強制対流熱伝達問題の反転シミュレーションと
熱的境界条件の最適制御*桃瀬一成^{*1}, 安部恒平^{*2}, 木本日出夫^{*1}Reverse Computation of Forced Convection Heat Transfer
for Optimal Control of Thermal Boundary ConditionsKazunari MOMOSE^{*3}, Kouhei ABE and Hideo KIMOTO^{*3} Graduate School of Engineering Science, Osaka University,
1-3 Machikaneyama, Toyonaka-shi, Osaka, 560-8531 Japan

A reverse computation based on adjoint formulation of forced convection heat transfer is proposed to obtain the optimal thermal boundary conditions for heat transfer characteristics; such as a total heat transfer rate or a temperature at a specific location. In the reverse analysis via adjoint formulation, the heat flow is reversed in both time and space. Thus, using the numerical solution of the adjoint problem, we can inversely predict the boundary condition effects on the heat transfer characteristics. As a result, we can obtain the optimal thermal boundary conditions in both time and space to control the heat transfer at any given time.

Key Words: Forced Convection Heat Transfer, Reverse Computation, Adjoint Analysis, Numerical Analysis, Thermal Boundary Condition, Optimal Control

1. 結 言

近年のコンピュータおよび数値解析技術の進歩により、対流熱伝達問題の数値予測がかなり現実的なものとなりつつある⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。このような数値的方法は、解析的方法では不可能な任意の境界条件に適用可能であり、既に汎用的な熱対流場のシミュレーションソフトウェアも数多く開発され⁽⁵⁾、設計現場で利用され始めている。しかしながら、これらの数値シミュレーションで得られる解は特定の境界条件に対する特殊解に過ぎず、境界条件を変更すれば再度数値シミュレーションを実行する必要がある。よって、通常の数値解析手法を設計ツールとして利用するためには、試行錯誤または何らかの反復的最適化過程を必要とし、必ずしも効率的とはいえない。つまり、設計または制御という観点から考えると、求めるべき対象は特定の境界条件に対する熱伝達特性よりも、むしろ所望の熱伝達特性を実現する境界条件であり、そのためには因果律を反転させた逆解析が必要となる⁽⁶⁾。

このような観点から、本報では強制対流熱伝達問題を対象として、随伴表現に基づく時空間反転シミュレーションを提案する。本反転シミュレーションでは、熱流の方向を時間・空間ともに反転することにより、所望の熱伝達特性(総伝熱量や特定位置の温度等)を入力として、それを実現するために必要な熱的境界条件に関する情報が出力される。その結果、高々1回の反転シミュレーション結果から熱的境界条件の最適化および最適制御が可能であることを示す。

2. 基礎方程式および初期・境界条件

境界 Γ を有する強制対流場 Ω を考える。流体は非圧縮性であり、物性値の温度依存性が無視できるものとする。対流場の温度を支配する基礎方程式は適当な無次元化を用いて以下のように表わされる。

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}$ は位置ベクトル、 t は時間、 T は温度、そして Pr はプラントル数である。また、 $\mathbf{u}$ は定常な流速ベクトルであり、強制対流熱伝達の仮定のもと、温度場とは独立に何らかの数値流体力学(CFD)的方法により事前に与えられるものとする。

* 原稿受付 2002年10月3日。

^{*1} 正員、大阪大学大学院基礎工学研究科(〒560-8531 豊中市待兼山町1-3)。^{*2} 学生員、大阪大学大学院。

E-mail: momose@me.es.osaka-u.ac.jp

ここで、初期条件は既知であるものとして、時刻 t における温度と初期温度との差 $\theta(x, t)$ を以下のように定義する。

$$\theta(x, t) \equiv T(x, t) - T(x, 0) \quad t \geq 0 \quad (2)$$

さらに、境界 Γ は温度規定境界 Γ_θ と熱流束規定境界 Γ_q からなり

$$\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \quad (3)$$

とする。

以上の仮定のもと、本研究で対象とする基礎方程式および初期・境界条件は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(x) \cdot \nabla \theta(x, t) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta(x, t) \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \quad (5)$$

$$\theta(x, t) = \tilde{\theta}(x, t) \quad x \in \Gamma_\theta \quad (6)$$

$$q(x, t) \equiv \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}(x, t) \quad x \in \Gamma_q \quad (7)$$

ただし、 $\tilde{\theta}$ および $\tilde{q}$ は既知または制御可能な境界上の温度および熱流束であり、 $\mathbf{n}$ は外向き法線方向単位ベクトルである。

3. 弱形式と随伴作用素

便宜的に基礎方程式(4)を微分作用素

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(x) \cdot \nabla - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \quad (8)$$

を用いて

$$\mathcal{L}[\theta(x, t)] = 0 \quad (9)$$

と記することになると、式(9) (または式(4)) に対する弱形式は以下のように表わされる。

$$\int_0^\tau \int_\Omega \theta^* \mathcal{L}[\theta] d\Omega dt = 0 \quad (10)$$

ただし、 θ^* は試験関数または随伴温度であり、 τ はある特定の時刻である。ここで、式(10)の非定常項、移流項および拡散項を含む各項に、それぞれ部分積分、発散定理およびグリーンの第2公式を適用すると以下のような積分方程式が得られる。

$$\int_0^\tau \int_\Omega \theta^* \mathcal{L}[\theta] d\Omega dt = \int_0^\tau \int_\Gamma (\theta^* q - q^* \theta) d\Gamma dt - \int_\Omega [\theta^* \theta]_0^\tau d\Omega \quad (11)$$

ここで q^* は

$$q^* = \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta^*}{\partial n} \quad (12)$$

で定義する随伴熱流束である。また、 $\mathcal{L}^*$ はもとの微分作用素 $\mathcal{L}$ に対する随伴作用素であり、以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}^* \equiv -\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{u}(x) \cdot \nabla - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \quad (13)$$

この随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ ともとの微分作用素 $\mathcal{L}$ を比較すると、時間・空間に関して対称な拡散項 (第3項) の符号は変化しないのに対して、非定常項および移流項の符号は反転している。よって、以降で導出するいずれの随伴問題も時間に関して $t = \tau$ から $t = 0$ に向かって負の方向に計算することになり、その解は時間・空間いずれに関しても反転する。また、随伴問題の初期条件として

$$\theta^*(x, \tau) = 0 \quad x \in \Omega \quad (14)$$

を選べば、式(5)と合わせて式(11)の右辺第2項は消去され、以下の積分方程式が得られる。

$$\int_0^\tau \int_\Omega \theta^* \mathcal{L}^*[\theta] d\Omega dt = \langle \theta^* * q \rangle_\tau - \langle q^* * \theta \rangle_\tau \quad (15)$$

ただし、便宜的に以下の積分作用素表現を用いた。

$$\langle f * g \rangle_\tau \equiv \int_0^\tau \int_\Gamma f(x, \tau - t) g(x, t) d\Gamma dt \quad (16)$$

4. 随伴問題と境界積分関係式

前節で得られた積分方程式(15)において、右辺は境界積分のみを含み、これらに含まれる随伴温度 θ^* および随伴熱流束 q^* は、式(15)左辺に対する境界上の熱流束 q および温度 θ の影響を表わしている。よって、式(15)左辺において何らかの熱伝達特性が抽出できるように随伴問題を設定し、その数値解から境界上の随伴温度 θ^* および随伴熱流束 q^* が得られれば、それらは設定した熱伝達特性に対する任意の熱的境界条件の影響を与えることになる。以下にいくつかの随伴問題例とその結果得られる境界積分関係式を示す。

4.1 非定常境界積分関係式 まず、目的の熱伝達特性を対流場内の1点の温度とし、随伴問題を次のように設定する。

$$\mathcal{L}^*[\theta^*(x, t)] = \delta(\xi - x) \delta(\tau - t) \quad (17)$$

ただし、 ξ は評価したい対流場内の位置ベクトルであり、 $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数である。そして、制御可能な熱的境界条件 (式(6), (7)) のみの影響を得るため、式(17)の境界条件として

$$\theta^*(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma_\theta, \quad q^*(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma_q \quad (18)$$

を採用する。これらを式(15)に適用すると、以下のような境界積分関係式が得られる。

$$\theta(\xi, \tau) = \langle \theta^* * \bar{q} \rangle_{\Gamma_q}^{\tau} - \langle q^* * \bar{\theta} \rangle_{\Gamma_\theta}^{\tau} \quad (19)$$

式(19)より、随伴問題(17)を境界条件(18)のもとで数値的に解き、境界上の随伴温度および随伴熱流束を得ることにより、任意の熱的境界条件の時間変化に対して、点 ξ 、時刻 τ における温度が推定可能となる。この過程は、評価したい位置に仮想的なインパルス熱源を設定し、そこから境界上に到達する熱流を時間と空間を反転して追跡していることに相当し、この情報を逆再生(式(16)の畳み込み積分に相当)すれば熱的境界条件の時空間にわたる影響が得られることになる。なお、後述するように実際の随伴問題の計算に際しては、個々の時刻 τ について計算する必要はなく、畳み込み積分の性質を利用して1回の随伴計算から任意の時刻 τ における $\theta(\xi, \tau)$ が予測可能である。

同様に、随伴問題

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*[\theta^*(x, t)] &= p(x)\delta(\tau - t), \\ p(x) &= \begin{cases} 1/V_p & x \in \Omega_p \\ 0 & x \notin \Omega_p \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

を境界条件(18)のもとで解くことにより、

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\tau) &\equiv \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \theta(x, \tau) d\Omega \\ &= \langle \theta^* * \bar{q} \rangle_{\Gamma_q}^{\tau} - \langle q^* * \bar{\theta} \rangle_{\Gamma_\theta}^{\tau} \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。ここで、 Ω_p は対流場内に含まれる小領域($\Omega_p \subset \Omega$)、そして V_p はその体積であり、この場合には領域 Ω_p 内の平均温度に対する熱的境界条件の影響を評価することができる。

次に、境界上の熱伝達特性に対する熱的境界条件の影響を評価するため、つぎのような随伴問題を考える。

$$\mathcal{L}^*[\theta^*(x, t)] = 0 \quad (22)$$

その結果、つぎの境界積分関係式が得られる。

$$\langle \theta^* * q \rangle_{\Gamma}^{\tau} = \langle q^* * \theta \rangle_{\Gamma}^{\tau} \quad (23)$$

ここで、随伴問題(22)に対する境界条件として

$$\theta^*(x, t) = \delta(\tau - t) \quad x \in \Gamma_\theta, \quad (24)$$

$$q^*(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma_q \quad (24)$$

を採用すれば

$$\begin{aligned} Q(\tau) &\equiv \int_{\Gamma_\theta} q(x, \tau) d\Gamma \\ &= \langle q^* * \bar{\theta} \rangle_{\Gamma_\theta}^{\tau} - \langle \theta^* * \bar{q} \rangle_{\Gamma_q}^{\tau} \end{aligned} \quad (25)$$

が得られ、また、 S_q を境界 Γ_q の面積として

$$\begin{aligned} q^*(x, t) &= \delta(\tau - t)/S_q \quad x \in \Gamma_q, \\ \theta^*(x, t) &= 0 \quad x \in \Gamma_\theta \end{aligned} \quad (26)$$

とすれば

$$\begin{aligned} Q(\tau) &\equiv \frac{1}{S_q} \int_{\Gamma_q} \theta(x, \tau) d\Gamma \\ &= \langle \theta^* * \bar{q} \rangle_{\Gamma_q}^{\tau} - \langle q^* * \bar{\theta} \rangle_{\Gamma_\theta}^{\tau} \end{aligned} \quad (27)$$

が得られる。よって、式(25)より温度規定境界上の総伝熱量に対する任意の熱的境界条件の影響が得られ、同様に式(27)より熱流束規定境界上の平均温度に対する任意の熱的境界条件の影響が得られることになる。なお、ここでは簡単のため境界を温度規定境界と熱流束規定境界の2つに分けたが、これらの境界を分割し、個々に境界条件を設けることにより、特定境界上の総伝熱量や平均温度を評価することも可能である。

4.2 定常境界積分関係式 境界条件が時間とともに変化しない定常問題に対する随伴問題は空間のみの反転となり、その数値解から熱伝達特性に対する空間的な熱的境界条件の影響を評価することができる。つまり、定常な変数および作用素には添え字 s を付けるものとして、前述の非定常問題に

$$\theta(x, t) \rightarrow \theta_s(x), \quad q(x, t) \rightarrow q_s(x) \quad (28)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_s \equiv \mathbf{u} \cdot \nabla - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \quad (29)$$

$$\theta^*(x, t) \rightarrow \theta_s^*(x), \quad q^*(x, t) \rightarrow q_s^*(x) \quad (30)$$

$$\mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{L}_s^* \equiv -\mathbf{u} \cdot \nabla - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \quad (31)$$

$$\delta(\tau - t) \rightarrow 1 \quad (32)$$

$$\langle f^* g \rangle_{\Gamma}^{\tau} \rightarrow (f_s, g_s)_{\Gamma} \equiv \int_{\Gamma} f_s(x) g_s(x) d\Gamma \quad (33)$$

のような置き換えを適用すると、式(19)、(21)、(25)、(27)の境界積分関係式はそれぞれ

$$\theta_s(\xi) = (\theta_s^*, \bar{q}_s)_{\Gamma_q} - (q_s^*, \bar{\theta}_s)_{\Gamma_\theta} \quad (34)$$

$$\bar{\theta}_s \equiv \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \theta_s(x) d\Omega = (\theta_s^* * \bar{q}_s)_{\Gamma_q} - (q_s^* * \bar{\theta}_s)_{\Gamma_\theta} \quad (35)$$

$$Q_s \equiv \int_{\Gamma_\theta} q_s(x) d\Gamma = (q_s^*, \bar{\theta}_s)_{\Gamma_\theta} - (\theta_s^*, \bar{q}_s)_{\Gamma_q} \quad (36)$$

$$Q_s \equiv \frac{1}{S_q} \int_{\Gamma_q} \theta_s(x) d\Gamma = (\theta_s^* * \bar{q}_s)_{\Gamma_q} - (q_s^* * \bar{\theta}_s)_{\Gamma_\theta} \quad (37)$$

のように書き換えられ、任意の定常熱的境界条件の影響を評価することができる。

5. 随伴問題の数値計算法

ここでは式(17)および式(19)で示した随伴問題と境界積分関係式を例にとり、その数値計算法を示す。

前述したように、随伴問題は時空間について反転しているため、流速ベクトルを反転し、時間に関して負の方向に計算を進めなければならないが、本研究では通常の計算スキームを利用するため、つぎのような変数変換を行った。

$$u' = -u, \quad t' = \tau - t \quad (38)$$

その結果、式(17)はつぎのように書き換えられる。

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t'} + u' \cdot \nabla \theta^* = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta^* + \delta(\xi - x) \delta(t') \quad (39)$$

これは点熱源を有するエネルギー方程式と同形であり、標準的なCFDコードで容易に計算可能である。また、式(39)の解は時間に関してインパルス応答であることから、比較的短時間で減衰し、計算は有限の時間で打ち切ることが可能である。これは、式(19)の畳み込み積分において、十分大きな $t' (= \tau - t)$ における随伴計算結果は十分過去の影響を表わしており、無視できることを意味している。よって、この打ち切った随伴計算結果を繰り返し畳み込み積分内で利用することにより、長時間にわたる境界条件の評価が可能である。

なお、この非定常随伴問題の解がインパルス応答であることと、定常随伴問題の解がステップ応答の収束値としても得られることを考慮すると、

$$\theta_s^*(x) = \int_0^\infty \theta^*(x, t') dt' \quad (40)$$

なる関係が成立し、よって定常随伴問題の解も非定常随伴問題の計算結果から得ることができる。また、この関係から、非定常随伴計算に必要な計算時間は、通常のエネルギー方程式の定常解を非定常計算で求めるのと同程度と見積もることができる。

6. 数値計算例

本方法の一計算例として、図1に示すような一つの流入口と一つの流出口を有する2次元閉空間内の時空間反転シミュレーションを考える。本シミュレーションの目的は、閉空間内の一点 $\xi(x=0.25, y=0.25)$ の温度に対する流入口(Γ_{in})の温度ならびに左壁面(Γ_l)および下壁面(Γ_b)の加熱の影響を評価し、さらに最適制御することである。ただし、上壁面および右壁面の温度は変化しないものとし、さらに流出口温度の上流への影響は小さい⁽⁴⁾ものとして簡単のため流出口でも温

度変化なしとした。また、閉空間内の流れ場は流入口流速200 (レイノルズ数200に相当)として、事前にMAC法に基づく差分法⁽⁴⁾により求めた。

前節の結果から、この問題は式(17)で表わされる随伴問題を式(18)の境界条件のもとで解くことにより実行でき、式(18)は具体的に

$$\begin{aligned} \theta^*(x, t) &= 0 & x \in \Gamma_{in} \cup \Gamma_u \cup \Gamma_r \cup \Gamma_{out}, \\ q^*(x, t) &= 0 & x \in \Gamma_l \cup \Gamma_b \end{aligned} \quad (41)$$

のようになる。よって式(19)より、この随伴問題の数値解から目標点 ξ の時刻 τ における温度は次式で評価できる。

$$\theta(\xi, \tau) = \langle \theta^* * \tilde{q} \rangle_{\Gamma_l \cup \Gamma_b}^\tau - \langle q^* * \tilde{\theta} \rangle_{\Gamma_{in}}^\tau \quad (42)$$

計算に際しては、 $Pr = 0.71$ とし、標準的な陽的差分法⁽⁴⁾を用いた。その際、壁面近傍で密となる不等間隔格子を採用し、その分割数は縦横ともに100とした。また、時間刻みは安定性の制約から 2×10^{-7} としたが、計算結果は 2×10^{-3} 間隔で随伴温度場が十分に減衰する(図4参照) $t' = 0.6$ までファイルに保存した。

なお、以下で示す最適化および最適制御結果は、検証用の直接計算(図3, 6)を除いて、すべて一回の随伴計算結果から得ることができ、前述したようにその計算時間は一回の直接計算と同程度である。

6.1 壁面加熱の最適化 まず、定常状態の流入口温度および壁面加熱が目標点温度に与える影響について考える。これは式(34)より次式で与えられる。

$$\theta_s(\xi) = (\theta_s^*, \tilde{q}_s)_{\Gamma_l \cup \Gamma_b} - (q_s^*, \tilde{\theta}_s)_{\Gamma_{in}} \quad (43)$$

ここで、 θ_s^* および q_s^* は定常状態の随伴温度および随伴熱流束であり、これらは式(40)の関係から非定常随伴計算結果を数値積分することにより得ることができる。

Fig.1 Configuration of model forced convection field in a two-dimensional enclosure with one inlet and one outlet

得られた定常状態の随伴温度場を図2(a)に、また加熱壁面上(Γ_l, Γ_b)の定常随伴温度分布および流入口(Γ_m)における定常随伴熱流束分布を図2(b)に示す。

図2(a)は目標点 ξ に仮想熱源をおき、空間を反転させたシミュレーション結果に相当し、同図より仮想熱源で発生した随伴熱流の影響は下壁面で顕著に現れている。これは図2(b)でも確認でき、下壁面上 $x=0.4$ 付近で随伴温度がピークをもつ。よって、実際の加熱では $x=0.4$ 付近が最も効率よく目標点温度を上昇させることができ、この位置にヒータを設置すれば最小の熱量で目標温度を達成できる。

以上の結果を確認するため、流入口温度が1($\tilde{\theta}_m=1$)のとき、目標点温度をやはり1($\theta_s(\xi)=1$)にするために必要な壁面加熱量の最適化(最小化)を考える。式(43)より、壁面上の加熱部分を Γ_h とし、 Γ_h 内で熱流束が一定であるとする、要求される加熱量 $\bar{Q}_h$ は次式で与えられる。

$$\bar{Q}_h \equiv \bar{q}_h \ell_h = \frac{1 + \int_{\Gamma_m} q_s^*(x) d\Gamma}{\int_{\Gamma_h} \theta_s^*(x) d\Gamma} \ell_h \quad (44)$$

ただし、 ℓ_h は Γ_h の長さであり、流入口における温度分

(a) adjoint temperature field

(b) influence of inlet temperature and wall heating on temperature at ξ

Fig.2 Steady-state results obtained from an unsteady adjoint computation

Table 1 Predicted optimal heating rate			
Heating Area Γ_h	Γ_{opt}	$\Gamma_l \cup \Gamma_b$	None
Heating Rate $\bar{Q}_h$	0.845	1.791	—
Predicted $\theta_s(\xi)$	1.0	1.0	0.751

布は一樣であるとした。ここで加熱部長さ ℓ_h を0.2とし、図2の結果から最適加熱部分を Γ_{opt} ($0.3 \leq x \leq 0.5$)とした場合に必要の加熱量 $\bar{Q}_h$ を表1に示す。表1には、左壁面および下壁面を一樣に加熱した場合の必要

(a) without wall heating
($\bar{Q}_h = 0.0$, $\theta_s(\xi) = 0.742$)

(b) uniform heating on left and bottom walls
($\bar{Q}_h = 1.791$, $\theta_s(\xi) = 0.989$)

(c) optimal heating on Γ_{opt}
($\bar{Q}_h = 0.845$, $\theta_s(\xi) = 0.993$)

Fig.3 Direct numerical simulation results associated with Table 1

加熱量も併記したが、最適位置 Γ_{opt} を加熱することにより一様加熱の半分以上の熱量で目標温度 ($\theta(\xi)=1$) が達成できることが確認できる。図3は検証のため表1の加熱条件を用いて通常の直接計算を行った結果であり、図中には直接計算で得られた目標点温度 $\theta(\xi)$ も記載したが、随伴計算による予測値と満足できる一致が得られた。

6.2 壁面加熱の最適制御 つぎに、非定常随伴計算結果を利用した最適化の一例として、壁面加熱の最適制御を考える。問題は、流入口温度が時間とともに変化するとき、壁面上の加熱量 $\tilde{Q}_{opt}(t)$ を制御することにより目標点温度 $\theta(\xi, t)$ を1に維持することである。ただし、簡単のため加熱部分は前節で得られた定常問題の最適加熱位置 Γ_{opt} ($0.3 \leq x \leq 0.5$) に固定するものとし、前節同様加熱部の熱流束分布および流入口の温度分布は一様であるとする。

以上の仮定のもと、目標点の温度変化は式(42)より次式で与えられる。

$$\theta(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \theta_{opt}^*(\tau-t) \tilde{Q}_{opt}(t) dt - \int_0^{\tau} Q_m^*(\tau-t) \tilde{\theta}_m(t) dt \quad (45)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \theta_{opt}^*(t) &= \frac{1}{\ell_h} \int_{\Gamma_{opt}} \theta^*(x, t) d\Gamma, \\ Q_m^*(t) &= \int_{\Gamma_m} q^*(x, t) d\Gamma \end{aligned} \quad (46)$$

である。図4に $\theta_{opt}^*(t)$ および $Q_m^*(t)$ の時間変化を示す。式(45)の畳み込み積分の性質から、図4において t が小さなほど直前の影響を、 t が大きくなるほど過去の影響を表わす。よって図4より、 Γ_{opt} における加熱量変化の方が流入口の温度変化より速く目標点 ξ に反映されることになる。また、式(45)より、任意の流入口温度変化 $\tilde{\theta}_m(t)$ に対して、目標点温度を $\theta(\xi, t)=1$ に維持するためには、以下の関係を満足しなければならない。

Fig. 4 Impulse responses to ξ from inlet (Γ_m) and from optimal heating area (Γ_{opt})

$$\int_0^{\tau} \theta_{opt}^*(\tau-t) \tilde{Q}_{opt}(t) dt = f(\tau) \quad (47)$$

ただし、

$$f(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} Q_m^*(\tau-t) \tilde{\theta}_m(t) dt \quad (48)$$

であり、これは流入口の温度変化 $\tilde{\theta}_m(t)$ が与えられれば計算可能である。よって、式(47)および式(48)を何らかの数値的方法で評価すれば、任意の τ に対して最適加熱量 $\tilde{Q}_{opt}(t)$ が陽に決定できる。本計算例では、式(47)および式(48)において、積分内のすべての変数を時間間隔 2×10^{-3} のステップ状時間変化で近似することにより、離散的に畳み込み積分を評価した。

一例として、流入口温度がある瞬間から短時間低下した場合を想定し、制御を施さない場合の結果を図5(a)に、最適制御を施した場合の結果を図5(b)に示す。ただし、いずれの場合も、図3(c)で示した定常状態の結果から計算を開始しており、よって開始時において目標点温度は1に維持されている ($\theta(\xi, t)=1, t \leq 0$)。

(a) without control

(b) with optimal control

Fig. 5 Optimal control of heating rate on Γ_{opt} to maintain $\theta(\xi, t)=1$ against temperature variation at inlet

Fig.6 Time change of temperature field with optimal control of heating rate $\tilde{Q}_{opt}(t)$ indicated in Fig.5(b)

図5(a)の結果から、制御を行わない場合には流入口温度の低下から少し遅れて目標点温度も低下しており、図に示した時間内では目標温度に回復していない。これに対して、最適制御を行った場合には、目標点温度は流入口温度の低下にもかかわらず目標値に維持されており、満足な制御結果が得られていると考えられる。この最適制御結果を確認するため、図5(b)で得られた $\tilde{Q}_{opt}(t)$ を用いて対応する直接計算を行った。その結果から、代表的な時刻における温度場を図6に示す。図6より、 Γ_{opt} 上の加熱量を最適制御することにより、目標点温度が維持されていることが確認できる。

7. 結 言

本研究では、強制対流熱伝達問題を対象として、随伴作用素表現に基づく時空間反転シミュレーションを提案した。その結果、高々1回の時空間反転シミュレーション結果から、対流場内の温度や総伝熱量などの熱伝達特性に対する熱的境界条件の影響が評価できることを示し、さらにその応用として熱的境界条件の最適化および最適制御が可能であることを示した。本報で

は、その原理を示すため非常に単純な2次元強制対流場を対象として計算例を示したが、本方法は簡単な変数変換を行うことにより標準的なCFDコードで計算可能である。よって、強制対流熱伝達問題における熱的境界条件の最適化または最適制御という問題に限定されるが、既製の汎用3次元熱流体解析ソフトウェアと組み合わせることにより、設計ツールの一助になるものと考えている。

文 献

- (1) Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, MacGraw-Hill(1980).
- (2) Fletcher, C.A.J., Computational Techniques for Fluid Dynamics, Springer(1991).
- (3) Ferziger, J.H. and Peric, M., Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer(1997).
- (4) 河村哲也, 流体解析 I, 朝倉書店(1996).
- (5) 河村哲也, 流体解析 II, 朝倉書店(1996).
- (6) 例えば, 日本機械学会編, 逆問題のコンピュータアナリシス, コロナ社(1991).