EQ	SV
100	7280	14739	7214	7127
400	19602	30201	19419	19383
1000	27747	47433	27367	27328
3200	42141	Not conv.	94947	41604
5000	121218	Not conv.	Not conv.	Not conv.

(c) 257 × 257 grid points

Re	new	BB	EQ	SV
100	11174	25476	11109	10984
400	31393	49817	31275	31210
1000	46126	74134	45914	45876
3200	64592	119226	65039	65045
5000	205704	142658	201215	201047
7500	199640	174517	199773	199467
10000	808960	Not conv.	Not conv.	Not conv.

Fig. 6 Comparisons of predicted velocity profiles (x and y are horizontal and vertical coordinates, u and v are horizontal and vertical velocities, L is cavity length, and U_0 is top wall velocity)

Fig. 7 Close up of velocity profiles in the vicinity of the top (sliding) wall

Fig. 8 Close up of velocity profiles in the vicinity of the bottom (stationary) wall

4. 結 言

LBM に対して、速度分布関数は節点での値ではなく格子の平均値と解釈することで、固体壁面の存在を衝突過程ではなく移流過程において適用する方法の提案を行なった。その結果、質量保存を完全にみたし、壁近傍での速度の漸近分布を修正するとともに、さらに安定性を高めることを実現した。

2次元 cavity 流れにこの境界条件を適用することにより、壁面近傍の速度分布が改善され、流れ場全体での計算精度が向上することを示した。また、従来の境

界条件と比べてより高いレイノルズ数においても安定して計算が可能であることを示した。

文 献

- (1) Chen, S. and Doolen, G.D., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**, (1998), 329–364
- (2) 葛原道久, 高田尚樹, 片岡武 “格子ボルツマン法: 新しい数値流体力学の手法”, コロナ社, (1999)
- (3) Wolf-Gladrow, D.A., “Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models An Introduction”, Springer, (2000)
- (4) Mei, R. and Shyy, W., *J. Comp. Phys.*, **143**, (1998), 426–448
- (5) Cao, N. Chen, S. Jin, S. and Martinez, D., *Phys. Rev. E*, **55**-1, (1997), R21–R24
- (6) He, X. and Doolen, G.D., *Phys. Rev. E*, **56**-1, (1997), 434–440
- (7) He, X. and Luo, L.S., *Phys. Rev. E*, **55**-6, (1997), R6333–R6336
- (8) He, X. Luo, L.S. and Dembo, M., *J. Comp. Phys.*, **129**, (1996), 357–363
- (9) He, X. Luo, L.S. and Dembo, M., *Physica A*, **239**, (1997), 276–285
- (10) He, X. and Doolen, G., *J. Comp. Phys.*, **134**, (1997), 306–315
- (11) Eggels, J.G.M. and Somers, J.A., *Int. J. Heat and fluid Flow*, **16**, (1995), 357–364
- (12) Somers, J.A., *Applied Scientific Research*, **51**, (1993), 127–133
- (13) Eggels, J.G.M., *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **17**, (1996), 307–323
- (14) Hou, S. Sterling, J. Chen, S. and Doolen, G.D., *Fields Institute Communications*, **6**, (1996), 151–166
- (15) He, X. Zou, Q. Luo, L.S. and Dembo, M., *J. Stat. Phys.*, **87**, (1997), 115–136
- (16) Chen, S. Martinez, D. and Mei, R., *Phys. Fluids*, **8**, (1996), 2527–2536
- (17) Inamuro, T. Yoshino, M. and Ogino, F., *Phys. Fluids*, **7**-12, (1995), 2928–2930
- (18) Ghia, U. Ghia, K.N. and Shin, C.T., *J. Comp. Phys.*, **48**, (1982), 387–411
- (19) Bhatnagar, P.L. Gross, E.P. and Krook, M. *Phys. Rev. A*, **94**, (1954), 511–525
- (20) Lai, Y.G. Lin, C. and Huang, J., *Num. Heat Trans. B*, **39**, (2001), 21–43
- (21) Hou, S. Zou, Q. Chen, S. Doolen, G. and Cogley, A.C., *J. Comput. Phys.*, **118**, (1995), 329–347
- (22) Noble, D.R. Chen, S. Georgiadis, J.G. and Buckius, R.O., *Phys. Fluids*, **7**-1, (1995), 203–209
- (23) Ladd, A.J.C., *J. Fluid Mech.*, **271**, (1994), 311–339
- (24) Filippova, O. and Hänel, D., *J. Comp. Phys.*, **147**, (1998), 219–228
- (25) Zou, Q. and He, X., *Phys. Fluids*, **9**, (1997), 1591–1598