磁場下におけるネマティック液晶の平行平板間流れの 数値シミュレーション*

辻 知 宏^{*1}, 蝶 野 成 臣^{*1}

Numerical Simulation of Nematic Liquid Crystalline Flow between Parallel Plates under a Magnetic Field

Tomohiro TSUJI and Shigeomi CHONO^{*2}

^{*2} Department of Intelligent Mechanical Systems Engineering, Kochi University of Technology,
Tosayamada-chou, Kochi, 782-8502 Japan

Finite difference solutions to the Leslie-Ericksen equations for nematic liquid crystals are obtained for two-dimensional flow between parallel plates under a magnetic field imposed on a part of the flow domain with a transverse component. The flow is symmetric with respect to the channel centerline at small Zöcher numbers, while the director aligns with the magnetic field and the flow symmetry is broken when the Zöcher number becomes more than a critical value. This value at which a Freedericksz-like transition in director orientation is induced increases with increasing Ericksen numbers. After the transition, streamlines show a wavy pattern in the magnetic field, and vortices occur at the channel walls. The velocity profile is flat in the field, because imposition of the field induces a transverse alignment of the director near the channel centerline, resulting in a higher viscosity there and a lower viscosity near the channel walls. Furthermore, we have simulated the flow with a magnetic field imposed on the whole flow domain, and it is found that the finite extent of the magnetic field acts to retard the transition.

Key Words: Numerical Simulation, Nematic Liquid Crystal, Leslie-Ericksen Theory, ER・MR Fluid, 2-D Flow Between Parallel Plates, Magnetic Field, Freedericksz-like Transition

1. 緒 言

液晶に電磁場を印加すると、分子の配向方向が変化し結果として粘度の変化が生じることから、液晶はER (Electro-rheological) 流体, MR (Magnetorheological) 流体の一つとして注目されている^①。とくに分散系の ER・MR 流体と異なり、液晶は沈殿などの不均一性を生じないため、長時間の使用に対する信頼性が高く、応用範囲の広がりが見込める流体である。

液晶に電場または磁場を印加した理論研究としてよく知られているのがフレデリクス転移 (Freedericksz transition) ^②である。これは、2枚の平行平板間に液晶を封入し、例えば磁場を印加すると、磁場強度がある値を超えるまでは、有限の磁場が存在するにもかかわらず分子配向は全く変化せず、ある数居値を超え

ると磁場方向に配向しはじめる現象である。この数居値は液晶の物性値と平板間距離によって決定される。しかしこの現象は一次元解析であり、そのうえ流動は考慮されていない。

Leslie-Ericksen (L-E) 理論^{③-⑤}はネマティック液晶の流動を記述する完成度の高い理論であり、従来の研究において幅広く用いられている^{⑥-⑩}。しかし L-E 理論の構成方程式は複雑で、且つ分子の配向状態を規定するための角運動方程式が必要とされるので、数値解析の対象は支配方程式が常微分形となる簡単な流れに限定されてきた。最近、二次元流れの解析例もいくつか報告されているが^{⑪-⑬}、電磁場の存在を考慮した数値的研究は、やはり取り扱いが容易な流れ、例えば流路全域に外場が作用するような流れに限られている^{⑬⑭}。

本研究の目的は、二次元流れにおける液晶の ER・MR 特性を数値的に調べることであり、換言すれば、従来のフレデリクス転移を二次元に、そして流動が存

* 原稿受付 2002 年 12 月 16 日。

^{*1} 正員, 高知工科大学 (〒782-8502 高知県土佐山田町).
E-mail: chono.shigeomi@kochi-tech.ac.jp

在する場合に拡張することである。すなわち、L-E 理論を用いて平行平板流路の一部に磁場が作用する場合の流れ挙動を数値解析し、磁場強度が分子配向場、速度場、圧力場に及ぼす影響について明らかにする。

2. 支配方程式

2.1 基礎式 L-E 理論では、偏差応力テンソル τ は次式で表される。

$$\tau = \alpha_1 \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} + \alpha_2 \mathbf{n} \mathbf{N} + \alpha_3 \mathbf{N} \mathbf{n} + \alpha_4 \mathbf{A} + \alpha_5 \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \alpha_6 \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} - \frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{n})^T \quad (1)$$

ここで $\mathbf{n}$ は液晶分子の局所的平均配向方向を表す単位ベクトルで、ディレクタと呼ばれる。 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ はレズリー粘性係数である。 $\mathbf{A}$ は変形速度テンソル、 $\mathbf{N}$ はディレクタの相対角速度ベクトルで、それぞれ次式で与えられる。

$$2\mathbf{A} = (\nabla \mathbf{v})^T + \nabla \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\mathbf{N} = D\mathbf{n}/Dt - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

$\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 D/Dt は実質微分、 $\boldsymbol{\Omega}$ は渦度テンソル

$$2\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \mathbf{v})^T - \nabla \mathbf{v} \quad (4)$$

である。式(1)の F はディレクタの空間的弾性ひずみに基づく自由エネルギー密度

$$2F = K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + K_3 |\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}|^2 \quad (5)$$

と記述される。ここで K_1 、 K_2 、 K_3 は、それぞれディレクタの空間的広がり、ねじれ、曲がりに関する弾性定数である⁽¹²⁾。

磁場の作用下における液晶の等温流れを記述する保存則は

・連続の式：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

・運動方程式：

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (7)$$

・角運動方程式：

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{G} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{n}} \right) + (\alpha_3 - \alpha_2) \mathbf{N} + (\alpha_3 + \alpha_2) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \right\} \quad (8)$$

である。 ρ は流体密度、 p は圧力である。 $\mathbf{F}$ は磁場による単位体積当たりの外力、 $\mathbf{n} \times \mathbf{G}$ は磁場によ

るディレクタに作用する単位体積当たりのトルクであり、磁場を $\mathbf{H}$ とすると、 $\mathbf{F}$ および $\mathbf{G}$ は

$$\mathbf{F} = (\chi_{\perp} \mathbf{H} + \Delta\chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{H}) \quad (9)$$

$$\mathbf{G} = \Delta\chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mathbf{H} \quad (10)$$

と表される。ただし $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ は磁化率の異方性、 $\chi_{\parallel}$ および $\chi_{\perp}$ はそれぞれディレクタに平行、および垂直方向の反磁性磁化率である。

2.2 座標系と磁場領域 図1に計算領域と座標系を示す。予備計算より、永久磁石設定位置の上流側、下流側にそれぞれ流路幅 w の11倍および19倍の領域を確保することで、計算領域の最上流位置、最下流位置で十分発達した流れを得ることができた。

速度場が二次元でもディレクタ $\mathbf{n}$ はこの平面外の成分を有することもあるが、本研究では $\mathbf{n}$ について in plane 仮定を用いる。すなわち図1の x - y 座標系において、ディレクタが x 軸となす角度を $\theta(x, y)$ (ディレクタの配向角) とすれば

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^T \quad (11)$$

のように表される。

当然のことながら、流れ場は設定する磁場の分布形状に依存する。現実には存在しないような極端に理想化された磁場中での計算は無意味であるが、逆に特定の磁場に対して得られる結果は一般性を有しないので、本研究の目的からすれば、過度に厳密な磁場設定も必要ないと考えられる。そこで以下の手順で磁場を決定した。まず図2に示すように、 $x = 11W$ の位置に、流路を挟んで互いに異極を対向させて置かれた、幅 W (x 方向)、長さ $4W$ (y 方向) の永久磁石が作り出す磁場を計算した。すなわち、電磁場に関するマクスウェルの方程式⁽¹⁶⁾から得られる式(付録A参照)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

を、一辺が $20W$ の正方領域について、領域境界で垂直方向に磁場強度が変化しない条件の下で差分法で解

Fig. 1 Computation geometry and coordinate system

Fig. 2 Computation geometry of a magnetic field

いた。次に、流路内では磁場強度は y 方向に変化しないと仮定し、流路中心線上の磁場強度分布（磁場ベクトルは x 方向成分を有しない）のみを用いた。図 3 に示すように、この数値解を領域の一部である $9W \leq x \leq 13W$ の範囲にわたって指数関数で近似した。以上の結果、磁場 $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = [0, H(x), 0]^T$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 9W \\ H_m e^{-1.83(x/11-1)^2} & 9W \leq x \leq 13W \\ 0 & 13W \leq x \leq 30W \end{cases} \quad (13)$$

と表される。 H_m は磁場強度の最大値である。式(13)の指数関数で近似した場合、 $x = 9W, 13W$ で $H(x)/H_m$ は 0 にならないが、その値はたかだか 6.6×10^{-4} であるので無視できる。

Fig. 3 Distribution of a magnetic field

2.3 無次元化 以上の式を、流路幅 W 、平均流速 U 、粘性係数 α_4 、弾性定数 K_1 、磁場強度の最大値 H_m 、磁化率の異方性 $\Delta\chi$ で無次元化した（特に断らない限り、これ以後の物理量は無次元である）。式(11)、(13)を運動方程式(7)、角運動方程式(8)に代入し、

さらに流れ関数 ψ 、渦度 ω を導入すれば、無次元化された渦度輸送方程式、流れ関数と渦度の関係式、および角運動方程式はそれぞれ以下となる。

$$\text{Re} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2 \omega + \frac{1}{\text{Er}} f_1(\theta) + f_2(\theta, \psi) + \frac{Z^2}{2\text{Er}} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \sin 2\theta + 2H \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \sin 2\theta \right\} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (15)$$

$$\text{Er}(\alpha_2 - \alpha_3) \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1 + K_3}{2} \nabla^2 \theta + \frac{1}{2} \text{Er}(\alpha_2 - \alpha_3) \omega - \text{Er}(\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \sin 2\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{1 - K_3}{2} \left[\sin 2\theta \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right\} - \cos 2\theta \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{1}{2} Z^2 H^2 \sin 2\theta \quad (16)$$

u, v はそれぞれ速度ベクトルの x 方向および y 方向成分、式(14)中の f_1, f_2 については付録 B に示す。式(14)、(16)中に現れる 3 種類の無次元数は、それぞれレイノルズ数

$$\text{Re} = \rho W U / \alpha_4 \quad (17)$$

粘性力と弾性力の比を表すエリクセン数

$$\text{Er} = \alpha_4 W U / K_1 \quad (18)$$

磁力と弾性力の比を表すゾッヘル数

$$Z = W H_m \sqrt{\Delta\chi / K_1} \quad (19)$$

である（式(17)～(19)の右辺の物理量は有次元である）。

3. 数値計算

3.1 境界条件 速度場、配向場ともに、計算領域の最上流位置では一次元の解を与え、最下流位置では十分発達した流れ、すなわち x 方向に変化がないとした。壁面では、速度はすべり無し（無滑り）の条件、配向はディレクタが壁面に沿う条件、すなわち $\theta(x, \pm 0.5) = 0^\circ$ を与えた。

3.2 数値計算 式(14)~(16)の解法には差分法を用いた。計算において格子サイズの見積りは重要である。流路幅の 1/20, 1/40, および 1/60 の 3通りの正方形格子を用いた予備計算より、以下の計算では流路幅の 1/40 の正方形格子を用いた。

本計算に用いた低分子ネマティック液晶である *p*-azoxyanisole (PAA) の物性値を表 1 (有次元) に示す¹⁷⁾。密度は $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ とした。ディレクタが平面内配向の場合、 K_2 の項は存在しないので省略している。式(17), (18)から明らかなように、物性値を固定するとレイノルズ数とエリクセン数は互いに独立なパラメータではなく、PAA の場合 Re は Er の約 $1/10^4$ である。以下では、 Er と Z をパラメータに選んで結果を表示する。

Table 1 Material constants of PAA

(Pa·s)						(N)		(H/m)	
α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	K_1	K_3	$\chi_\perp$	$\Delta\chi$
$\times 10^{-3}$						$\times 10^{-12}$		$\times 10^{-13}$	
4.3	-6.9	-0.2	6.8	4.7	-2.3	4.9	10.5	-6.03	1.58

4. 結果および考察

4.1 速度場と配向場 図 4(a)~(c)に、エリクセン数 $Er = 1$ の場合の流線、速度ベクトルの x 方向成分 u 、およびディレクタの配向分布を示す。流れ関数の値は下壁で -0.5、上壁で 0.5 で、0.1 きざみである。磁場によって引き起こされるディレクタの回転は、時計方向、反時計方向それぞれ同確率で起こる。本研究では反時計方向の回転 (θ は正值) として扱うことにする。図(a)のゾッヘル数 $Z = 1$ では、流線は管壁に平行な直線、速度分布は管中心軸に関して対称、そしてディレクタは流路全域で主流方向に配向しており、磁場 ($x = 9 \sim 13$) の影響はまったく見られない。 Z が 5 に増加すると (図(b))、磁場領域の流線にわずかなゆがみが生じ、速度分布は平坦な形状になるとともにその対称性は崩れている。ディレクタについては x 軸に関して概ね 45° 方向に配向するようになり、磁場の影響が現れている。さらに Z が増加すると、図(c)のように磁場領域のディレクタは壁面近傍を除いて磁場方向 (y 方向) に配向している。速度場について見ると流線のゆがみは大きくなり、磁場領域流入直後の $x = 9 \sim 10$ で流線は y の負の方向に一旦シフトした後、 $x = 10 \sim 11$ では逆に y の正方向へシフトし、結果として $x = 10, 11$ の管壁で逆流が発生している。

図 5, 6 は、それぞれ $Er = 10, 30$ の結果である。図 5 より、 Er が 10 に増加すると磁場の影響は $Z = 5$ では見られず、 $Z = 10$ で現れており、 Er がさらに増加して 30 になると (図 6)、 $Z = 10$ でも磁場の影響は認められない。以上のことから、エリクセン数の増加は磁場の影響を抑制するように働くことがわかる。

Fig. 4 Streamlines, velocity profiles in the x direction and director orientation profiles for $Er = 1$

4.2 ディレクタと圧力の流れ方向分布および付加圧力損失 図 7(a)~(c)に, エリクセン数 $Er = 1, 5, 10$ の場合の流路中心軸上におけるディレクタの配向角 θ_c を示す。いずれの図においても, 磁場領域に近づくとともに θ_c は増加し, 最大値を示した後, 再度

0° へ漸近している。図(a)の $Er = 1$ の場合, 分布形状は磁場領域の中心, すなわち $x = 11$ に対してほぼ対称であるが, Er の増加とともに磁場の影響が下流方向へシフトしている。そのため図(c)の $Er = 10$ では, θ_c が 0° に戻る位置は $x = 20$ 付近にまで達している。これは角運動方程式(16)から明らかなように, Er は左辺の配向角 θ の対流項に掛かっており, 速度場に対するレイノルズ数と同様の役割を演じていることから, Er の増加によって上流からの対流効果が増加したためと考えられる。また $Er = 5, 10$ の場合, 磁場領域流

(a) $Z = 5$

(b) $Z = 10$

Fig. 5 Streamlines, velocity profiles in the x direction and director orientation profiles for $Er = 10$

Fig. 6 Streamlines, velocity profiles in the x direction and director orientation profiles for $Er = 30$ and $Z = 10$

(a) $Er = 1$

(b) $Er = 5$

(c) $Er = 10$

Fig. 7 Director orientation angles along the channel centerline

入直後で θ_c が一旦負値をとっている。図 5(b)の流線図から明らかなように、この領域の流線は y の負の方向に曲がっており、ディレクタは流線にほぼ沿うことから(PAAの場合、単純せん断流中でディレクタとせん断方向のなす角度は約 10° である⁹⁾)、負値を示す結果になったと考えられる。ただし Er が小さい場合には弾性の効果が大きく、 0° に設定した壁面配向角の影響が管中心にまで強く及ぶので、図(a)の $Er=1$ ではこのような現象は現れていない。

流路中心軸上の圧力分布 p_c を、 $x=0$ での値を基準として示したのが図 8(a)~(c)である。図中の一点鎖線

(a) $Er=1$ (b) $Er=5$ (c) $Er=10$

Fig. 8 Pressure distributions along the channel centerline

は磁場が存在しない場合の圧力分布で、直線である。速度場、配向場は既知であるので、 p_c は運動方程式(7)の x 成分を最上流位置から中心軸に沿って単純に積分して求めた。物性値を固定すれば Er の増加は流量の増加に相当するので、 Er の増加とともに圧力降下の割合は大きくなっている。いずれの図においても、流路上流から単調に減少してきた p_c は磁場領域で一旦回復する傾向を示している。とくに図(a)ではこの傾向が端的に見られ、磁場が存在しない場合の圧力降下直線はかなり上回っている。磁場領域ではディレクタは流れに対して有限の角度で配向するので(ゾッヘル数 Z が大きいほど垂直に配向する)、図 4, 5の平坦な速度分布が示すように速度の大きい流路中心近傍は減速する。従って単純に、動圧の減少が静圧の増加として現れた結果であると考えられる。磁場領域の中心を過ぎた位置で p_c は大きく減少し、その後一定こう配で下降する。 Z が大きいほど磁場領域でのディレクタの流れに対する抵抗が大きくなるので、その分、圧力損失としては大きく現れている。

図 9に、磁場の存在による付加圧力損失 Δp と Z の関係を示す。 Δp は、計算領域の最下端 $x=30$ において、図 8に示した磁場の存在しない一点鎖線と p_c との差から求めた。例えば $Er=5$ では、 Z がおおよそ5に達するまでは Δp は0であるが、 Z が5を超えると Δp は増加し、ある値に漸近していることがわかる。立ち上がりの Z の値は異なるが、他の Er についても同様の傾向が見られる。この結果については次節で説明する。本研究では流量一定の計算を行ったが、圧力差一定の流動では、図のように磁場強度の変化で管路抵抗を変えることができるので、結果的に流量の適切な制御につながる。

4.3 二次元フレデリクス転移 エリクセン数 Er とゾッヘル数 Z がディレクタの配向に及ぼす影響を詳細に調べるため、 Er をパラメータとして、磁場領

Fig. 9 Additional pressure losses vs. Zöcher number

域中央部 ($x=11, y=0$) でのディレクタの配向角 θ_m と Z の関係を図 10 (白抜きプロット) に示す. Z が小さい場合 θ_m は 0° を維持し, Z がある値に達すると θ_m は急増して 90° に漸近している. Er が大きいほどこの Z の臨界値は増加しており, 転移現象を遅らせていることがわかる. これは, Er の増加は流れの対称性を維持する粘性力の増加に対応し, 結果的に磁場の影響を抑制するためである. なお, 図 9 において Z が小さい範囲で付加圧力損失 Δp が 0 を維持した結果は, 以上のことから容易に理解できる.

上述の転移現象は, 無限に広い平行平板間に封入された静止状態 ($Er=0$) の液晶に, 無限の広がりを持つ一様磁場を印加した場合の挙動と類似である. この挙動は, 緒言で簡単に言及したようにフレデリクス転移²⁰と呼ばれ, すでに明らかにされている (便宜上, 従来のフレデリクス転移を一次元フレデリクス転移, 本研究のそれを二次元フレデリクス転移と呼ぶ). すなわち, 磁場の印加により液晶分子は磁場方向に再配向しようとする. しかし固体壁面でのアンカリングによる配向束縛力も作用しているため, 磁場強度がある臨界値を超えるまでは磁場が印加されても分子配向は変化しないということである.

$Er=0$ の場合, 一次元フレデリクス転移が起こる臨界磁場強度 H_m は解析的に得られ²⁰

$$H_m = \pi/W \sqrt{K_1/\Delta\chi} \quad (20)$$

と表される (式(20)は有次元である). 従って式(19), (20)より, 臨界ゾッヘル数は π となる. $Er=0$ における一次元フレデリクス転移の結果を図 10 (黒抜きプロット) に併記する. $Er=0$ の二次元フレデリクス転移 (○) と比較すると, Z の大きい範囲を除き両者には明らかに差異が見られる. 磁場領域の大きさが有限の場合, 式(5)で示したディレクタの空間ひずみによる弾性トルクを介して, 磁場領域外のディレクタの配

向が磁場領域内の配向に影響を及ぼす. 磁場領域外では 0° に配向しているので, この影響を受けて二次元解析の θ_m の方が小さい.

本研究結果は, 式(13)で表される磁場強度の結果であり, この分布形状が変われば当然のことながら結果も異なる. 従って液晶を ER・MR 流体として活用するには, 単純な一次元解析では精度に限界があり, 個々の問題に則した二次元, あるいは三次元の精密解析が必要である.

5. 結 言

本研究では, 平行平板流路の一部に, 流れに対して垂直方向に磁場が作用する場合の液晶流れを, 構成方程式として Leslie-Ericksen 理論を用いて数値解析した. 得られた結果を要約して以下に示す.

(1) エリクセン数の増加は磁場の影響を抑制するように働く.

(2) 低エリクセン数では, 流路中心軸上のディレクタの配向角は, 磁場領域の中心に関して上流下流でほぼ対称であるが, エリクセン数が増加すると磁場の流れへの影響が下流方向へシフトする.

(3) ゾッヘル数が大きいほど磁場領域でのディレクタの流れに対する抵抗が大きくなるので, 付加圧力損失は増加する.

(4) 二次元解析においても一次元フレデリクス転移と類似の結果が得られた. ただし磁場領域外でのディレクタの配向の影響により, 一次元解析に比べてフレデリクス転移は遅れる. またエリクセン数が大きいほどフレデリクス転移の生じる臨界ゾッヘル数は大きい.

本研究を遂行するにあたり, 計算と作図にご協力いただいた大学院学生の諸田聡史君に感謝する. また, 本研究は平成 13 年度文部省科学研究費補助金 [基盤研究 (C), 課題番号 13650200] の補助を受けたことを記し, 謝意を表する.

付 録

A. 磁場の計算式 マクスウェルの方程式は

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (A1)$$

である. $\mathbf{B}$ は磁束密度 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, μ_0 は真空の透磁率, $\mathbf{M}$ は磁化ベクトル $\mathbf{M} = \chi_1 \mathbf{H} + \Delta\chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mathbf{n}$ である. 従って式(A1)の第2式は

$$(1 + \chi_1) \nabla \cdot \mathbf{H} + \Delta\chi \nabla \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mathbf{n}) = 0 \quad (A2)$$

となる. 式(A2)の左辺第1項と第2項を比較するために $\nabla \mathbf{n}$ の大きさを見積もる.

Fig. 10 Two-dimensional Fredericksz transition

$\mathbf{n}$ の空間こう配は壁面近傍で最大となる。つまりここでは、 $\mathbf{n}$ はアンカリング角から磁場ベクトル方向へ急激に向きを変える。流動のない一次元空間を考えると、本文式(16)から以下の式(無次元)が得られる。

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta) (d\theta/dy)^2 + Z^2 \sin^2 \theta \right\} = 0$$

流路中心 $y = 0$ で θ は最大値 ($\theta_{\max}$ とする) をとり、且つ $d\theta/dy = 0$ の条件を用いると、

$$\frac{d\theta}{dy} = \pm Z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_{\max} - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta}}$$

と変形される。従って壁面では、 $\theta = 0^\circ$ を考慮して

$$\left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=\pm 0.5} = \mp Z \sin \theta_{\max}$$

と表される。すなわち $\nabla \mathbf{n}$ は、ただだか Z のオーダーである。 $\Delta \chi$ は表 1 より 10^{-13} のオーダーであることから、式(A2)の左辺第 2 項は第 1 項に比して無視できる。従って磁場計算の基礎式は式(12)となる。

B. 渦度輸送方程式 式(14)の f_1 と f_2 を以下に示す。ただし下付き添字は偏微分を表す。

$$\begin{aligned} f_1 = & K_3 \{ -2 \theta_y^2 (\sin 2\theta \theta_y + \cos 2\theta \theta_x) + 2 \theta_x (\sin^2 \theta \theta_{yy} + \cos 2\theta \theta_y \theta_x - \sin 2\theta \theta_x \theta_y + \sin 2\theta \theta_{yy} + \cos^2 \theta \theta_{xy}) + 2 \theta_y (\sin 2\theta \theta_y \theta_x - \sin^2 \theta \theta_{yy} + \sin 2\theta \theta_x \theta_x \\ & - \sin 2\theta \theta_{xy} - \cos^2 \theta \theta_{xx}) \} / 2 + \theta_y^2 (\sin 2\theta \theta_y + \cos 2\theta \theta_x) + \theta_x (\cos^2 \theta \theta_{yy} - \cos 2\theta \theta_y \theta_x + \sin 2\theta \theta_x \theta_y - \sin 2\theta \theta_{yy} + \sin^2 \theta \theta_{xy}) - \theta_y (\sin 2\theta \theta_y \theta_x \\ & + \cos^2 \theta \theta_{yy} + \sin 2\theta \theta_x \theta_x - \sin 2\theta \theta_{xy} + \sin^2 \theta \theta_{xx}) \\ f_2 = & -\alpha_6 \{ \psi_{yyy} + \cos 2\theta \psi_{yyy} - 4 \cos 2\theta \theta_y \psi_y + 8 \sin 2\theta \theta_x^2 \psi_y - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{yy} - 2 \sin 2\theta \psi_{yyy} + 2 \sin 2\theta \theta_y \psi_{xx} + 4 \cos 2\theta \theta_x^2 \psi_{xx} + \theta_y^2 (-4 \cos 2\theta \psi_{yy} \\ & + 8 \sin 2\theta \psi_y + 4 \cos 2\theta \psi_{xx}) - 4 \cos 2\theta \psi_y \theta_x + 2 \sin 2\theta \psi_{xx} \theta_x - 2 \psi_{yy} (\sin 2\theta \theta_y + 2 \cos 2\theta \theta_x^2 + \sin 2\theta \theta_{xx}) - 8 \cos 2\theta \theta_x \psi_{xy} - 4 \theta_y (\sin 2\theta \psi_{yy} \\ & + 2 \cos 2\theta \psi_{xy} - \sin 2\theta \psi_{xy}) + 2 \psi_{xy} + 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} - 2 \sin 2\theta \psi_{xy} + \psi_{xxx} - \cos 2\theta \psi_{xxx} \} / 4 \\ & + \alpha_3 \{ -\psi_{yyy} - \cos 2\theta \psi_{yyy} + 4 \cos 2\theta \psi_{yy} \theta_x - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{yy} + 2 \sin 2\theta \psi_{yyy} + 2 \sin 2\theta \theta_y \psi_{xx} - 4 \cos 2\theta \theta_x^2 \psi_{xx} + 4 \cos 2\theta \theta_y \psi_{xx} \\ & + 4 \cos 2\theta \theta_y^2 (\psi_{yy} + \psi_{xx}) - 2 \sin 2\theta \psi_{xx} \theta_x + 2 \psi_{yy} (\sin 2\theta \theta_y - 2 \cos 2\theta \theta_x^2 + 2 \cos 2\theta \theta_y - \sin 2\theta \theta_{xx}) + 4 \cos 2\theta \theta_x \psi_{xy} - 2 \psi_{xy} - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} \\ & + 4 \theta_y (\sin 2\theta \psi_{yy} - 2 \sin 2\theta \psi_y \theta_x + \cos 2\theta \psi_{yy} - 2 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} + \sin 2\theta \psi_{xy} + \cos 2\theta \psi_{xx}) + 2 \sin 2\theta \psi_{xy} - \psi_{xxx} + \cos 2\theta \psi_{xxx} \} / 4 \\ & - \alpha_5 \{ \psi_{yyy} - \cos 2\theta \psi_{yyy} + 4 \cos 2\theta \theta_y \psi_y - 8 \sin 2\theta \theta_x^2 \psi_y + 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{yy} + 2 \sin 2\theta \psi_{yyy} - 2 \sin 2\theta \theta_y \psi_{xx} - 4 \cos 2\theta \theta_x^2 \psi_{xx} + 4 \theta_y^2 (\cos 2\theta \psi_{yy} \\ & - 2 \sin 2\theta \psi_y - \cos 2\theta \psi_{xx}) + 4 \cos 2\theta \psi_y \theta_x - 2 \sin 2\theta \psi_{xx} \theta_x + 2 \psi_{yy} (\sin 2\theta \theta_y + 2 \cos 2\theta \theta_x^2 + \sin 2\theta \theta_{xx}) + 8 \cos 2\theta \theta_x \psi_{xy} + 4 \theta_y (\sin 2\theta \psi_{yy} \\ & + 2 \cos 2\theta \psi_{xy} - \sin 2\theta \psi_{xy}) + 2 \psi_{xy} - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} + 2 \sin 2\theta \psi_{xy} + \psi_{xxx} + \cos 2\theta \psi_{xxx} \} / 4 \\ & + \alpha_2 \{ \psi_{yyy} - \cos 2\theta \psi_{yyy} + 4 \cos 2\theta \psi_{yy} \theta_x - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{yy} + 2 \sin 2\theta \psi_{yyy} + 2 \sin 2\theta \theta_y \psi_{xx} - 4 \cos 2\theta \theta_x^2 \psi_{xx} + 4 \cos 2\theta \theta_y \psi_{xx} \\ & + 4 \cos 2\theta \theta_y^2 (\psi_{yy} + \psi_{xx}) - 2 \sin 2\theta \psi_{xx} \theta_x + 2 \psi_{yy} (\sin 2\theta \theta_y - 2 \cos 2\theta \theta_x^2 + 2 \cos 2\theta \theta_y - \sin 2\theta \theta_{xx}) + 4 \cos 2\theta \theta_x \psi_{xy} + 2 \psi_{xy} - 4 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} \\ & + 4 \theta_y (\sin 2\theta \psi_{yy} - 2 \sin 2\theta \psi_y \theta_x + \cos 2\theta \psi_{yy} - 2 \sin 2\theta \theta_x \psi_{xx} + \sin 2\theta \psi_{xy} + \cos 2\theta \psi_{xx}) + 2 \sin 2\theta \psi_{xy} + \psi_{xxx} + \cos 2\theta \psi_{xxx} \} / 4 \\ & - \alpha_1 \{ \psi_{yyy} - \cos 4\theta \psi_{yyy} + 8 \cos 4\theta \psi_{yy} \theta_x + 8 \cos 4\theta \theta_y \psi_y + 32 \sin 4\theta \theta_x^2 \psi_y - 16 \sin 4\theta \psi_y \theta_y - 24 \sin 4\theta \theta_x \psi_{yy} + 4 \sin 4\theta \psi_{yyy} - 4 \sin 4\theta \theta_y \psi_{xx} \\ & + 16 \cos 4\theta \theta_x^2 \psi_{xx} - 8 \cos 4\theta \theta_y \psi_{xx} + 16 \theta_y^2 (\cos 4\theta \psi_{yy} - 2 \sin 4\theta \psi_y - \cos 4\theta \psi_{xx}) - 8 \cos 4\theta \psi_y \theta_x + 4 \sin 4\theta \psi_{xx} \theta_x + 4 \psi_{yy} (\sin 4\theta \theta_y \\ & - 4 \cos 4\theta \theta_x^2 + 2 \cos 4\theta \theta_y - \sin 4\theta \theta_{xx}) - 24 \cos 4\theta \theta_x \psi_{xy} + 2 \psi_{xy} + 6 \cos 4\theta \psi_{xy} + 8 \sin 4\theta \theta_x \psi_{xx} + 8 \theta_y (\sin 4\theta \psi_{yy} - 4 \sin 4\theta \psi_y \theta_x \\ & - 8 \cos 4\theta \theta_x \psi_y + 3 \cos 4\theta \psi_{yy} + 4 \sin 4\theta \theta_x \psi_{xx} - 3 \sin 4\theta \psi_{xy} - \cos 4\theta \psi_{xx}) - 4 \sin 4\theta \psi_{xy} + \psi_{xxx} - \cos 4\theta \psi_{xxx} \} / 8 \end{aligned}$$

文 献

- (1) 小山清人監修, 電気粘性 (ER) 流体の開発, シーエムシー, 1999.
- (2) 例えば, 日本学術振興会情報科学用有機材料第 142 委員会液晶部会編, 液晶辞典, (1989), 196, 培風館.
- (3) Ericksen, J. L., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **4** (1960), 231.
- (4) Ericksen, J. L., *Trans. Soc. Rheol.*, **5** (1961), 23.
- (5) Leslie, F. M., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **28** (1968), 265.
- (6) de Gennes, P. G. and Prost, J., *The Physics of Liquid Crystals, 2nd Ed.*, Clarendon Press, Oxford (1993).
- (7) Jenkins, J. T., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **10** (1978), 197.
- (8) Leslie, F. M., *Adv. Liq. Cryst.*, **4** (1979), 1.
- (9) 蝶野成臣・辻知宏・Denn, M. M., 機論, **60**, B (1994), 1944.
- (10) 蝶野成臣・辻知宏, 機論, **61**, B (1995), 1600.
- (11) Chono, S., and Tsuji, T., *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **309** (1998), 217.
- (12) Chono, S., Tsuji, T. and Denn, M. M., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **79** (1998), 515.
- (13) A. D. Rey and M. M. Denn, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **27** (1988), 375-401.
- (14) A. D. Rey and M. M. Denn, *Liquid Crystals*, **4** (1989), 253-272.
- (15) Frank, F. C., *Discuss. Faraday Soc.*, **25** (1958), 19.
- (16) 棚橋隆彦, 電磁熱流体の数値解析, (1995), 森北出版.
- (17) Tseng, H. C., ほか 2 名, *Phys. Fluids*, **15** (1972), 1213.