垂直衝撃波を通過する微粒子挙動の数値的研究*

(第1報, 定常衝撃波を通過する場合)

篠原 洋平*¹, 戸田 和之*², 山本 誠*²Numerical Investigation of Behaviour of Small Particle
Passing through Normal Shock Wave
(1st Report, In Case of Steady Shock Wave)Youhei SHINOHARA, Kazuyuki TODA and Makoto YAMAMOTO*³^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601 Japan

Measuring techniques such as Laser Doppler Anemometry (LDA), Particle Image Velocimetry (PIV), Particle Tracking Velocimetry (PTV) and Holographic Particle Image Velocimetry (HPIV) depend on the velocity information obtained from a micron-sized particle traveling in a fluid. The traceability of these particles to any velocity changes in a flow field is one of the key assumptions, in applying such techniques. However, in the flow field with large velocity gradient, this assumption would become improper. This paper shows a numerical investigation for the motion of tracer particles in the presence of steep velocity gradient across a steady shock wave. Various particles with different radius and density are taken into account. The particle motions are simulated by using Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) equation. The contribution of each term in the equation to particle behaviour is investigated. The results indicate that the non-dimensional settling length can be estimated only from the particle diameter.

Key Words: Laser Doppler Velocimeter, Shock Wave, Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis

1. 緒 論

レーザドップラー流速計(LDV), パーティクルイメージ流速計(PIV), パーティクルトラッキング流速計(PTV), そしてホログラフィック PIV などの流速計では, 流体中の微小粒子(トレーサ粒子)と局所的な流体の速度が同一であることが計測上の前提であり, 微小粒子の追従性が計測精度上きわめて重要である. 一般に, 流体の速度分布が穏やかで十分小さな粒子が使用される場合, 微小粒子の追従性に起因する誤差はほとんど問題とはならないと考えられている. しかしながら, 衝撃波のような大きな速度こう配を含む高速流を測定する際には, 微小粒子の追従性にかかわる計測誤差が生じ, 粒子密度, 粒子直径分布等を考慮したデータの補正が必要となっている. Tedeschi, Gouin-Elena⁽¹⁾, Thomas⁽²⁾ や Maxwell-Seasholtz⁽³⁾ により粒子直径, 粒子密度あるいはそれらの分布を考慮した研究が行われているが, 前二者は衝撃波がきわめて薄い場合, 流体場の速度こう配の効果を無視できると仮

定したもの, または双曲線正接関数を用いて流体速度分布を表したものであり, 計算に用いた値が衝撃波内部の情報を正確に表していないと考えられる. 後者は B.B.O. 方程式の抗力項のみを考慮することにより粒子軌道計算を行っており, 衝撃波付近で作用するさまざまな力の効果をまったく考慮していない. また, Maurice⁽⁴⁾ により CFD 結果を用いた計測データ補正法の研究も報告されているが, 衝撃波厚さの格子依存性を考慮していないため妥当な補正法であるとはいえない. したがって, 衝撃波を含む流れ場の計測において, 計測誤差の大きな領域を決定したり, 計測データに妥当な補正を加える手法は, いまだに確立しているとはいえない状況にある.

以上をかんがみ, 本研究では, 衝撃波内部の流体速度分布を正確に表せる弱衝撃波理論を用いて得た定常垂直衝撃波を微粒子が通過する際の挙動と流体場への追従性をシミュレートし, 異なる密度, 直径を有する微粒子の挙動を調べることににより, 粒子特性の効果を数値的に明らかにすることを目的とする. なお, 第2報においては, 垂直衝撃波が振動している場合の粒子挙動を考える.

* 原稿受付 2002年9月10日.

^{*1} 東京理科大学大学院(〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3).^{*2} 正員, 東京理科大学工学部.

E-mail: yamamoto@rs.kagu.tus.ac.jp

2. おもな記号

- x_i : デカルト座標
 u_i : x_i 方向流体速度成分
 v_i : x_i 方向粒子速度成分
 m : 質量
 a : 粒子半径
 M : マッハ数
 μ : 流体の分子粘性
 ν : 流体の動粘度
 γ : 気体の比熱比
 ρ : 密度
 ϕ : 抗力係数
 Pr : プラントル数
 τ_p : 粒子の拡散時間
 Re : レイノルズ数
 添 字
 f : 流体
 p : 粒子
 1: 衝撃波上流の値
 2: 衝撃波下流の値

3. 微粒子挙動解析

トレーサ粒子を用いた流速計では流体中の微小粒子の速度を計測して流体速度を決定しているため、流れ場の解析には、二相流的な考え方が必要となる。数値計算における各相間の取扱いは、連続相(流体)と分散相(粒子)の干渉の強さによって One-Way Coupling と Two-Way Coupling に分類できる。本研究では、LDV 測定におけるトレーサ粒子挙動を対象としており、分散相である粒子の質量混合比が小さく流体場には影響を与えないと仮定し、One-Way Coupling を用いて粒子挙動をラグランジュ法により求める。

流体中で運動する微小粒子の運動状態を表すためにさまざまな式が提唱されており⁽⁵⁾、いずれも B.B.O. 方程式にわずかばかりの変更を加えたものである⁽⁶⁾⁽⁷⁾。本研究では、最も厳密な考察がなされ、かつ一般的に使用されている Mei⁽⁵⁾ の提案した粒子の運動方程式を用いる。この運動方程式は以下のように記述される。

$$\begin{aligned}
 m_p \frac{dv_i}{dt} = & (m_p - m_f)g_i + m_f \frac{Du_i}{Dt} \\
 & - \frac{1}{2} m_f \left(\frac{dv_i}{dt} - \frac{Du_i}{Dt} - \frac{1}{10} a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \\
 & - 6\pi a \mu \phi \left(v_i - u_i - \frac{1}{6} a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 6\pi a^2 \mu \int_0^t d\tau \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[v_i - u_i - \frac{1}{6} a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right] \right\} \\
 & + F_{etc} \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

粒子速度と粒子位置の関係は次のようになる。

$$\frac{dx_{pi}}{dt} = v_i \dots \dots \dots (2)$$

また、粒子質量と流体質量は、粒子を球形と考えると、次式で表すことができる。

$$m_p = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p, \quad m_f = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_f \dots \dots \dots (3)$$

粒子の抵抗係数 ϕ は、粒子半径と周囲の流体との相対速度により定まる粒子レイノルズ数 Re_p を用いて次のように表される。

$$Re_p = \frac{2a|u_i - v_i|}{\nu} \dots \dots \dots (4)$$

$$\phi = 1 + 0.15 Re_p^{0.687} \dots \dots \dots (5)$$

なお、 d/dt は粒子の時間に対する全微分を表し、 D/Dt は流体要素の時間に対する全微分を表している。流体相はオイラー的に扱うため、右辺第2項を以下の形に書き換えることができる。

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \dots \dots \dots (6)$$

式(1)が示す物理的意味は以下のとおりである。右辺第1項は質量力(重力・浮力)、第2項は粒子が排除する流体に働く流れ場の圧力こう配による作用である。第3項は、付加質量により生じる力。第4項は流体と粒子の速度差より生じる抗力。第5項は Basset 履歴項と呼ばれる粒子運動の履歴に関する項である。この項は、時刻0から t までの間に粒子の速度が変化したことによって流体が得た総運動量の時間的変化を示すものである。Basset 力は一般的には微弱な力であり、実用的な粒子運動の解析では省略されることが多いが、本研究ではその影響を他の項と比較するため考慮に入れている。第6項はその他の力(Suffman 力、温度こう配力、電磁力等)による効果である。また、付加質量項、抗力項、Basset 履歴項に含まれている流体速度の2階微分は Faxen 項と呼ばれ、各項の低レイノルズ数補正を表している。なお、本研究で用いられたような流体場、粒子条件では、質量力(第1項)および、その他の力(第6項)の影響は小さく、省略することができる。

本研究における微粒子軌道計算では、時間進行法に4段階ルンゲ・クッタ法を用いることによって、時間方向の精度を確保している。

4. 流体場の計算法

本研究では衝撃波厚さ程度のスケールをもった微小粒子を対象としているため、衝撃波内の物理量分布が粒子挙動に対して重要な役割を果たすと考えられる。したがって、衝撃波内の分布を詳細に表現するため、本研究では、以下に述べる弱衝撃波理論⁽⁸⁾を用いて物理量分布を決定している。

衝撃波を散逸過程の特性長さと同程度のスケールで眺め、境界層としての構造を考える。散逸過程として粘性および熱伝導性だけを考えた場合、垂直衝撃波内の主流方向 x の流体速度成分 u は次式より与えられる。

$$\frac{u_1}{u_1 - u_2} \ln \left\{ \frac{2(u_1 - u)}{u_1 - u_2} \right\} - \frac{u_1}{u_1 - u_2} \ln \left\{ \frac{2(u - u_2)}{u_1 - u_2} \right\} = \frac{8}{3} \frac{\rho_{f1} u_1}{\mu} \frac{\gamma - 1}{\gamma} x \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)中の u_1 と u_2 は、ランキン・ユゴニオの関係による衝撃波前後の関係式から求めている。また、最大速度こう配に基づく衝撃波厚さ X_u は、

$$X_u = \frac{u_1 - u_2}{\left| \frac{du}{dx} \right|_{\max}} = \frac{8}{G} \frac{\mu_1}{(u_1 - u_2) \rho_{f1}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

と定義され、ここで G は比熱比 γ とプラントル数 Pr の関数として次式で与えられる。

$$G = \frac{\gamma + 1}{\frac{4}{3} + \frac{\gamma - 1}{Pr}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

本研究における流体速度場は、二分法を用いて式(7)を解くことによって求められている。流体密度、流体温度は弱衝撃波理論での流体速度を用い、連続の式、運動量保存の式、気体の状態方程式から求めている。流体の分子粘性はサザーランドの公式により求めている。

Table 1 Upstream conditions of fluid

Mach Number	M_1	1.1
Density	ρ_{f1} [kg/m ³]	1.2
Static Temperature	T_1 [K]	293.2

Table 2 Particle conditions

Particle Diameter \ Density	1.0×10^1 [kg/m ³]	1.0×10^2 [kg/m ³]	1.0×10^3 [kg/m ³]
1.0 [μ m]	CaseA1	CaseA2	CaseA3
10.0 [μ m]	CaseB1	CaseB2	CaseB3
100.0 [μ m]	CaseC1	CaseC2	CaseC3

5. 計算条件

本研究では、垂直衝撃波が定在する流体場を対象としている。4章において説明したように、流体速度の決定に弱衝撃波理論を用いるため、衝撃波上流のマッハ数は1.1に選んだ。衝撃波上流における流体場の諸量を表1にまとめる。

本研究で用いられた微小粒子は、LDV計測等で一般的に利用されているトレーサ粒子を想定した。広範囲な粒子径・密度をもつトレーサ粒子に対する影響を調べるため、粒子直径、密度について表2に示すような9パターンを仮定し計算を行った。

粒子挙動の計算においては、微小粒子が流体と同じ速度をもった状態から計算を開始し、衝撃波を通過した後に、流体との相対速度 $|u_i - v_i|$ が5 m/s以下になったところで微小粒子が流れに追従したと判断し計算を終了した。なお、より下流まで計算を続けた場合、微小粒子と流体の相対速度は0 m/sに漸近するが、相対速度5 m/sの条件は主流流速の1.3%に相当するため、流速計の性能を考えた場合、妥当な設定であると考えられる。

6. 結果と考察

6・1 流体速度場 図1は流体場の主流方向流速と衝撃波中心からの距離の関係を示している。式(8)と式(9)より求まる衝撃波厚さは $X_u = 1.75 \mu\text{m}$ であり、衝撃波中心から上流、下流各 $50X_u$ の領域に500点を配している。以後の粒子軌道の計算で用いる流体場の物理量分布は、すべて図1の速度を基にして決定されている。

6・2 B.B.O. 方程式の各項の寄与 次に、図1の速度分布を有する衝撃波通過時における、B.B.O. 方程式(1)中の各項の寄与を調べる。

表3は、粒子が流体に追従するまでの、各ケースにおけるB.B.O. 方程式(1)中の各項の寄与の割合を示している。表3より、粒子密度と粒子径に対して次のようなことがわかる。粒子密度が $1.0 \times 10^1 \text{ kg/m}^3$ と

Fig. 1 Velocity distribution of fluid flow

Table 3 Contribution of each term in eq. (1) with Faxen term

Case	Drag term [%]	Pressure term [%]	Add Mass term [%]	Basset term [%]
A1	59.08	13.82	3.55	23.56
A2	89.27	1.33	0.32	9.08
A3	96.10	0.13	0.03	3.74
B1	63.47	13.40	3.17	20.00
B2	90.42	1.32	0.31	7.96
B3	97.43	0.13	0.03	2.41
C1	84.11	13.41	3.21	-0.50
C2	89.00	1.32	0.31	9.39
C3	98.09	0.13	0.03	1.75

Table 4 Contribution of each term in eq. (1) without Faxen term

Case	Drag term [%]	Pressure term [%]	Add Mass term [%]	Basset term [%]
A1	59.08	13.82	3.55	23.55
A2	89.27	1.33	0.32	9.08
A3	96.10	0.13	0.03	3.74
B1	63.40	13.39	3.17	20.03
B2	90.41	1.32	0.31	7.96
B3	97.43	0.13	0.03	2.40
C1	71.34	13.38	3.19	12.09
C2	94.32	1.32	0.31	4.05
C3	98.56	0.13	0.03	1.28

小さいときには、圧力項、Basset 項が抗力項の半分程度の割合で粒子軌道に寄与していることが見て取れる。しかしながら、粒子密度がそれよりも大きなケースでは、抗力項に対して他の三つの項は無視できる程度の寄与しかない。粒子径に対しては、粒子径が大きなケースほど、抗力項の寄与は強まり、逆に Basset 項の寄与は弱まっていることがわかるが、ケース C1 についてはその寄与に負の値がついている。これは衝撃波通過時に粒子速度の増加に寄与したことを意味しており、興味深い。また、他の2項については粒子径による寄与の変化は小さいことが明らかである。

表4は、式(1)中の Faxen 項を無視して計算した場合の粒子挙動への各項の寄与を示したものである。Thomas⁽²⁾により Basset 項の寄与が、斜め衝撃波を通過する際について調査されており、粒子密度 $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 以上、かつ粒子半径 $0.5 \mu\text{m}$ 以上の粒子では Basset 項の寄与は無視できるとしている。本研究においては、計算の打ち切りに用いた条件から、寄与が10%以下である粒子密度 $1.0 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ 以上のケースについては、その影響は無視できると考えられる。

Fig. 2 Velocity distribution for Case A (Particle diameter = $1.0 \mu\text{m}$) Fig. 3 Velocity distribution for Case B (Particle diameter = $10.0 \mu\text{m}$) Fig. 4 Velocity distribution for Case C (Particle diameter = $100.0 \mu\text{m}$)

また、付加質量項について、その寄与はすべてのケースにおいて10%よりも小さく、実用上は考慮する必要がないといえよう。

表3、4の二つの表を比較してみる。Faxen 項を考慮した場合としない場合で、最も大きな違いがみられるのは、ケース C1 の抗力項で12.8%の増加、ケース C1 の Basset 項で12.6%の減少、次にケース C2 の Basset 項で5.3%の減少となっている。いずれも粒子径が最も大きな $100 \mu\text{m}$ の場合であった。これは Faxen 項の中に粒子半径の二乗が含まれていることから妥当な結果であると考えられる。この二つの表の比較から、今回用いられた流体場に関しては、Faxen 項が粒子挙動に与える影響は小さく、また実際の計測に用いられるトレーサ粒子が $1 \sim 10 \mu\text{m}$ オーダであることを考え、以後の結果は Faxen 項を無視した式を

用いたものを示すこととする。

6・3 粒子速度分布 図2~4は衝撃波を通過する微小粒子の速度変化を示したものである。横軸の0mが衝撃波中心位置を意味している。各図から、粒子径の大きな粒子ほど流れへの追従性が悪く、衝撃波通過後の追従に多くの距離を必要としていることが見て取れる。粒子密度に関しても同様に、密度が大きくなるにつれて追従に長い距離を要する。

6・4 粒子加速度分布 次に、各粒子に作用する4種類の粒子加速度の分布を流れ方向に比較したものを図5に示す。なお、衝撃波を通過するときのみに作用する圧力項や付加質量項の分布を明らかに示すため、すべての図は、横軸をCase A1のスケールに一

致させている。図5より、粒子径が小さく、粒子密度が低い粒子ほど抗力項とBasset項の効果が大きいことがわかる。また、同一粒子径で粒子密度だけが増した場合、圧力項と付加質量項の分布形状にはあまり変化がみられないが、粒子密度の増加に反比例して全体のオーダが減少しているようすが見て取れる。さらに、Basset項と抗力項は、密度の増加に比例して衝撃波通過後のこう配がゆるくなっていることがわかる。これは、粒子の追従性が悪化したことにより、粒子と流体の相対速度が縮まりにくくなっているためである。同一粒子密度で粒子径が増大した場合、質量に対する表面積の割合が減少するため、Basset項と抗力項が小さくなり、相対的に圧力項、付加質量項による

Fig. 5 Contribution of each term in eq. (1)

影響の比率が大きくなっている。しかしながら、これら二つの項による加速度は衝撃波通過時の瞬間的なものであるため、全体としての影響は小さい。このことは、微小粒子が流体へ追従するための時間的、空間的遅れが大きくなることにより、抗力項の影響がいつそう強まっているという見方でもできるであろう。

6.5 粒子追従距離 本研究では、流体と粒子の相対速度が5 m/s以下で粒子が追従したと判断し、計算を終了させている。したがって、衝撃波通過後に、再び粒子の相対速度が5 m/s以下になるまでの距離を追従に要した距離、すなわち追従距離と考えている。粒子密度を固定し粒子径を変化させた場合の追従距離を図6に、粒子径を固定し粒子密度を変化させた場合の追従距離を図7に示す。図中のプロットが計算結果であり、図6では粒子半径が0.5~5 μm において0.5 μm 刻み、5~50 μm の範囲において5 μm 刻みで計算を行っている。一方、図7では粒子密度が10~100 kg/m^3 において10 kg/m^3 刻み、100~1000 kg/m^3 において100 kg/m^3 刻みとした。図6, 7より、追従距離は粒子径に対して二次曲線的に、粒子密度に対しては線形に増加することがわかる。粒子径、粒子

密度と追従距離に関する同様の結果は、上流マッハ数1.6の垂直衝撃波と抗力のみを考慮したB.B.O.方程式を用いてMaxwell-Seasholtz⁽³⁾によっても求められている。彼らは、粒子半径0.5 μm 、粒子密度 $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ の粒子を仮定し、上流マッハ数をパラメータとした場合、上流マッハ数が減少するほど追従距離が長くなることを明らかにしており、より厳密な解析を行った本研究の結果と同様の傾向を示している。

次に、表4より他3項に比べて抗力項の粒子挙動への寄与の大きいことがみられたので、抗力項のみを考慮し、追従距離と粒子密度、粒子半径の関係を考えることにする。まず、抗力項以外の項を省略すると、B.B.O.方程式(1)は以下のように簡略化できる。

$$m_p \frac{dv}{dt} = -6\pi\mu\phi(v-u) \quad \dots\dots\dots (10)$$

いま、抗力係数 ϕ の変化が小さくほぼ一定であると仮定して、式(10)を積分し、整理すると次式が得られる。

$$\frac{x}{\tau_p u_1} = -\frac{4}{\phi C_c} \left\{ \frac{v}{u_1} - 1 + \frac{u_2}{u_1} \ln \left(\frac{v-u_2}{u_1-u_2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 τ_0 は粒子の拡散時間⁽⁹⁾であり以下の形で表される。

$$\tau_p = \rho_p C_c a^2 / 18\mu \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$C_c = 1 + 2.514(\lambda/2a) + 0.80(\lambda/2a) \times \exp\{-0.55(2a/\lambda)\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 λ は媒質分子の平均自由行程である。したがって、無次元粒子位置 $x/\tau_p u_1$ が近似的に粒子半径 a のみの関数となることがわかる。この解析の結果、 v が $u_1 + 5.0 \text{ m/s}$ となる粒子位置 x を $\tau_p u_1$ で無次元化すると追従距離が無次元で与えられると考えられる。図8に、図6を $\tau_p u_1$ の値で無次元化した無次元追従距離 L_{set}^* を示す。図8より、異なる粒子密度に対する結果を近似的に一つの曲線で表せることが確かめられた。また、最小二乗法によりこの近似曲線を求める

Fig. 6 Settling length for given particle densities

Fig. 7 Settling length for given particle radius

Fig. 8 Dimensionless settling length

と、本研究で対象とした粒子径・粒子密度の範囲において、上流マッハ数1.1の垂直衝撃波に対して、微小粒子の無次元追従距離が次のような近似式で表されることがわかった。

$$L_{set}^* = -1.108 \ln(a) - 9.2052 \dots\dots\dots (14)$$

7. 結 言

本研究は、異なる粒子径、粒子密度を有する9種類の微小粒子に対して、垂直衝撃波通過時の挙動を数値計算したものである。本研究により得られた知見を以下に列記する。

(1) 粒子の流体への追従性は、粒子密度、粒子径が小さいほどよく、大きくなるほど悪化する。

(2) 粒子密度が小さい場合は、抗力項だけでなく、圧力項、Basset項を考慮する必要がある。ただし、支配的な寄与は抗力項によるものである。

(3) 粒子密度が大きな場合は、抗力項の寄与のみが支配的になる。

(4) 粒子径の変化による、圧力項、付加質量項の粒子挙動への寄与の変化はほとんどない。粒子径が増加するに従い、Basset項の寄与は減少し、その減少した分、抗力項の寄与が増加する。

(5) 無次元追従距離は、粒子半径のみの関数とし

て近似的に表せる。衝撃波に対するトレーサ粒子を用いた流速計測において、この関数で示された領域が1.3%以上の計測誤差を含む領域であり、補正を必要とする領域とみなせる。

文 献

- (1) Tedeschi, G., Gouin, H. and Elena, M., Motion of Tracer Particles in Supersonic Flows., *Exp. Fluids*, **26** (1999), 288-296.
- (2) Thomas, P. J., On the Influence of the Basset History Force on the Motion of a Particle through a Fluid., *Phys. Fluids*, **A4-9** (1992), 2090-2093.
- (3) Maxwell, B. R. and Seasholtz, R. G., Velocity Lag of Solid Particles in Oscillating Gases and in Gases Passing through Normal Shock Waves., *NASA Tech. Note*, 7490 (1974).
- (4) Maurice, M. S., A Method to Quantify and Correct Particle Velocity Bias in Laser Velocimetry Measurements., *AIAA Paper*, 92-0764 (1992).
- (5) Mei, R., Velocity Fidelity of Flow Tracer Particles, *Exp. Fluids*, **22** (1996), 1-13.
- (6) Schöneborn P-R, The Interaction between a Single Particle and an Oscillating Fluid. *Int. J. Multiphase Flow*, **2** (1975), 307-317.
- (7) Maxey, M. R. and Riley, J. J., Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform Flow, *Phys. Fluids*, **26-4** (1983), 883-889.
- (8) 盛岡茂樹著, 気体力学, (1982), 53-58, 朝倉書店.
- (9) 粉体工学の基礎編集委員会編, 粉体工学の基礎, (1992), 241-243, 日刊工業新聞社.