メッシュレス境界要素法のための数値積分法*

落 合 芳 博^{*1}

Numerical Integration for Meshless BEM

Yoshihiro OCHIAI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Kinki University,
3-4-1 Kowakae, Higashi-Osaka-shi, Osaka, 577-8502 Japan

The conventional boundary element method (BEM) uses internal cells for the domain integrals, when nonlinear problems or problems with domain effects are solved. In the conventional BEM, however, the merit of the BEM, which is easy preparation of data, is lost. This paper presents numerical integration for a meshless BEM, which does not require the internal cells. This method uses arbitrary internal points instead of internal cells. In this paper, a multi-dimensional interpolation method is proposed. Furthermore, multidimensional numerical integration is proposed using the above multidimensional interpolation method. This method is based on an improved multiple-reciprocity BEM (triple-reciprocity BEM) for heat conduction analysis with heat generation. In order to investigate the efficiency of this method, several numerical examples are given.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Heat Conduction, Interpolation, Integration, Multiple-Reciprocity Method

1. 緒 言

境界要素法は、有限要素法に比べてデータ作成が容易であるといわれているが、物体力が作用する場合や非線形問題の場合、領域積分のために有限要素法と同様に領域を分割する必要がある⁽¹⁾。この問題を解決するために領域を分割しないメッシュレス境界要素法として二重相反法等いろいろ提案されている⁽²⁾⁽³⁾。本論文では、従来の境界要素法の定式化をそのまま活用し、領域積分を要素分割せずに直接数値積分する方法を提案する。多重調和関数を用いて任意形状の領域上で定義された関数の補間方法および、この補間法を用いた数値積分法はすでに示している⁽⁴⁾。本数値積分法では、任意境界形状の数値積分が可能であり、グリーンの定理により二次元積分が一次元積分に、三次元積分が二次元積分に近似的に変換され、特異性のある場合の積分も可能である。本数値積分では、境界要素分割と積分のための積分点を用いる。本手法は三重相反境界要素法⁽⁶⁾または改良形多重相反境界要素法⁽⁵⁾と同じ概念を活用しており、非積分関数を連立境界積分方

程式により補間した後、数値積分法を行う。本論文においては、種々の境界要素法に使用できるように一般化した一次元および二次元問題の数値積分公式を示す。ただし、領域分割を行わない二次元の場合にのみ本手法の利点は存在する。

2. 理 論

2・1 補間 境界要素法において現れる領域積分 I は、任意領域を Ω とすると次式で表現できる⁽¹⁾。

$$I = \int_{\Omega} F_1(p, q) W_1^s(q) d\Omega \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ただし、関数 $W_1^s(q)$ は分布した任意の関数を示し、関数 $F_1(p, q)$ は基本解であり、観測点 p およびソース点 q の距離 r の関数である。なお、 p および q は境界上では P, Q で示す。式(1)を数値積分するために、関数 $W_1^s(q)$ を補間する。一次元の場合、分布する関数 $W_1^s(q)$ は、次のポアソン方程式を用いて補間することができる⁽⁴⁾。

$$\nabla_{(1)}^2 W_1^s = -W_2^s \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$\nabla_{(1)}^2 W_2^s = -W_3^p \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ただし、 $\nabla_{(1)}^2 = d^2/dx^2$ であり、 W_3^p はディラック形のデルタ関数の強さを示す。式(2)、(3)より次式が得られる。

* 原稿受付 2002年3月8日。

^{*1} 正員、近畿大学理工学部(〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1)。

E-mail: ochiai@mech.kindai.ac.jp

$$\nabla_{(1)}^4 W_1^s = W_3^p \dots\dots\dots (4)$$

式(4)は点荷重 $W_3^p(q)$ を伴うはりの変位 W_1^s を求める式とほとんど同じものである。つまり、はりの変形形状を補間に用いることになり、自然スプラインと一致する。

二次元分布する関数は、次のポアソン方程式を用いて補間することができる⁽⁷⁾。

$$\nabla_{(2)}^2 W_1^s = -W_2^s \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla_{(2)}^2 W_2^s = -W_3^p \dots\dots\dots (6)$$

W_3^p はディラック形のデルタ関数の強さを示す。式(5)、(6)より次式が得られる。

$$\nabla_{(2)}^4 W_1^s = W_3^p \dots\dots\dots (7)$$

これは、図1に示すような点荷重 $W_3^p(q)$ を伴う薄板の変位 W_1^s を求める式とほとんど同じものである。つ

(a) Given points and boundary

(b) Obtained surface

(c) Sum of curvatures

Fig.1 Fictitious thin plate for interpolation

まり、いくつかの点で薄板の変位 W_1^s が与えられており、未知の点荷重の値 W_3^p を逆に求めて、補間が行われている。ただし、図1(c)に示すように薄板のふちでモーメントに相当する W_2^s が零と置かれている⁽⁴⁾。式(5)、(6)を境界積分方程式を用いて解く。その際、下記の調和関数および重調和関数を用いる⁽⁴⁾。

$$T_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1}{r} \right) + A \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$T_2(P, Q) = \frac{r^2}{8\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1}{r} \right) + A + 1 \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 A は任意の定数であり $A=0$ としてもよい。式(9)の重調和関数は、下記の薄板スプライン S と同等の関数である⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$S(P, Q) = r^2 \ln(r) \dots\dots\dots (10)$$

すでに示した論文⁽⁴⁾では、これらの事柄を一般化して示している。なお、一次元の場合の調和関数および重調和関数は以下になる。

$$T_1(P, Q) = \frac{r}{2} \dots\dots\dots (11)$$

$$T_2(P, Q) = \frac{r^3}{8} \dots\dots\dots (12)$$

点荷重 W_3^p の数を M とすると、式(5)、(6)より次式の境界積分方程式が得られる⁽⁴⁾。

$$c W_1^s(P) = - \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_r \left\{ T_f(P, Q) \frac{\partial W_f^s(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial n} W_f^s(Q) \right\} d\Gamma - \sum_{m=1}^M T_2(P, q) W_{3(m)}^p \dots\dots\dots (13)$$

滑らかな境界上では $c=0.5$ であり、内点では $c=1$ である。同様に、式(6)より次式が得られる。

$$c W_2^s(P) = \int_r \left\{ T_1(P, Q) \frac{\partial W_2^s(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} W_2^s(Q) \right\} d\Gamma + \sum_{m=1}^M T_1(P, q) W_{3(m)}^p \dots\dots\dots (14)$$

連立積分方程式(13)、(14)を離散化し、未知の W_3^p などを求める⁽⁴⁾。

2・2 数値積分法 任意境界形状内で定義された

関数の数値積分方法を示す。関数 W_1^s を式(5)、(6)で補間した後、次式で与えられる高次の関数 F_f を導入する。

$$\nabla^2 F_f = F_{f-1} \dots\dots\dots (15)$$

関数 W_1^s は式(5)、(6)を満足しているので、式(15)およびグリーンの定理より次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_a F_1(p, q) W_1(q) d\Omega \\ &= \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_r \left\{ F_{f+1}(p, Q) \frac{\partial W_f^s(Q)}{\partial n} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial F_{f+1}(p, Q)}{\partial n} W_f^s(Q) \} d\Gamma \\ + \sum_{m=1}^M F_3(p, q) W_{3(m)}^p(q) \dots\dots\dots (16)$$

式(16)に用いられる n 次元の高次関数 F_f は、式(15)より次式で求めることができる。

$$F_f = \int \frac{1}{r^{n-1}} \left[\int r^{n-1} F_{f-1} dr \right] dr \dots\dots\dots (17)$$

次に、具体的に関数 F_f の例を示す。二次元の場合で、次式の特異性を含む関数の場合を考える。

$$F_1(p, q) = \frac{1}{r^k} \quad (k \neq 2, 4 \text{ 実数}) \dots\dots\dots (18)$$

式(18)の k は実数であり、式(18)を式(17)に代入すると、数値積分に必要な関数が以下のように得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(k-2)^2 r^{k-2}} \dots\dots\dots (19)$$

$$F_3 = \frac{1}{(k-2)^2 (k-4)^2 r^{k-4}} \dots\dots\dots (20)$$

式(19)を外向き単位法線 n に関する偏微分を行うと次式が得られる。

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{-1}{(k-2)r^{k-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (21)$$

式(18)において $k=0$ とすると、 $F_1=1$ となり式(1)は次式となる。

$$\int_{\Omega} W_1^s(q) d\Omega \dots\dots\dots (22)$$

これは、すでに示した数値積分の公式と一致する⁽³⁾。また、 k は負の値をとることもできる。また、 $k>2$ の場合、観測点 p は領域の内部にとることはできない。なお、 $k=2$ の場合は

$$F_1(p, q) = \frac{1}{r^2} \dots\dots\dots (23)$$

となり、式(23)を式(17)に代入すると、数値積分に必要な関数が得られる。

$$F_2 = \frac{1}{2} [\ln(r)]^2 \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \ln(r) \dots\dots\dots (25)$$

$$F_3 = \frac{r^2}{16} [2\{\ln(r)\}^2 - 4\ln(r) + 3] \dots\dots\dots (26)$$

観測点 p は領域の内部にとることはできない。

二次元の場合で、対数特異性を有する場合を考える。

$$F_1(p, q) = \frac{1}{r^k} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (k \neq 2, 4 \text{ 実数}) \dots\dots (27)$$

式(27)を式(17)に代入すると、数値積分に必要な関数が以下のように得られる。

$$F_2 = \frac{-1}{(k-2)^2 r^{k-1}} \left[\ln(r) - \frac{2}{2-k} \right] \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{(k-2)r^{k-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\ln(r) - \frac{1}{2-k} \right] \dots\dots (29)$$

$$F_3 = \frac{-1}{(k-2)^2 (k-4)^2 r^{k-4}} \left[\ln(r) - \frac{4(3-k)}{(2-k)(4-k)} \right] \dots\dots\dots (30)$$

次に偏微分項 $r_{,i}(\partial r / \partial x_i)$ を含む基本解の場合を示す。たとえば、基本解が

$$F_1 = \frac{1}{r^k} r_{,i} \quad (k \neq 1, 3, 5 \text{ 実数}) \dots\dots\dots (31)$$

で与えられる場合、式(18)~(20)を偏微分することにより高次の関数は次式のように得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(k-1)(k-3)r^{k-2}} r_{,i} \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{n_i}{r^{k-1}} \frac{1}{(k-1)(k-3)} - \frac{\partial r}{\partial n} \frac{r_{,i}}{(k-3)r^{k-1}} \dots\dots\dots (33)$$

$$F_3 = \frac{r^{-k+4}}{(k-1)(k-3)^2(k-5)} r_{,i} \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 n_i は境界に関する外向き単位法線の成分である。また、式(31)において $k=1$ の場合は

$$F_1 = \frac{1}{r} r_{,i} \dots\dots\dots (35)$$

となり、式(27)において $k=0$ とおいて式(27)、(28)、(30)を偏微分することにより、次式が得られる。

$$F_2 = -\frac{r}{4} r_{,i} \left[2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right] \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = -\frac{n_i}{4} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} \dots\dots\dots (37)$$

$$F_3 = -\frac{r^3}{64} r_{,i} \left[4 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + 5 \right] \dots\dots\dots (38)$$

対数特異性がある場合は、式(27)、(28)、(30)を偏微分することにより、次式が得られる。

$$F_1 = \frac{1}{r^k} r_{,i} \ln(r) \quad (k \neq 1, 3, 5 \text{ 実数}) \dots\dots (39)$$

$$F_2 = \frac{-r^{2-k} r_{,i}}{(k-1)(3-k)} \left[\ln(r) - \frac{1}{3-k} + \frac{1}{k-1} \right] \dots\dots\dots (40)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{r^{1-k}}{(3-k)} \left[\frac{-n_i}{(k-1)} \left\{ \ln(r) - \frac{1}{3-k} + \frac{1}{k-1} \right\} + r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \ln(r) - \frac{2}{3-k} + \frac{1}{k-1} \right\} \right] \dots\dots\dots (41)$$

$$F_3 = \frac{-r^{4-k} r_{,i}}{(k-1)(3-k)^2(5-k)} \left[\ln(r) + \frac{-13+3k}{(3-k)(5-k)} + \frac{1}{k-1} \right] \dots\dots\dots (42)$$

次に、偏微分項が次式のように二つ存在する場合を考える。

$$F_1 = \frac{1}{r^k} r_{,i} r_{,j} \quad (k \neq 0, 2, 4, 6 \text{ 実数}), \dots\dots\dots (43)$$

式(18)を2階偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F_1 = \frac{-k \delta_{ij}}{r^{k+2}} + \frac{k(k+2)}{r^{k+2}} r_{,i} r_{,j} \dots\dots\dots (44)$$

したがって、式(19)を2階偏微分した式と式(44)の第1項に関する項より次式が得られる。

$$F_2 = \frac{-2\delta_{ij}}{r^{k-2}k(k-2)^2(k-4)} + \frac{1}{k(k-4)r^{k-2}} r_{,i} r_{,j} \quad \dots\dots\dots (45)$$

同様に次式が得られる。

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{r^{1-k}}{k(k-4)} \left[\frac{2\delta_{ij}}{k-2} \frac{\partial r}{\partial n} + n_{j,i} r_{,i} + n_{i,j} r_{,j} - k \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,j} \right] \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$F_3 = \frac{-4\delta_{ij}r^{-k+4}}{k(k-2)^2(k-4)^2(k-6)} + \frac{1}{k(k-2)(k-4)(k-6)r^{k-4}} r_{,i} r_{,j} \quad \dots\dots\dots (47)$$

式(43)において $k=0$ の場合、次式となり

$$F_1 = r_{,i} r_{,j} \quad \dots\dots\dots (48)$$

式(27)～(30)より、次式が得られる。

$$F_2 = \frac{r^2}{32} [\delta_{ij} \{-4 \ln(r) + 3\} + 2r_{,i} r_{,j} \{4 \ln(r) + 1\}] \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{r}{16} \left\langle \frac{\partial r}{\partial n} [\delta_{ij} \{-4 \ln(r) + 1\} + 4r_{,i} r_{,j}] + (n_{i,j} r_{,j} + n_{j,i} r_{,i}) \{4 \ln(r) + 1\} \right\rangle \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$F_3 = \frac{r^4}{576} [\delta_{ij} \{-6 \ln(r) + 7\} - r_{,i} r_{,j} \{-12 \ln(r) + 5\}] \quad \dots\dots\dots (51)$$

偏微分項が次式のように三つ存在する場合

$$F_1 = \frac{1}{r^m} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \quad (m \neq -1, 1, 3, 5, 7 \text{ 実数}) \quad \dots\dots\dots (52)$$

同様に以下のように高次の関数を得ることができる。

$$F_2 = \frac{1}{r^{m-2}(m-5)(m+1)} \times \left[\frac{-2(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i})}{(m-1)(m-3)} + r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$F_3 = \frac{1}{(m+1)(m-1)(m-5)(m-7)r^{m-4}} \times \left[(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \frac{-4}{(m-3)^2} + r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{r^{1-m}}{(m-5)} \left[\frac{-2(\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i)}{(m-1)(m-3)(m+1)} + \left\{ (\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \frac{2}{(m+1)(m-3)} - r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} + (n_{i,j} r_{,k} + n_{j,i} r_{,k} + n_{k,i} r_{,j}) \frac{1}{(m+1)(m-3)} \right] \quad \dots\dots\dots (55)$$

式(52)において $m=1$ の場合

$$F_1 = \frac{1}{r} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \quad \dots\dots\dots (56)$$

となり、同様に以下のように高次の関数を得ることができる。

$$F_2 = \frac{r}{8} \left[(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \left\{ \ln(r) - \frac{5}{4} \right\} - r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{8} \left[(\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) \left\{ \ln(r) - \frac{5}{4} \right\} - (n_{j,k} r_{,i} + n_{i,k} r_{,j} + n_{k,i} r_{,j}) + \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \right] \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$F_3 = \frac{r^3}{576} [4(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \{\ln(r) - 5\} - r_{,i} r_{,j} r_{,k} \{12 \ln(r) + 1\}] \quad \dots\dots\dots (59)$$

次に、一次元の場合の式を示す。一次元の場合で、次式の特異性を含む関数の場合を考える。

$$F_1(p, q) = \frac{1}{r^k} \quad (k \neq 1, 2, 3, 4 \text{ 実数}) \quad \dots\dots\dots (60)$$

式(60)を式(17)に代入すると、数値積分に必要な関数が得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(k-1)(k-2)r^{k-2}} \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial n} = \frac{-1}{(k-1)r^{k-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$F_3 = \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)r^{k-4}} \quad \dots\dots\dots (63)$$

ただし $k > 1$ の場合、観測点 p は積分領域内に置くことができない。一次元の場合で、特異性を含む関数が次式で与えられる場合を考える。

$$F_1 = \frac{1}{r^k} \ln(r) \quad (k \neq 1, 2, 3, 4 \text{ 実数}) \quad \dots\dots\dots (64)$$

式(64)を式(17)に代入すると、数値積分に必要な関数が以下のように得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(k-1)(k-2)r^{k-2}} \left[\ln(r) - \frac{3-2k}{(k-1)(2-k)} \right] \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial n} = \frac{-1}{(k-1)r^{k-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\ln(r) - \frac{1}{1-k} \right] \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$F_2 = \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)r^{k-4}} \left[\ln(r) - \frac{50-70k-30k^2-4k^3}{(1-k)(2-k)(3-k)(4-k)} \right] \quad \dots\dots\dots (67)$$

なお、一次元の場合、すでにより数値積分法があり、本論文の方法の利点はない⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

(a) Internal points

(b) Arbitrary internal points

Fig. 2 Circular region

Fig. 3 Square region with heat generation

3. 計算例

本手法の利点が活用できる二次元の場合の数値積分の例を次に示す。図2(a)に示す半径 R の領域 Ω で の次式の数値積分を式(18)より求めた。

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{r\pi}{2R}\right) d\Omega \quad (68)$$

ただし、 r は円の中心からの距離である。半径 $R=10$ とした場合の厳密解は 40.0 であり、図2(a)の内点を用い、一定要素を用いた場合の数値積分値は 40.000 26 であり、誤差率は 0.000 65% であった。同様に、式

Fig. 4 Temperature distribution

Fig. 5 Temperature gradient

(27) において $k=0$ の場合の次の特異積分を計算した。

$$I = \int_{\Omega} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2} d\Omega \quad (69)$$

$R=10$ とした場合の厳密解は -243.88 であり、図2(a)のように内点を 127 点使用した数値積分値は -244.07 (誤差率 0.078%) であり、任意の内点 (78 点) を用いた図2(b)の場合は -243.2753 (誤差率 0.248%) であった。同様に、式(27)において $k=1$ の場合の次の特異積分を計算した。

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2} d\Omega \quad (70)$$

$R=10$ とした場合の厳密解は -40.563 15 であり、図2(a)の場合の数値積分値は -40.649 02 (誤差率 0.212%) であった。同様に、式(43)において $k=1/2$ の場合の次の積分を計算した。

$$I = \int_{\Omega} \frac{r_{,x} r_{,x}}{r^{1/2}} \frac{R^2 - r^2}{R^2} d\Omega \quad (71)$$

$R=1$ とした場合の厳密解は 1.196 797 201 であり、数

Table 1 Solutions in square region ($y=50$ mm)

x mm	Exact temp. °C	Obtained temp. °C	Exact temp. gradient °C/mm	Obtained temp. gradient °C/mm
5	7.9251	7.9251	15.7195	15.7167
10	15.6549	15.6537	15.1365	15.1339
15	22.9994	22.9968	14.1808	14.1784
20	29.7775	29.7739	12.8759	12.8737
25	35.8224	35.8178	11.2539	11.2521
30	40.9852	40.9798	9.3548	9.3533
35	45.1389	45.1327	7.2254	7.2243
40	48.1811	48.1744	4.9181	4.9173
45	50.0368	50.0299	2.4897	2.4893
50	50.6606	50.6536	0.0000	0.0000

値積分値は 1.201 112 (誤差率 0.36%) であった。

次に、図 3 に示す熱発生を伴う正方形領域の定常温度分布および温度こう配を境界要素法により求めた。ただし、熱発生分布 W_1 は次式で与えられるものとした。

$$W_1 = W_0 \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{y\pi}{L}\right) \dots\dots\dots (72)$$

辺の長さ $L=100$ mm として、外周の温度は 0°C とした。熱伝導率を λ とし、 $W_0/\lambda=0.1^\circ\text{C}\cdot\text{mm}^{-1}$ として計算した。温度を T とすると熱発生を伴う定常熱伝導の境界積分方程式は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$cT(P) = \int_r \left\{ T_1(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} d\Gamma + \frac{1}{2\pi\lambda} \int_s \ln\left(\frac{1}{r}\right) W_1 d\Omega \dots\dots\dots (73)$$

また、内点における x_i 方向の温度こう配は次式で得られる。

$$\frac{\partial T(p)}{\partial x_i} = \int_r \left\{ \frac{\partial T_1(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial^2 T_1(p, Q)}{\partial n \partial x_i} T(Q) \right\} d\Gamma + \frac{-1}{2\pi\lambda} \int_s \frac{1}{r} r_{,i} W_1 d\Omega \dots\dots\dots (74)$$

式(73)の領域積分は、式(27)において $k=0$ とおいて計算し、式(74)の領域積分は式(35)を使用し、一定要素を用いて解析した。図 4 に本手法により計算した温度分布と厳密解の比較を示し、図 5 には温度こう配の比較を示す。また、表 1 には具体的数値の比較を示す。さらに精度の高い解を得るには高次の要素を使用する必要がある。

4. 結 言

境界要素法における領域積分を、内部セル分割を使用せずに実行するための基礎式を誘導し、計算例によりその有効性を示した。積分公式が一般式で示されて

いるので、多くの分野で使用可能であると思われる。従来の境界要素法においては、非線形問題等では内部セルを用いていたために、有限要素法に比べてデータ作成が容易であるという利点が損なわれていた。本手法においても、内点は使用するが、内点を与えることは容易であり、しかも、本手法では任意位置にある内点を使用することが可能である。

文 献

- (1) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques—Theory and Applications in Engineering*, (1984), 46-70, Springer-Verlag.
- (2) Nowak, A. J. and Neves, A. C., *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publication (1994), 1-43, Southampton, Boston.
- (3) Partridge, P. W., Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, CMP, (1991).
- (4) 落合芳博, 多重調和関数を用いた補間および数値積分法, 日本応用数理学会論文誌, 8-4 (1998), 457-468.
- (5) Ochiai, Y. and Sekiya, T., Steady Heat Conduction Analysis by Improved Multiple-Reciprocity Boundary Element Method, *Eng. Anal. Boundary Elements*, 18 (1996), 111-117.
- (6) Ochiai, Y. and Kobayashi, T., Initial Strain Formulation without Internal Cells for Elastoplastic Analysis by Triple-reciprocity BEM, *Int. J. Nume. Mehtods Eng.* 50 (2001), 1877-1892.
- (7) Ochiai, Y. and Sekiya, T., Generation of Free-Form Surface in CAD for Dies, *Adv. Eng. Software*, 22 (1995), 113-118.
- (8) Micchelli, C. A., Interpolation of Scattered Data, *Constructive Approximation*, 2 (1986), 12-22.
- (9) Nira Dyn, (Chui, C. K., Schumaker, L. L. and Utreras, F. I., eds.) *Interpolation of Scattered Data by Radial Functions*, (1987), 47-61, Academic Press, London.
- (10) Davis, P. J. and Rabinowitz, P., *Methods of Numerical Integration*, (1984) 344-417, London, Academic Press.
- (11) Abramowitz, M. and Stegun, A., *Handbook of Mathematical Functions* (1970), 875-890, Dover, New York.