3次元一様等方性乱流の直接数値シミュレーションにおける
スペクトル法と高次精度差分法との比較*芳松 克則^{*1}, 石原 卓^{*2}, 金田 行雄^{*2}
中井 聡^{*3}, 西田 秀利^{*4}, 里 深信 行^{*4}Comparison of a Spectral Method with a Higher-Order Finite Difference
Method in Direct Numerical Simulations of Three-Dimensional
Homogeneous TurbulenceKatsunori YOSHIMATSU^{*5}, Takashi ISHIHARA, Yukio KANEDA,
Satoshi NAKAI, Hidetoshi NISHIDA and Nobuyuki SATOFUKA^{*5} Department of Mechanical Engineering, Doshisha University,
Kyotanabe-shi, Kyoto, 610-0321 Japan

A finite difference method (FDM) is easier and cheaper to use than a spectral method (SM) in flows with complicated geometry, but is inferior to a SM in both accuracy and resolution. In this paper, effects of both accuracy and resolution in a FDM on the quality of incompressible turbulent flow description were studied by comparing a SM with a FDM in direct numerical simulations (DNS) of the three-dimensional freely decaying homogeneous turbulence with 128^3 and 256^3 grids. We adopted the higher-order method of lines and Fourier spectral method as a FDM and a SM, respectively. The value of the kinematic viscosity was determined so that the minimum value of $K_{\max}\eta$ in time was about 2 in the SM with 256^3 grids. Here, $K_{\max}$ and η are the maximum resolved wavenumber and the Kolmogorov length scale, respectively. The statistical quantities, such as the total energy, the energy dissipation ratio, obtained by the higher-order method of lines were in good agreement with those by the SM. Furthermore, comparing their DNS fields, we found that the performance of the 4th-order method of lines with 256^3 grids was comparable to that of the SM with 128^3 grids in which the minimum value of $K_{\max}\eta$ in time was about 1.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Turbulent Flow, Three-dimensional Flow, Finite Difference Method, Spectral Method

1. 結 言

非圧縮性乱流の直接数値計算法として、スペクトル法や差分法などがよく用いられている。スペクトル法は高精度、高解像度であり、微分演算が正確である。一方、差分法は、一般にスペクトル法に比べ複雑な境界にも適用しやすく、計算量も小さいという利点がある。しかしながら、1階微分、2階微分を離散化したものの実効波数は、共に解析的な微分に対応する波数に比べ小さく、その差は高波数側で著しい。よって、精度だけでなく、解像度もスペクトル法より劣っている。したがって、高波数側の解像度の低下をはじめとする差分法に内在している誤差が、乱流 DNS に対して、どの程度影響を与えるのか、スペクトル法との比較を通じて理解し、差分法の信頼度を調べることは重要である。

宮内ら⁽¹⁾は、両手法が容易に適用できる最も簡単な流れの1つである非圧縮性流れにおける減衰性一様等方性乱流に対して、実験や格子点数 96^3 でのスペクトル法と、格子点数 64^3 での差分法とのエネルギー散逸率などの積分量、エネルギースペクトルなどに関する比較を行い、工学的実用計算における最適な非線形項、粘性項差分化手法の組み合わせについて検討を行った。しかしながら、彼らは、場そのものの比較を行っていない。そこで、本研究では、減衰性一様等方性乱流の DNS において、エネルギースペクトルや積分量のみならず、差スペクトルや場の相関を導入して、差分法とスペクトル法との系統的な比較を行い、差分法の信頼度を波数の関数として定量的に示す。なお、本研究では、差分法として、西田⁽²⁾による修正微分求積法(MDQ)と可変精度移流差分法を用いたコロケート格子での高次精度線の方法を採用した。また、スペクトル法として Fourier スペクトル法を用いた。我々の知る限り、場の比較も行い差分法の信頼度を調べる研究は他になく、これらの比較が差分法による乱流 DNS の更なる発展に寄与すると期待される。

* 原稿受付 2002年7月5日。

^{*1} 正員, 同志社大学工学部(☎610-0321 京田辺市多々羅都谷1-3)。^{*2} 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*3} ダイキン工業(株)(☎525-8526 草津市岡本町字大谷1000-2)。^{*4} 正員, 京都工芸繊維大学工芸学部(☎606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: kyoshima@mail.doshisha.ac.jp

Fourier スペクトル法での一様等方性乱流の DNS においては、基本周期箱の格子点数 N^3 から決まる切断波数 $K_{\max}$ より高い波数を切り捨てることで流体の無限自由度の縮約を行っている。この妥当性を測る指標として無次元量 $K_{\max}\eta$ (η : Kolmogorov 長さ) が用いられていて、Jiménez ら⁽³⁾は $K_{\max}\eta \sim 2$ が望ましいと提案した。この $K_{\max}\eta$ の DNS への影響は Eswaran and Pope⁽⁴⁾, Yamazaki ら⁽⁵⁾によって、統計的に定常な速度場をもつ加振のある一様等方性乱流に対して調べられてきた。Eswaran and Pope⁽⁴⁾は、 $N^3 = 32^3, 64^3$ の DNS で、 $K_{\max}\eta$ 依存性を調べた。その結果、 $K_{\max}\eta \sim 1$ ($K_{\max} = \lfloor \sqrt{2}N/3 \rfloor$) の解像度があれば、散逸スペクトルなどに対して十分な解像度を持っていることを見つけた。更に、 $K_{\max}\eta$ が 1 より小さくなると、DNS の結果 (例えば、散逸スペクトル) の劣化を見つけた。Yamazaki ら⁽⁵⁾は、 $N^3 = 128^3, 256^3$ の DNS で、 $K_{\max}\eta$ が 1 程度と 2 程度の場合の 20 渦回転時間にわたる長時間挙動に対して、低次だけでなく高次のモーメント、位相空間での軌道、差スペクトルや相関スペクトルなどを調べ比較した。その結果、低次の縦速度、横速度のモーメントなどはよく一致するけれども、高次モーメントは $K_{\max}\eta$ に敏感であり、位相空間での解の軌道は全く異なり、2 つの場の相関がほとんどないことを見つけた。

本研究で対象とする減衰乱流では、エネルギー散逸率が最大となる時間で、 $K_{\max}\eta$ が最小となる。Eswaran and Pope⁽⁴⁾の結果を考慮すると、スペクトル法で $\min\{K_{\max}\eta\} \sim 1$ (t : 時間) となる設定で、差分法を用いて乱流 DNS を行っても、その DNS の結果は高波数側での実効波数の低下により、十分な解像度を持ってないことが予想される。したがって、格子点数 $N^3 = 256^3$ のスペクトル法で $\min\{K_{\max}\eta\} \sim 2$ となる場合について、エネルギー散逸率などの積分量、エネルギースペクトル、場の相関や差スペクトルなどを調べ比較する。特に、何次精度の線の方法 ($N^3 = 256^3$) が、格子点数 $N^3 = 128^3$ でのスペクトル法 ($\min\{K_{\max}\eta\} \sim 1$) と同程度の結果を与えるのかを調べる。

2. 計 算 方 法

単位密度の非圧縮性流体の基礎方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は速度ベクトル、 p は圧力、 ν は動粘性係数である。座標系は直交座標系であり、 $(x, y, z) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ 。境界条件として、周期境界条件を用いる。

2.1 スペクトル法 Fourier スペクトル法を用いる。エリアジングエラーを、格子移動法において球状に波数 $k(> \lfloor \sqrt{2}N/3 \rfloor)$ を切断することにより除去した⁽⁶⁾。よって、解像される波数は $0 \leq k \leq \lfloor \sqrt{2}N/3 \rfloor$ である。時間積分法として、4 次の Runge-Kutta 法を用いた。

2.2 高次精度差分法 本研究では、西田⁽²⁾による等間隔のコロケート格子における高次精度線の方法を採用した。圧力勾配項、粘性項の離散化には、修正微分求積法 (MDQ) を、非線形項の離散化には可変精度移流差分法を用いた。

M 次精度の MDQ による空間微分項の離散化の例と、 M 次精度の可変精度移流差分法による非線形項の離散化の例を以下にあげておく。

$$\frac{\partial p}{\partial y}|_{\mathbf{x}_{i,j,n}} = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \Phi'_m(y) p|_{\mathbf{x}_{i,j+m,n}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}|_{\mathbf{x}_{i,j,n}} = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \Phi''_m(y) \mathbf{u}|_{\mathbf{x}_{i,j+m,n}}. \quad (4)$$

ただし、

$$\Phi_m(y) = \frac{\Pi(y)}{(y - y_{i,j+m,n})\Pi'(y_{i,j+m,n})}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi(y) &= (y - y_{i,j-M/2,n}) \\ &\cdots (y - y_{i,j,n}) \cdots (y - y_{i,j+M/2,n}). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{x}_{i,j,n} = (x_{i,j,n}, y_{i,j,n}, z_{i,j,n}) = (-\pi + 2\pi i/N, -\pi + 2\pi j/N, -\pi + 2\pi n/N)$, $(i, j, n = 0, \dots, N-1)$ である。

また、

$$\nu \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{\ell=1}^{M/2} c_{\ell} \bar{\nu}^y \frac{\delta_{\ell} u}{\delta_{\ell} y} |_{\mathbf{x}_{i,j,n}}, (\ell' = 2\ell - 1), \quad (7)$$

$$\bar{f}^{\ell} y|_{\mathbf{x}_{i,j,n}} = \frac{1}{2} (f|_{\mathbf{x}_{i,j+\ell'/2,n}} + f|_{\mathbf{x}_{i,j-\ell'/2,n}}), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^y|_{\mathbf{x}_{i,j\pm\ell'/2,n}} &= \sum_{m=1}^{M/2} c_{m'} \frac{1}{2} (v|_{\mathbf{x}_{i,j\pm\{\ell'+m'\}/2,n}} \\ &\quad + v|_{\mathbf{x}_{i,j\pm\{\ell'-m'\}/2,n}}), (m' = 2m - 1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\delta_{\ell} u}{\delta_{\ell} y}|_{\mathbf{x}_{i,j\pm\ell'/2,n}} = \frac{\pm 1}{\ell' \Delta y} (u|_{\mathbf{x}_{i,j\pm\ell',n}} - u|_{\mathbf{x}_{i,j,n}}). \quad (10)$$

なお、重み係数 c_j は MDQ 法と同様の手法で求めることができる。

また、時間積分については、部分段解法と 4 段階 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた。圧力に関する Poisson 方程式を解く際、緩和法として有理 Runge-Kutta 法を用い、更に収束を加速させるために可変精度多重格子法⁽⁷⁾を併用した。この際、圧力の平均 2 乗残差がある値 tol 未満になったときに収束したとみなすことにした。

最後に、 $N^3 = 256^3$ での MDQ による 1 階微分の実効波数 κ_f 、2 階微分の実効波数の自乗 κ_s^2 を図 1 に示

Fig. 1 Effective wavenumbers of MDQ: (a) κ_f , (b) κ_s^2 .

す。この図から、高波数側で、MDQによる1階微分、2階微分の実効波数と $N^3 = 256^3$ のスペクトル法が解像している波数とのずれが大きいことがわかる。

3. 結果の比較

Table 1 Numerical methods and conditions

Run	計算方法	N^3	Δt
FD4	4次精度線の方法	256^3	0.001
FD6	6次精度線の方法	256^3	0.001
FD8	8次精度線の方法	256^3	0.001
S256	スペクトル法	256^3	0.001
S128	スペクトル法	128^3	0.002

表1に挙げたDNSを行った。Run S256で $\min\{K_{\max}\eta\} \sim 2$ となるように動粘性係数 ν を $\nu = 0.0018$ に設定した。各RunのCourant数 $(|u| + |v| + |w|)\Delta t/\Delta x$ は、時間と共に変動するが、DNSを実行した時間 t の範囲内($0 \leq t \leq 8$)では0.1~0.2であった。ここで、 $\Delta x = 2\pi/N$ で格子幅を表す。初期値はエネルギースペクトル $E(k)$

$$E(k) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} u_0^2 k_p^{-5} k^4 \exp \left\{ -2 \left(\frac{k}{k_p} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

を持つランダム位相の非圧縮性の速度場を $N^3 = 128^3$

で発生したものをRun S128に、これを $N^3 = 256^3$ に拡張したものを他のRunに用いた。なお、 $u_0^2 = 1/3$ 、 $k_p = 2$ 。初期Taylor長Reynolds数は $R_\lambda = 321$ で、初期の渦回転時間は2.4である。

また、Run FD4, FD6, FD8でのPoisson方程式の収束条件は $\text{tol} = 1.0 \times 10^{-6}$ とした。これは、図2の差スペクトル $\tilde{\Delta}(k)$ より、十分な設定であることが分かる。ここで、差スペクトル $\tilde{\Delta}(k)$ は $\text{tol} = 1.0 \times 10^{-7}$ での8次精度線の方法によって得られた波数空間での速度場 $\tilde{\mathbf{u}}^{(r)}$ と $\text{tol} = 1.0 \times 10^{-8}$ のものとの差 $\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(r)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(r)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(8)}$ を用いて、

$$\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{2} \sum_{q \sim k} |\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(r)}(\mathbf{q})|^2, \quad (12)$$

で定義されたものである。ただし、 $\sum_{q \sim k}$ は $k - 1/2 < |\mathbf{q}| \leq k + 1/2$ をみたす球殻での波数ベクトル $\mathbf{q}$ に関する和を表す。参考までに $\text{tol} = 1.0 \times 10^{-8}$ でのエネルギースペクトル $E(k)$ を図2に細実線($\text{tol} = 10^{-8}$)で示している。なお、 $E(k)$ は

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{q \sim k} |\tilde{\mathbf{u}}^{(8)}(\mathbf{q})|^2, \quad (13)$$

で定義される。

Fig. 2 Difference spectrum for velocity fields $\tilde{\Delta}(k)$ at $t = 8$.

3.1 空間積分量 エネルギー散逸率 ε 、エンストロフィー生成率 S といった空間積分量は

$$\varepsilon = -\nu \langle \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \rangle, \quad (14)$$

$$S = -\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p) \rangle, \quad (15)$$

で表される。ただし、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ であり、 $\langle \cdot \rangle$ は空間平均を表す。非線形項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ の離散化には可変精度移流差分法を、他の微分項の離散化にはMDQを用いた。図3(a)においては、全ての線が重なり、エネルギー散逸率はとてもよい一致を示している。また、エネルギー

Fig. 3 Statistical quantities: (a) ϵ , (b) S .

$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$ も良い一致を示した。実際、両者とも Run S256 と他の Run との値の違いは 1% もなかった。しかしながら、図 3(b) に示されているように、エンストロフィー生成率に関しては Run FD4 と S256 との違いが見てとれる。しかし、その違いは MDQ の精度を上げれば小さくなった。

Fig. 4 Energy spectrum $E(k)$ at $t = 8$.

3.2 エネルギースペクトル 図 4 は、Run S256, S128 と FD4 による時刻 $t = 8$ でのエネルギースペク

トル $E(k) = 1/2 \sum_{q \sim k} |\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}(\mathbf{q})|^2$ を表している。ここで、 $\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}$ は Run ζ により得られた波数空間での速度場を表す。図 4 が示すように、Run S256 と FD4 によるエネルギースペクトルは高波数側でやや違いがみられるものの非常によく一致している。また、Run S128 によるエネルギースペクトルもそれが定義されている範囲では Run S256 によるものと非常によく一致している。

Fig. 5 Difference spectrum for velocity fields $\Delta(k)$: (a) $t = 4$, (b) $t = 8$.

3.3 速度場の差スペクトル・相関 各 Run で得られた場にどれくらい違いがあるかみるために、Run S256 と他の Run の波数空間での速度場の差 $\delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} - \hat{\mathbf{u}}^{(\text{S256})}$ から定義される差スペクトル

$$\Delta(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{q \sim k} |\delta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, t)|^2, \quad (16)$$

と、2つの Run による速度場の相関

$$C(k, t) = \frac{E^{(\zeta, \zeta)}(k, t)}{[E^{(\zeta, \zeta)}(k, t) E^{(\zeta, \zeta)}(k, t)]^{1/2}} \quad (17)$$

とを考える。ここで、

$$E^{(\zeta, \zeta)}(k, t) = \frac{1}{4} \sum_{q \sim k} \langle \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}(\mathbf{q}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}(-\mathbf{q}, t) \rangle + \text{c.c.}, \quad (18)$$

Fig. 6 Correlation spectrum for velocity fields $C(k)$:
(a) $t = 4$, (b) $t = 8$.

で、 $\xi = S256$ である。また、c.c. は複素共役を表す。差スペクトルは、時間の経過と共に、高波数側より大きくなっていくことが、図5から見て取れる。更に、図6から時間が経過するにつれ、速度場の相関は高波数側から悪くなっていくことが分かる。なお、参考のため図5に、Run S256によるエネルギースペクトルを細実線(S256)で示している。

次に、差場の成長を特徴づける量として無次元量

$$\Lambda(t) = \frac{\int_0^{N/2} \Delta(k) dk}{\int_0^{K_{\max}} E_{S256}(k) dk} \quad (19)$$

を導入する。ここで、 $E_{S256}(k)$ は Run S256 によって得られるエネルギースペクトルで、 $K_{\max} = 120$ である。 $\Lambda(t)$ の時間発展は図7のようになる。図3(a)で表されているエネルギー散逸率がほぼ最大になる、すなわち Run S256 で $\min\{K_{\max}\eta\} \sim 2$ になる時刻 $t \sim 4$ から $\Lambda(t)$ が急速に発展していることがわかる。

よって、 $\Delta(k)$, $C(k)$, $\Lambda(t)$ より、Run FD4 と S128 が同程度の結果を与えることがわかった。また、線の方法の精度を上げれば、 $\Delta(k)$, $\Lambda(t)$ が小さくなること、相関が良くなることも確認できた。

Fig. 7 Growth of difference fields $\Lambda(t)$.

3.4 圧力場の差スペクトル・相関 同様に、Run S256 での圧力場 $\hat{p}^{(S256)}$ と他の Run ξ の波数空間での圧力場 $\hat{p}^{(\xi)}$ の差スペクトルを

$$\Delta_p(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{q \sim k} |\delta \hat{p}(\mathbf{q}, t)|^2, \quad (20)$$

と定義する。ここで、 $\delta \hat{p} = \hat{p}^{(\xi)} - \hat{p}^{(S256)}$ である。また、圧力場の相関も

$$C_p(k, t) = \frac{E_p^{(\xi, \xi)}(k, t)}{[E_p^{(\xi, \xi)}(k, t) E_p^{(\xi, \xi)}(k, t)]^{1/2}}, \quad (21)$$

と表す。ただし、

$$E_p^{(\xi, \xi)}(k, t) = \frac{1}{4} \sum_{q \sim k} \langle \hat{p}^{(\xi)}(\mathbf{q}, t) \cdot \hat{p}^{(\xi)}(-\mathbf{q}, t) \rangle + \text{c.c.} \quad (22)$$

時刻 $t = 4, 8$ での $\Delta_p(k)$ と $C_p(k)$ をそれぞれ図8, 9に表す。速度場のそれらと、同じ傾向をもっていることが見てとれる。なお、参考のため図8に Run S256 による圧力スペクトルを細実線(S256)で示している。

4. 結 言

減衰性一様等方性乱流における、Fourier スペクトル法と高次精度線の方法の比較を行った。スペクトル法 ($\min\{K_{\max}\eta\} \sim 2, N^3 = 256^3$) を基準に、4次、6次、8次精度の線の方法 ($N^3 = 256^3$) とスペクトル法 ($\min\{K_{\max}\eta\} \sim 1, N^3 = 128^3$) との性能を比較した。エネルギー、エネルギー散逸率、エネルギースペクトルも良い一致を示した。しかし、速度場に関しては、時間の経過と共に、高波数側から差スペクトルが増大していき、速度場の相関も高波数側から悪くなっていくことが分かった。圧力場の差スペクトル、相関に関しても、速度場のそれらと同じ傾向をもつことも分かった。さらに、図4, 5(b), 6(b)及び、積分量の時間変化から、4次精度線の方法 ($N^3 = 256^3$) が、スペクトル法 ($\min\{K_{\max}\eta\} \sim 1$,

Fig. 8 Difference spectrum $\Delta_p(k)$ for pressure fields: (a) $t = 4$, (b) $t = 8$.

$N^3 = 128^3$) と、後者が解像していない波数での挙動を除き、ほぼ同程度の結果を与えることが分かった。差分の精度を上げれば、スペクトル法 ($\min\{K_{\max}\eta\} \sim 2$, $N^3 = 256^3$) の結果に近づくことも確認した。

より大きな格子点数での乱流 DNS が必要な慣性小領域がある乱流場に対する差分法とスペクトル法との比較は、今後の課題である。

謝 辞

数値計算は名古屋大学大型計算機センターの VPP5000/64 を用いて行われた。本研究は日本学術振興会未来開拓事業プロジェクト JSPS-RFTF97P01101 の援助のもとで行われた。また、本研究は著者の一人(芳松)が名古屋大学在籍中に行われた。貴重な議論をして頂いた名古屋大学の石井克哉教授、吉田恭博士ならびに山崎陽介氏に感謝いたします。

文 献

- (1) 宮内敏雄・平田徹・店橋護, 高次精度差分法による三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較), 機論, 61-592, B(1995), 4400-4405.

Fig. 9 Correlation spectrum for pressure fields $C_p(k)$: (a) $t = 4$, (b) $t = 8$.

- (2) Nishida, H., Higher Order Direct Numerical Simulations of the Incompressible Navier-Stokes Equations Using a Variable Order Method of Lines, *Computational Fluid Dynamics Journal*, Special Number, (2001), 598-604.
- (3) Jiménez, J., Wray, A. A., Saffman, P. G. and Rogallo, R. S., The Structure of Intense Vorticity in Isotropic Turbulence, *J. Fluid Mech.* **255**, (1993), 65-90.
- (4) Eswaran, V. and Pope, S. B., An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulations of Turbulence, *Computer & Fluids* **16**, (1988), 257-278.
- (5) Yamazaki, Y., Ishihara, T. and Kaneda, Y., Effects of Wavenumber Truncation on High-Resolution Direct Numerical Simulation of Turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, (2002), 777-781.
- (6) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics* Springer-Verlag, (1988).
- (7) Nishida, H. and Satofuka, N., Automatic Higher-Order Multi Grid Method and Its Application, *Memo. of Faculty of Eng. & Design, Kyoto Institute of Technology*, **36**, (1987), 24-35.