低重力環境における熱流体管理に関する研究*

(第1報, 熱流動解析に適した CCUP 法-TCUP 法-の提案)

姫野 武 洋^{*1}, 渡辺 紀 徳^{*2}

Thermo-Fluid Management under Low-gravity Conditions

(1st Report, TCUP Method for the Analysis of Thermo-Fluid Phenomena)

Takehiro HIMENO^{*3} and Toshinori WATANABE

^{*3} NAL/NASDA HOPE Joint Office,
7-44-1 Jindaiji Higashi-machi, Chofu-shi, Tokyo, 182-8522 Japan

To give appropriate assessment of thermo-fluid phenomena in the space applications under various gravity conditions, the algorithm of CCUP was restructured and expanded for the three-dimensional flows in the curved linear coordinate system. In the modified algorithm, called TCUP, not density but temperature was selected as the independent variable so that the heat transfer even in the incompressible flow field should be simulated adequately. In the present paper, both the supersonic flow field around a right circular cone and the natural convection in a square cavity were simulated with the developed code and the each of numerical results was compared with the theoretical solution or the benchmark result, respectively. Consequently, quite a good agreement was obtained between them.

Key Words: Fluid Management, Heat Transfer, Microgravity, Space Transportation, CFD, CIP Scheme

1. 緒 論

人間の日常的な活動領域が地球周回軌道上まで拡大するのに伴い, 宇宙輸送系の推進剤や軌道上構造物の冷却剤など, 低重力環境で流体を利用する機会は増加しつつある。軌道上では, 比重差を用いた流体の駆動を期待できず, 作動流体の熱流動特性が地上の場合と必ずしも同じでないため, 地上での経験に基づいて設計された流体機器が軌道上で予定通りの性能と運用を達成できない恐れがある。

低重力環境における液体搬送技術と熱管理技術を確立し, より合理的な流体管理を実現するには, そこで作動する流体機械の内部熱流動現象を定量的に予測できる知見と手法が求められる。実際, 様々な重力環境における単相および多相流体の熱流動特性を解明するため, 落下塔や航空機を用いた数多くの実験^[1,2]が行われている。しかし, これを実施できる機会は設備と費用の両面から限られているうえ, 獲得される重力環境の持続時間にも制約があり, 軌

道上で長秒時に亘り作動する流体機器の動作確認を行うには十分でない。

他方, 計算機性能の著しい向上に伴い, 単相流の計算流体力学(CFD)は, 理論と実験を補完する手段として, 様々な流体機械の設計に応用されている。多相流の分野でも, 経験的な構成方程式やモデルをできるだけ排除した数値解析手法^[3]の構築が試みられており, 複雑な流れへの応用も進みつつある。このような背景から, 地上では再現が困難な熱流動現象を数値的に模擬し, 軌道上における流体管理技術の確立に必要な知見を獲得することが強く求められている。

そこで本論文では, 低重力環境における広範な熱流動現象を適切に模擬できる数値解析手法の確立を目指し, 気液に関わらず様々な種類の流体を解析対象にできる CCUP 法^[4]を, 非圧縮流体の伝熱解析にも適用できる形へ再構築するとともに, 単相の熱流動問題に適用してその妥当性を検証する。筆者らは, 支配方程式の解法と気液両相の識別法として CCUP 法と Level Set 法^[5]を組み合わせた自由表面流の数値解析手法(CIP-LSM)^[6,7]を既に提案しているが, 本報の内容は, 解法部分のアルゴリズムを改良するとともに, 三次元一般曲線座標系へ拡張したものと位

* 原稿受付 2002 年 6 月 12 日。

^{*1} 正員, 宇宙開発事業団宇宙輸送システム本部(☎ 182-8522 調布市深大寺東町 7-44-1)。

^{*2} 正員, 東京大学工学系研究科(☎ 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)。

E-mail: himeno.takehiro@nasda.go.jp

置づけられる。なお、CIP-LSM の改良と検証については、次報⁹⁾で詳細に報告する。

2. おもな記号

ρ	: 密度	[kg/m ³]
p	: 圧力	[Pa]
T	: 温度	[K]
e	: 内部エネルギー	[J/kg]
h	: エンタルピ	[J/kg]
S	: エントロピ	[J/(kg·K)]
$\bar{u}$	: 速度	[m/s]
$\bar{g}$	: 重力加速度	[m/s ²]
$\bar{q}$	: 熱流束	[W/m ²]
C_p, C_v	: 定圧比熱および定積比熱	[J/(kg·K)]
γ	: 比熱比	[-]
C_s	: 音速	[m/s]
μ	: Joule-Thomson 係数	[K/Pa]
μ, λ	: 第1および第2粘性係数	[Pa·s]
k	: 熱伝導係数	[W/(m ² ·K)]
ξ, η, ζ	: 計算空間の座標	[m]
J	: ヤコビアン	[-]
∇	: ナブラ演算子	[1/m]

3. 数値解析法

宇宙輸送系の推進剤タンク内部では、常温と極低温の流体がしばしば共存し、熱交換に伴う体積変化を無視できないため、非圧縮を仮定した数値解法を用いて熱流動を解析するのは適切でない。他方、流動の速さは各相の音速と比べかなり遅く、硬直性の問題が生じるため、前処理⁹⁾をせずに圧縮性流体解法を適用することも難しい。また前述のように、本研究は自由表面流の解析を目指しており、界面の形状と運動を精度良く追跡しようとすれば、対流項の評価に数値的散逸の少ない高次精度スキームを適用すべきである。このような理想的でない流体を対象とするため、本論文では圧縮性を考慮しつつも、遅い流れ場を解くことのできる CCUP 法を採用し、非保存形 Navier-Stokes 方程式を、三次元一般曲線座標系で離散化して解くことにした。

3.1 支配方程式 流体粒子の運動と内部状態量の変化を記述した支配方程式を式 (1) ~ (3) に示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \bar{u}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \nabla : \Pi + \rho \bar{g}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) e = (\Pi : \nabla) \cdot \bar{u} - \nabla \cdot \bar{q}, \quad (3)$$

ここで Π は応力テンソルであり、Newton 流体を仮定した粘性応力テンソル T_v を用いて、

$$\Pi = -p\mathbf{I} + T_v, \quad (4)$$

$$T_v = \lambda(\nabla \cdot \bar{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T), \quad (5)$$

と表せる。また、 $\bar{q}$ は熱流束を表し、

$$\bar{q} = -k\nabla T \quad (6)$$

と仮定される。

3.2 CCUP 法の概要 上に示す支配方程式は、流体粒子の移動を表す対流項、運動量と熱エネルギーの無秩序な一様化を表す拡散項、そして音波による情報伝播を表す圧力項から成っており、これら各項の効果が釣り合うことによって流れ場が決まる。CCUP 法では、このような見方にに基づき、支配方程式の各項を、移流と拡散および音響の各フェーズに分別し、流れ場の変化を、図1に描くように、

- ・ 流体粒子の空間的移動に伴う変化
- ・ 運動量と熱の拡散に伴う状態量の等容変化
- ・ 音波の伝播に伴う状態量の等エントロピ変化

の3段階に分けて近似的に捉えようと、各フェーズの変化を順次計算し、全体として1時間刻みを構成する。以下では、計算の第 n 時間刻みにおける状態量 $\bar{Q}$ の変化について、それぞれのフェーズを経た後の値を、 $\bar{Q}^*$, $\bar{Q}^{**}$ および $\bar{Q}^{n+1}$ と表記するとともに、従来の呼称に倣い、拡散フェーズと音響フェーズをまとめて非移流フェーズと呼ぶ。

3.3 TCUP 法 従来の CCUP 法では、独立な状態量の組を $\bar{Q} = (\rho, p, \bar{u})^T$ と選ぶことが多く、その場合式 (3) 右辺の $\bar{q}$ を算出するのに必要となる T は、従属変数として状態方程式 $T = f(\rho, p)$ から見積もることになる。この組み合わせは、次式

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (7)$$

で定義される体膨張率 β_T が比較的大きい流体を対象として伝熱解析をする場合には問題を生じない。しかし、 β_T が非常に小さくほとんど熱膨張をしな

Fig.1 Algorithm of CCUP Scheme.

い流体を対象とする場合、計算の過程で ρ に僅かな数値的誤差が生じると、これが大きく増幅されて温度場に反映してしまう。 ρ が一定と仮定できるなら、

$$\rho C_v \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) T \right\} = (\Pi : \nabla) \cdot \bar{u} - \nabla \cdot \bar{q} \quad (8)$$

のように、式(3)を変形し、これより T を直接求めても (ρ, p, T) に対する拘束条件の過剰は生じないが、一般的な解決方法とは言えない。

そこで本論文では、CCUP法における独立な状態量の組を $\bar{Q} = (T, p, \bar{u})^T$ と変更し、 $\rho = f(T, p)$ と表現された状態方程式を介して ρ を間接的に算出することにした。以下、移流フェイズの説明に続き、変数の変更に伴って再構築される非移流フェイズのアルゴリズム(TCUP法: Thermo-CCUP法)を説明する。

3.3.1 格子配置 本手法では、支配方程式を三次元一般曲線座標系 (ξ, η, ζ) で記述し、図2に示すような、計算空間で体積が1の検査領域 Ω に関して有限体積的な離散化を施す。その際、座標変換のヤコビアンとメトリクスを Ω の幾何形状に関連付けて評価^[10]するとともに、各格子点を対応する Ω の重心に置き、整数の組 (i, j, k) を用いてその座標を参照する。状態量の配置としてはコロケート型^[11]採用し、 $\bar{Q}$ を格子点に集中して定義するとともに、その値を各 Ω に関する平均値だと意味づける。また、移流フェイズの計算で必要となる状態量の空間勾配値 $\bar{Q}_\xi, \bar{Q}_\eta, \bar{Q}_\zeta$ も格子点に定義する。

なお、必要に応じ、検査領域表面 $\partial\Omega$ の図心における速度 $\bar{u}_m$ を線形補間により算出し、この面に関する反変速度を、例えば ξ 方向について、

$$\frac{U_c}{J} = \bar{u}_m \cdot \left(\frac{\nabla \xi}{J} \right) \quad (9)$$

により計算して補助的に用いる。

3.3.2 移流フェイズの解法 流体粒子の並進的な移動に伴う流れ場の変化は、 $\bar{Q}$ の移流方程式

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{Q} = \bar{0} \quad (10)$$

で表現される。移流フェイズでは、この式を

Fig.2 Control Volume Ω and Metrics

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + U_c \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \eta} + W_c \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} = \bar{0} \quad (11)$$

のように、一般曲線座標系で記述し、各項の係数を凍結したうえでCIP法^[12]を適用する。具体的には、注目する格子点と風上側隣接7点の情報を使い、3次多項式で内挿補間された各物理量の空間分布を、

$$\bar{Q}^*(i, j, k) = \bar{Q}^n(i - U_c^n \Delta t, j - V_c^n \Delta t, k - W_c^n \Delta t) \quad (12)$$

に従って平行移動して、各状態量の値を更新する。

また、この一次導関数を利用して、 $\bar{Q}_\xi, \bar{Q}_\eta, \bar{Q}_\zeta$ の値も更新される。

CIP法は、各状態量の空間勾配値も記憶する必要があるものの、高次精度風上スキームながら、ある格子点の値を計算するのに隣接点の情報しか必要としない2点スキームの長所を併せ持っており、境界条件の設定と変更が容易である。この点は、次報に述べる自由表面流の数値解析で重要になる。

3.3.3 拡散フェイズの解法 続く非移流フェイズでは、流体粒子どうしの力学的および熱的な相互作用に伴う変化を計算する。非移流フェイズを通じた状態量変化は、局所熱平衡を仮定すれば、

$$\bar{Q}^{n+1} - \bar{Q}^* = \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial S} \right)_p \Delta S + \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \rho} \right)_S \Delta \rho \quad (13)$$

のように、流体粒子表面を通じた運動量と熱の交換に伴う拡散フェイズと、流体粒子の断熱的な圧縮膨張に伴う音響フェイズの変化に分けられる。

拡散フェイズには、支配方程式右辺の粘性項と伝熱項が関係し、その変化は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla : \mathbf{T}_v \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = (\mathbf{T}_v : \nabla) \cdot \bar{u} - \nabla \cdot \bar{q} \quad (16)$$

で表される等容変化($\rho^{**} - \rho^* = 0$)となる。まず、式(15)を検査領域について空間積分し、Gaussの発散定理を用いると、

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_v \cdot d\mathbf{S} \quad (17)$$

を得る。 $\mathbf{T}_v$ を $\bar{Q}^*$ により陽的に評価して、これを、

$$\frac{\rho^* (\bar{u}^{**} - \bar{u}^*)}{J \Delta t} = \left[\mathbf{T}_v^* : \frac{\nabla \xi}{J} \right]_{i-1/2}^{i+1/2} + \left[\mathbf{T}_v^* : \frac{\nabla \eta}{J} \right]_{j-1/2}^{j+1/2} + \left[\mathbf{T}_v^* : \frac{\nabla \zeta}{J} \right]_{k-1/2}^{k+1/2}$$

$$= \sum_{\xi=\xi, \eta, \zeta} \left[\mathbf{T}_v^* : \frac{\nabla \xi}{J} \right]_{-1/2}^{+1/2} \quad (18)$$

と離散化すると、直ちに速度変化を計算できる。なお、本論文では乱流を考慮していない。

次に、式(15)に $\bar{u}$ を乗じて式(16)に辺々加え、等容変化の条件(14)を用いて整理すると、

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_v : \bar{u}) - \nabla \cdot \bar{q} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t} \quad (19)$$

のように、散逸関数の項を積分形で表現できる。右辺第1項および第2項は、粘性散逸と熱伝導に伴う熱入力の時間あたり量を表す。 $\bar{q}$ を $\mathbf{T}_v$ と同様に、検査領域の各表面で定義すれば、右辺を Ω について空間積分した値は、

$$\sum_{\xi=\xi, \eta, \zeta} \left[(\mathbf{T}_v^* : \bar{u}_m^* - \bar{q}^*) \cdot \frac{\nabla \xi}{J} \right]_{-1/2}^{+1/2} - \frac{\rho^* (\bar{u}^{*2} - \bar{u}^{*2})}{2J\Delta t} \equiv \frac{\dot{\Theta}}{J} \quad (20)$$

と計算され、これを単位体積あたり $\dot{\Theta}$ と表せば、

$$\frac{(\rho C_p)^* (T^{**} - T^*)}{\gamma^* \Delta t} = \dot{\Theta} \quad (21)$$

により、熱入力に伴う温度変化を求められる。

最後に、拡散フェイズにおける圧力変化を求める。一般に、 e および h の変化は、

$$\Delta e = T\Delta S + \frac{p}{\rho^2} \Delta \rho = C_v \Delta T + \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T \Delta \rho \quad (22)$$

$$\Delta h = T\Delta S + \frac{\Delta p}{\rho} = C_p \Delta T - C_p \mu_J \Delta p \quad (23)$$

と記述できる。両式における第2表現は熱力学の第1法則と第2法則に対応し、第3表現は熱力学の相律に対応している。ここで、式(22)と(23)の辺々を引き、等容変化の条件を用いて整理すれば、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\rho C_p}{(\rho C_p \mu_J + 1)} \quad (24)$$

の関係を導くことができる。従って、圧力変化は、

$$p^{**} - p^* = \frac{\gamma^* - 1}{\gamma^*} \cdot \frac{(\rho C_p)^*}{(\rho C_p \mu_J + 1)^*} \cdot (T^{**} - T^*) \quad (25)$$

と定まり、式(18)および(21)と併せて、拡散フェイズを経た後の状態量 $\bar{Q}^{**}$ を算出することができる。

3.3.4 音響フェイズの解法 音響フェイズには、支配方程式右辺の圧力項と重力項が関係し、その変化は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \bar{u}, \quad (26)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \bar{g}, \quad (27)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -p \nabla \cdot \bar{u}, \quad (28)$$

によって記述される。この過程は等エントロピ変化であるから、式(26)と(28)は音速を用いて、ともに、

$$\frac{1}{\rho C_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{u} \quad (29)$$

と変形される。この式の右辺を陰的に評価して CFL 条件を緩和し、両辺を Ω について空間積分するとともに、式(27)の関係をいれれば、次式、

$$\frac{p^{n+1} - p^{**}}{J(\rho C_s^2)^{**} \Delta t} = - \sum_{\xi=\xi, \eta, \zeta} \left[\left(\bar{u}_m^{**} - \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho_m^{**}} \Delta t \right) \cdot \frac{\nabla \xi}{J} \right]_{-1/2}^{+1/2} \quad (30)$$

のように、次の時刻 ($n+1$ 時刻) の圧力に関する連立一次方程式が得られる。今回は、不完全 LU 分解の前処理に伴う BiCG-STAB 法^{[13][14]}を用いて、この方程式を反復的に解き、圧力変化を算出している。

次に、式(30)との一貫性を保つべく、 Ω の各表面における加速を考え、例えば ξ 方向について、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_c}{J} &= (\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^{**}) \cdot \frac{\nabla \xi}{J} \\ &= \left(-\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho_m^{**}} + \bar{g} \right) \cdot \frac{\nabla \xi}{J} \Delta t \end{aligned} \quad (31)$$

のように、各面を通過する体積流量の増減を計算する。そのうえで、線形補間を用いて格子点における反変速度の変化を算出し、計算空間から物理空間への座標変換を行えば、対応する速度変化が求まる。

最後に、式(23)に等エントロピ変化の条件を課し、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s = \frac{\rho C_p}{(\rho C_p \mu_J + 1)} \quad (32)$$

の関係を導けば、既に求めた圧力変化を用いて、

$$T^{n+1} - T^{**} = \frac{(\rho C_p \mu_J + 1)^{**}}{(\rho C_p)^{**}} \cdot (p^{n+1} - p^{**}) \quad (33)$$

のように、温度変化を算出できる。こうして、式(30)および(31)と併せ、音響フェイズを経た後の状態量 $\bar{Q}^{n+1}$ を算出することができる。

なお、非移流フェイズにおける $\bar{Q}_\xi, \bar{Q}_\eta, \bar{Q}_\zeta$ の変化は、例えば ξ 方向について、

$$(\bar{Q}_\xi^{n+1} - \bar{Q}_\xi^*)_{\xi=i} = \frac{(\bar{Q}_\xi^{n+1} - \bar{Q}_\xi^*)_{\xi=i+1} - (\bar{Q}_\xi^{n+1} - \bar{Q}_\xi^*)_{\xi=i-1}}{2} \quad (34)$$

のように、対応する状態量変化の中心差分により計算され、移流フェイズの計算へ渡される。

3.3.5 物性値の構成方程式 以上に述べた TCUP 法のアルゴリズムを表1にまとめる。計算の過程で必要となる C_p, γ, C_s, μ_J など、流体の圧縮性に関する物性値は、以下の各式に状態方程式を代入すれば、 T および p の関数としてそれぞれ与えられる。

Table.1 Algorithm of TCUP (Thermo-CCUP).

Variant	$\vec{Q} = (T, p, \vec{u})^T$
Advection Phase : $\vec{Q}^n \rightarrow \vec{Q}^*$	
$\vec{Q}$	$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + U_c^n \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} + V_c^n \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} + W_c^n \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \zeta} = \vec{0}$
Diffusion Phase : $\vec{Q}^* \rightarrow \vec{Q}^{**}$	
$\vec{u}$	$\int_{\Omega} \rho^* \frac{\vec{u}^{**} - \vec{u}^*}{\Delta t} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_v^* : d\vec{S}$
T	$\frac{T^{**} - T^*}{\Delta t} = \frac{\gamma^*}{(\rho C_p)^*} \dot{\Theta}$
p	$\frac{p^{**} - p^*}{\Delta t} = \frac{\gamma^* - 1}{(1 + \rho C_p \mu_J)^*} \dot{\Theta}$
Acoustic Phase : $\vec{Q}^{**} \rightarrow \vec{Q}^{n+1}$	
p	$\int_{\Omega} \frac{p^{n+1} - p^{**}}{(\rho C_s^2)^{**}} dV = - \int_{\partial\Omega} \left(\vec{u}^{**} - \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{**}} \Delta t \right) \cdot d\vec{S}$
$\vec{u}$	$\frac{\Delta U_c}{J} = \left(- \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho_m^{**}} + \vec{g} \right) \cdot \frac{\nabla \xi}{J} \Delta t$
T	$T^{n+1} - T^{**} = \frac{(1 + \rho C_p \mu_J)^{**}}{(\rho C_p)^{**}} (p^{n+1} - p^{**})$

$$C_p(T, p) = \frac{\partial h(T, p_0)}{\partial T} - \int_{p_0}^p T \left\{ \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} dp \quad (35)$$

$$C_v(T, p) = C_p(T, p) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \quad (36)$$

$$C_s^2(T, p) = \frac{C_p(T, p)}{C_v(T, p)} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \gamma(T, p) \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad (37)$$

$$\mu(T, p) = - \frac{1}{\rho C_p} \left\{ \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p + 1 \right\} \quad (38)$$

但し、式 (35) により C_p を求める場合、状態方程式に加え、基準圧力 p_0 における h の温度依存性を実験式などに基づいて与える必要がある。

他方、 μ , λ および k など分子拡散に関する物性値は、既存の実験式を引用し、それぞれ T と p の関数として与える。なお、本論文では特に断らない限り、 $3\lambda = -2\mu$ という、Stokes の仮定を採用する。

3.3.6 まとめ T を直接的に解く TCUP 法は、移流フェイズと拡散フェイズをまとめて予測段階、音響フェイズを修正段階と見なせば、Projection 法^[15]に類似した計算手法とも見なせる。Projection 法に倣い、音響方程式(29)を満足する速度場で対流項を評価すべく、今回は移流フェイズの直前に音響フェイズを配しているが、各フェイズを解く順序の妥当性

については依然として議論の余地が残されている。

一方、TCUP 法の導出過程では、非圧縮流体や理想気体の仮定を先決的に用いず、必要な物性値の構成方程式を T と p の関数として表し、且つ状態方程式との一貫性を保っているため、様々な種類の実在流体を解析の対象にできるという従来の CCUP 法が持つ特長も失われていない。この点もまた、自由表面流の数値解析で重要になる。

4. 検証計算

ここでは、以上に説明した TCUP 法を適用して様々な単相の熱流動問題を解き、そのアルゴリズムと数値解の妥当性を検証する。

4.1 一次元衝撃波管 まず、移流および音響フェイズの計算で、支配方程式が適切に連立されていることを検証すべく、衝撃波管問題を解いた。

4.1.1 計算条件 計算領域は一辺 0.03 m の正方形断面を持つ長さ 1.00 m の直管であり、管の一端を原点として長手方向に x 座標を定義した。作動流体は理想気体に近似された非粘性の空気であり、初期条件で $x < 0.50$ m の高圧室側に 298.15 K, 8.0 atm, 低圧室側に 298.15 K, 1.0 atm の T と p を与えた。

解析対象とした管内の変化は一次元的だが、今回は、断面内に 9 点、長手方向に 100 点の格子点を等間隔に配置し、三次元の Euler 方程式を解いた。但し、衝撃波面における流体粒子の強い運動量散逸を表現し、解の数値的振動を抑制するため、

$$\lambda_a = -\rho \{ (\gamma + 1) L_a / 8 \}^2 \min(\nabla \cdot \vec{u}, 0) \quad (39)$$

と定義される改良 Neumann-Richtmyer 型人工粘性^[16]を付加し、 L_a を格子点間隔の 2 倍の長さに定めた。なお、計算領域の境界面では、 $\vec{Q}$ の値を直近の格子点から 0 次外挿する条件を課している。

4.1.2 計算結果 時間刻みを 7.0×10^{-6} sec とし、

Fig.3 Numerical Results of Shock Tube Problem Computed by TCUP; Density at $t = 7.0 \times 10^{-4}$ sec; Pressure Ratio set to be 8.0.

計算開始から 100 ステップ経過時における ρ の管内分布を図 3 に示す。図中, x 座標を横軸に取り, 計算結果および対応する理論解を二重丸と破線で描いた。衝撃波と接触面を挟んだ密度比に注目すると, 両者の間には良好な一致が認められる。不連続面がやや鈍って捕捉されているが, 衝撃波の伝播速度と接触面の移流速度は, ほぼ正しく再現されている。

以上の結果から, 連続式と運動量式および熱エネルギー式が互いに強く干渉する一次元非定常流れが, TCUP 法により適切に模擬されたと評価した。本手法は密度を直接的に扱っていないが, 各フェイズの温度変化と圧力変化を連続式および状態方程式と矛盾しないように注意深く関係づけることで, 密度変化をかなり正確に計算できることが確かめられた。

4.2 錐状流 次に, 物体適合格子を用いた場合として, 衝撃波を伴う正円錐周りの超音速流を解き, 支配方程式が三次元一般曲線座標系へ正しく変換されていることを検証した。

4.2.1 計算条件 今回は, 図 4 に示すような半頂角 $\varphi_c = 20.0 \text{ deg}$ の正円錐が, 静止大気中を超音速飛行する場合を想定した。周囲大気は理想気体の状態方程式に従う非粘性の空気であるとし, 静温と静圧を $T_\infty = 298.15 \text{ K}$, $p_\infty = 1.0 \text{ atm}$ と与え, 飛行 Mach 数 $M_\infty = 3.0$ かつ迎角 0.0 deg として模擬を行なった。

計算領域は, 円錐の表面に接する軸方向 1.14 m, 半径方向 0.58 m, 周方向 35 deg の空間であり, 軸方向と半径方向および周方向にそれぞれ $100 \times 100 \times 7$ 個の格子点を配置した。流れ場は軸対称であるが, 計算手法の検証のため, 周方向にも複数の格子点を配置して三次元の Euler 方程式を解いた。なお, 人工粘性に関するパラメータ L_a は, 格子点間隔の 2 倍の長さになるよう局所的に定めた。

3.3.1 項で述べたように, 本手法はセル中心法に基づく格子系を採用しており, 計算領域の境界面上には格子点が存在しないため, 境界面に接する Ω の表面で $\bar{Q}$ の値を与えて境界条件とする。ここでは, 円錐上流側の流入境界で $\bar{Q}$ を固定し, 流出境界で $\bar{Q}$ を格子点から 0 次外挿することで, 超音速の流出入条件を表した。他方, 円錐表面と周方向の境界では, T と p および境界面に平行な速度成分を直近の格子点から 0 次外挿し, 滑り壁条件が課されている。なお, 初期条件では, 流入境界と同じ状態の一樣流を計算領域全体に入力した。

4.2.2 計算結果 計算の時間刻みを $2.0 \times 10^{-6} \text{ sec}$ とし, 流れ場がほぼ定常状態に達した 20000 ステップ経過時の静圧分布を, 計算領域の子午断面内

Fig.4 Computational Domain and Grid System around a Right Circular Cone; $\varphi_c = 20.0 \text{ deg}$; 100×100 Stencils in a Meridian Section and 7 Stencils in Circular Direction.

Fig.5 Numerical Results of Supersonic Flow around a Right Circular Cone at Zero Angle of Attack; Contours of Static Pressure in a Meridian Section at the Steady State; $M_\infty = 3.0$.

Fig.6 Static Pressure as a Function of Vertical Angle Calculated by TCUP; $\varphi_c = 20.0 \text{ deg}$ and $M_\infty = 3.0$.

に描いた等高線で可視化して図 5 に示す。図中, 頂点から放射状に伸びる等圧線が描かれており, 頂点に付着した斜め衝撃波と, その下流に圧縮領域が確認できる。この条件に対する衝撃波角の厳密解^[17]は $\varphi_s^* = 29.6 \text{ deg}$ であり, これを破線で示して計算結果と比較すると, 両者の間に良好な一致を確認できる。

ここで説明の便宜上, 円錐頂点を原点に持ち, 軸方向に極を持つ球座標系を考える。そのうえで, 頂点から $0.3 \text{ m} < r < 0.7 \text{ m}$ の範囲に存在する全ての格子点について, p と φ 座標の関係を打点し, 実線で

描いた厳密解とともに示せば、図6を得る。これより、計算でも φ に対して一次元的に変化する錐状流の特徴が捉えられており、厳密解とも良く一致していると評価できる。但し、斜め衝撃波の付近で数値的振動の発生が認められており、人工粘性の与え方に改良の余地があると言える。

以上の結果から、TCUP 法のアルゴリズムが三次元一般曲線座標系へ問題なく拡張でき、これを用いて、流体粒子の運動と内部状態量の変化が互いに影響する流れ場を適切に模擬できる可能性が確かめられたと言える。

4.3 キャビティ内自然対流 次に、TCUP 法の拡散フェイズの妥当性を検証するために、二次元正方形容器内に発生する自然対流を数値的に模擬し、既存の数値解析結果と比較した結果を述べる。

4.3.1 計算条件 計算領域は、図7に示すような、一辺が $L=0.040$ m の二次元正方形容器であり、断面内に 100×100 個の格子点を配置した。作動流体は理想気体の状態方程式に従う空気であり、粘性と熱伝導性を考慮して Navier-Stokes 方程式を解いた。

計算領域の境界面では、 $\bar{u}$ に関して全ての壁を粘着壁とする条件を課し、 T に関して上下を断熱壁、左右を恒温壁とする条件を課した。今回は、右側を 283.15 K の低温壁とし、左右に $\Delta T=1.465$ K の温度差をつけて、左側を $283.15 + \Delta T$ K の高温壁とした。初期条件で容器内の流体は静止しており、温度と圧力は均一に $T_{ref}=283.15$ K および $p_{ref}=1.0$ atm と与えたうえで、計算開始と同時に $g=9.8$ m/s² の鉛直下向き重力加速度を加え、結果として圧力分布が発生するようにした。以上に述べた計算条件は、次式、

$$Ra = \frac{\beta_T g \Delta T L^3}{\alpha_T \nu} \quad (40)$$

で定義される Rayleigh 数の値が 1.0×10^4 となるように決められた。ここで、 α_T と β_T はそれぞれ作動流体の温度伝導係数と体膨張係数であり、ともに初期条件における値を代入した。

4.3.2 計算結果 自然対流が発達し、流れ場が定常に至った時点の様子を図8に示す。図は上から順に温度、水平方向速度成分、垂直方向速度成分の等高線を表している。各段の左側に TCUP 法を用いて計算された今回の結果を示し、右側に同条件で計算された Davis によるベンチマーク結果^[8]を示した。何れの結果でも、浮力に誘起された時計回りの循環流の発達が見て取れる。

ベンチマーク計算では、作動流体を非圧縮だと仮定したうえで、Boussinesq 近似を用い、次式

Fig.7 Grid System in a Square Cavity ; $L=0.040$ m ; 100×100 Stencils in the Vertical Section.

(a): Temperature ; Present and Benchmark.

(b): Horizontal Velocity ; Present and Benchmark.

(c): Vertical Velocity ; Present and Benchmark.

Fig.8 Natural Convection in a Square Cavity ; Contours of (a) Temperature, (b) Horizontal Velocity and (c) Vertical Velocity at the Steady State, Numerical Results Calculated by TCUP Compared with Benchmark^[8]; $Ra=1.0 \times 10^4$.

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \nabla : \Pi - \rho \beta_T (T - T_{ref}) \bar{g} \quad (41)$$

のように、重力項から浮力の効果のみを抽出して運動量式に加えている。他方、今回の計算では、式(2)に表したように、重力は運動量式に直接加えられており、下壁の存在が境界条件で表現された結果、

容器内に静水圧分布が形成されている。さらに、熱伝導に伴う温度分布が、状態方程式を介して密度分布を生じさせ、これが圧力分布と干渉した結果として流体が駆動され、浮力の効果が発生している。

図8より明らかなように、両者の結果が良好に一致していることから、TCUP法により圧力項と拡散項そして重力項が互いに干渉し合う熱流動現象を、適切に模擬できる可能性が示されたと評価できる。このように、重力を直接評価したうえで流れ場を安定に解析できることもまた、自由表面流の数値解析で要求される点である。

5. 結 言

本論文では、宇宙開発利用における熱流体管理技術の確立へ向け、自由表面流を解析対象とすることを視野に入れつつ、様々な重力環境に置かれた実在流体の熱流動現象を適切に予測および評価できる数値解析手法の構築を試みた。本手法の特徴としては、次の点を挙げることができる。

- (1) 三次元一般曲線座標系で記述された非保存形の Navier-Stokes 方程式を支配方程式とし、流体粒子の内部状態量に関する状態方程式と連立してこれを解く。格子系の生成はセル中心法に従い、状態量をコロケート位置に定義したうえで、各検査体積に関する支配方程式の離散化を、可能な限り有限体積的に行っている。
- (2) 従来の CCUP 法で用いられてきた独立な状態量の組合せを変更し、温度を直接解くアルゴリズムが再構築されている。その際、非圧縮流体や理想気体の仮定を先決的に用いていないので、必要な物性値が温度と圧力の関数として表現され、かつ状態方程式との一貫性を保つ限り、様々な種類の実在流体を解析対象にすることが可能である。

次に、開発した手法を用いて、一次元衝撃波管、三次元超音速錐状流、および二次元容器内自然対流を数値的に模擬した。ここで得られた結果を、理論解または既存の数値解と比較したところ、何れの問題についても、両者の間に良好な一致を確認できた。これらの結果から、次のような結論を得た。

- (3) 本手法は、密度を直接的に解いていないが、計算の過程で温度変化と圧力変化を連続式および状態方程式と可能な限り矛盾しないように関係づけることで、連続式と運動量式および熱エネルギー式が強く相互干渉し、比較的弱い衝撃波を伴う非粘性圧縮性流れ場を、三次元一般曲線座標系でも、適切に模擬できる。

- (4) 本手法は、粘性と熱伝導性および重力を考慮し、これらが互いに干渉して生じる自然対流現象を適切に模擬できる。その際、重力の評価に近似を用いず、運動量式に直接加えた場合でも、計算は安定に進行する。

TCUP法は自由表面流を解析する CIP-LSM の一部を構成するアルゴリズムであるが、単独でも様々な単相熱流動現象を解析できる可能性を有している。乱流モデルの組み込み、人工粘性の改良に加え、解法の適用限界を探るさらなる検証など、依然として課題は残されているが、多様な加速度環境における、広範なスケールと速度領域を伴う熱流動現象の解明に、本手法が役立てられることが期待される。

謝 辞

本論文を執筆するにあたり東京大学大学院(現・日立製作所)の村松誠二郎氏からは、多くの協力と有益な議論をいただいた。ここに記して筆者らの深い謝意を表する。

文 献

- [1] Antar, B. N. and Nuotio-Antar, V. S., "Fundamentals of Low Gravity Fluid Dynamics and Heat Transfer", CRC Press (1993), ISBN 0-8493-8913-5.
- [2] 小田原修 監修, "軌道上実験概論", 海文堂 (2000), ISBN 4-303-73410-1.
- [3] 功刀資彰, 機論 63-609, B (1997), pp.1576-1584.
- [4] Yabe, T. and Wang, P. Y., J. Phys. Soc. Japan, vol.60 (1991), pp.2105-2108.
- [5] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S. J., Comput. Phys. 114, (1994), pp.146-159.
- [6] 姫野武洋 渡辺紀徳, 機論 65-635, B (1999), pp.2333-2340.
- [7] 姫野武洋, 東京大学博士論文 (2001)
- [8] 姫野武洋 渡辺紀徳, 機論, B, 投稿中.
- [9] Choi, Y.H. and Merkle, C. L., J. Comp. Phys., vol.105, (1993) pp.207-223
- [10] 藤井孝蔵, "流体力学の数値計算法", 東京大学出版会 (1994), 7章, ISBN 4-13-062802-X.
- [11] Rhie, C. M. and Chow, W. L., AIAA J., vol.21 No.11 (1983), pp.1525-1532.
- [12] Yabe, T. and Takei, E., J. Phys. Soc. Japan, vol.57 (1988), pp.2598-2601
- [13] Van der Vorst, H. A., SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol.13 (1992), pp.631-644
- [14] 藤野清次, 張紹良, "反復法の数理", 朝倉書店 (1996), ISBN 4-254-11404-4.
- [15] Chorin, A. J., Math of Comput., vol.22 (1968), pp. 745-762.
- [16] 内海隆行, 功刀資彰, 張彦, CIPUS-A97 (1996), vol.3.
- [17] Sims, J. L., NASA SP-3004 (1964).
- [18] Davis, G., Int. J. Numer. Methods Fluids, vol.3 (1983), pp.249-264.